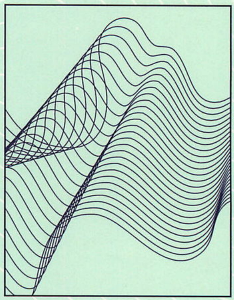
ウェーブレット

理論と応用

J.J.ベネデット／M.W.フレージャー　編

山口昌哉／山田道夫　監訳



Springer

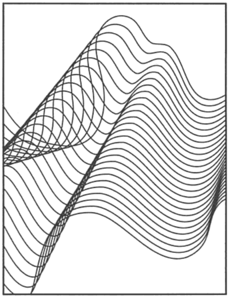
シュプリンガー・フェアラーク東京

ウェーブレット

理論と応用

J.J.ベネデット／M.W.フレージャー　編

山口昌哉／山田道夫　監訳



Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

Authorized translation of the original English language edition

Wavelets: Mathematics and Applications

edited by
John J. Benedetto
and
Michael W. Frazier

監訳者のことば

ウェーブレットの理論は1980年代から整備され，工学や科学の色々の分野で応用されてきた．しかし，この考え方は，数学や工学で，きわめて自然にでてきたテクニックであった．ただその流れが，このウェーブレットの理論で合流したといえる．数学ではフーリエ解析，工学では信号処理の技術がそれである．この本は，この2つの流れを意識しての集大成だと感じられる．山田道夫氏をはじめ，翻訳者各位に深い敬意を表し，御苦労を感謝する．

山口　昌哉

まえがき

ウェーブレットに関する書物がかなり氾濫気味であるにもかかわらず，この本を編集したことにはそれなりに理由がある．1つには，ウェーブレットの基礎理論がめざましい発展をしているからであり，2つには，ウェーブレット理論と信号処理の考え方には重要な関連性があるからであり，3つめには，偏微分演算子の研究においてウェーブレット理論が重要な役割をもっているからである．この本はこれらの3つの視点に対応して3つの部分に分かれている．序章は後続の章のための舞台作りとして，ウェーブレット理論のバックグラウンドについて概説し，工学や数学や科学の場面でどのような登場の仕方をするかを示す．さらに序章はいろいろな章に現れる問題にも展望を与える．

我々は編者として，執筆者の方々のなみなみならぬ尽力に深く感謝する．これらの方々と仕事を共にすることができたことは，我々にとって喜びでもあった．

また，序章に対しては，Ingrid Daubechies, Björn Jawerth, Yves Meyer, および Guido Weiss から惜しみない友情あふれる援助をいただき，かつ建設的な批判をいただいた．さらに，この大胆な試みに対して援助の手をさしのべてくれた CRC Press 社の Wayne Yuhasz 博士と Carol Whitehead にお礼を申し上げる．最後に，この本の出版にあたり我々を励ましてくれた Studuies in Advanced Mathematics シリーズの編集者である Steven Krantz に謝意を表する．

読者に本書を大いに楽しんでいただければ幸いである．

John J. Benedetto

College Park, Maryland

Michael W. Frazier

East Lansing, Michigan

執筆者一覧

Lars Andersson Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

Pascal Auscher Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, Rennes, France

John J. Benedetto Department of Mathematics, University of Maryland at College Park, College Park, Maryland *and* The MITRE Corporation, McLean, Virginia *and* Prometheus, Inc., Newport, Rhode Island

G. Beylkin Program in Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder, Colorado

Ronald R. Coifman Department of Mathematics, Yale University, New Haven, Connecticut

David Colella The MITRE Corporation, McLean, Virginia

Hans G. Feichtinger Mathematisches Institut, Universität Wien, Wien, Austria

Michael W. Frazier Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, Michigan

Karlheinz Gröchenig Department of Mathematics, The University of Connecticut, Storrs, Connecticut

Christopher Heil The MITRE Corporation, McLean, Virginia *and* Department of Mathematics, The Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

Frédéric Heurtaux Department of Mathematics, Washington University in St. Louis

Christian Houdré Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California

C.-c. Hsiao Department of Mathematics, National University of Taiwan, Taiwan

Stéphane Jaffard Ecole Nationale des Points et Chausees, Noisy-le-Grand, France

Björn Jawerth Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, South Carolina

Arun Kumar Southwestern Bell Technology Resources, Inc., St. Louis, Missouri

B.J. Lucier Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana

Marius Mitrea Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, South Carolina

Fabrice Planchon Department of Mathematics, Washington University in St. Louis

Richard Rochberg Department of Mathematics, Washington University in St. Louis

Robert S. Strichartz Mathematics Department, Cornell University, Ithaca, New York

Rodolfo Torres Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan

David F. Walnut The MITRE Corporation, McLean, Virginia

Mladen Victor Wickerhauser Department of Mathematics, Washington University in St. Louis

X. M. Yu Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, South Carolina

目 次

序　章

John J. Benedetto and Michael W. Frazier*

0.1　概観

多くの数学的，工学的な解析は，基本的でよく理解されている現象によって複雑な現象を表現することである．例えば，偏微分方程式を解くためのフーリエ展開や，常微分方程式における Sturm–Liouville 展開，Riemann ゼータ関数の零点を調べるためによく使われる初等的な波形による整数論的ψ関数の Riemann 分解 [Bo] などである．近年，ウェーブレット理論は関数や信号を表現するための新しい手法を提供してきた．この序章においては，ウェーブレット表現が有効な分野を示し，またウェーブレット理論と数学及び工学の様々な分野との関連について述べ，ウェーブレットの研究を動機づけたい．

まずいろいろな異なった分野におけるウェーブレットの前史を展望することから始めよう．これらはいずれウェーブレット理論によって劇的に内容が豊かになった分野である．ここではまず（正規直交系）ウェーブレットそのものの歴史で重要な研究をいくつかとりあげることから始めたい．この歴史は 1980 年代半ば，Meyer [Me1] の $\mathbb{R}$ 上や Lemarié と Meyer[LeMe] の $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな正規直交ウェーブレット基底の構成法によって劇的に始まった．その直後，Mallat と Meyer([M],[Me2]) は多重解像度解析の概念を定式化することによって，一般的な枠組みの中にこれらの構造法を位置づけた．Daubechies[D1] は，この手法をある程度の滑らかさを持つコンパクトサポートなウェーブレットの族を構成するために使用した．

さらに Daubechies は，（数学的な解析においてなじみ深い）$\mathbb{R}$ 空間の連続的な状況におけるウェーブレットと，デジタル信号解析に必要とされるような $\mathbb{Z}$ 空間あるいは $\mathbb{Z}_N$ 空間の離散的な状況におけるウェーブレットの間の関係を明らかにした．このことは，音声や画像のコード化にウェーブレット法を適用するための学際的な努力に大きな刺激を与えた．このような相互作用は，我々の知る限り，近年まれな出来事である．Beylkin, Coifman, Rokhlin [Beyetal] は，

---

*Benedetto も Frazier も NSF Grant DMS-9002420 の援助を一部受けている．

偏微分方程式の数値解析問題にウェーブレットを使用した先駆者である．音響信号の圧縮に動機付けられて Coifman, Meyer, Quake ,Wickerhauser [Coietal] はウェーブレットパケットを開発し，Coifman, Meyer は局所サイン，コサイン変換を導きだした ([CoiMe])．これらの研究は，「新しい」ウェーブレットの考え方が，長い年月の間に様々な分野の個人的な研究を通じて様々な形で発展してきたという現実を如実に示している．

すでにウェーブレットを主題とする多くの書物がある．卓越した論文としては，Meyer [Me3] と Daubechies [D2] の 2 つがある．Meyer の本はウェーブレット理論の調和解析への数学的応用に焦点をおいたものである．(Guy David のすぐれた本 [Da] も，同じねらいである．)Daubechies の本には，多数の数学的信号解析手法と共に，望ましい特性を持つウェーブレット基底を構築するための技法が述べられている．また，ウェーブレット解析を幅広く様々に応用したり，理論の発展の鍵となる多くの記事を集めた本もある ([Chu2], [Ruetal], [ComGrTc], [Le]) ．

ウェーブレット理論の将来は，これまで数学，工学，科学において別々だった分野を統合していくことになると，我々は信じている．このためには，数学者の側ではアプリケーションを積極的に提案し，工学の側では数学的な厳密さに対し注意を払うなど，多くの関係者による調整が必要となるであろう．我々は，この本がこのようなウェーブレット理論の将来に貢献することを望んでいる．数学的に正確であり，かつ一般の科学や工学の読者にわかりやすい論文を多数集めることができたのは幸運であった．この本の第 1 部は「数学的基礎」というタイトルで，将来の発展において基本的と考えられるウェーブレット理論の基礎的側面を紹介している．この部分の論文には注目に値する新しい結果も含まれているものの，それらは説明上必要な範囲にとどめられている．第 2 部は信号処理を扱っており，第 3 部は特に偏微分方程式に関連した演算子の解析を扱っている．我々はこれら 2 つの分野をウェーブレットの応用として将来性のある分野と考えている．我々はこれらの論文においてウェーブレット理論とそのアプリケーションについて一通りの概要を提供することを意図している．

ウェーブレットの著しい特徴は，それが工学者，数学者，物理学者が生産的な方法で理解しあえるような領域であるということである．我々は,「お互いに聞くことが気の進まないようなこと」について行った Dyson の冷静な Gibb に関する講演 「失われた機会 (Missed Opportunities)」[Dy] を思い出す．ウェーブレット理論は Dyson の 「開かれた機会 (Open Opportunities)」のひとつとして見なされるだろう．我々はこの本がこの学際的な対話と協力に寄与することを望んでいる．

主題のあらましを示すために，ウェーブレットの歴史と前史について，さらにいくつかの注釈を加えたい．明確に，かつ包括的に歴史を述べることは，この序章と著者に可能な範囲を超えている．より歴史的な資料としては， [Me3], [D2], [RiVe] などの原典を参照されたい．ここでは，ウェーブレット理論の研究と応用の動機を明らかにすることだけをめざすことにしたい．特に，過去の成果を解釈するにあたり，明らかに後知恵であったり，またもとの研究では部分

的にしか表現されていなかったような部分にも注目する場合がある．

ウェーブレット理論の大きな長所のひとつは，工学や数学や物理学における多数の異なった研究を互いに接触させる役割をもっていることである．事実，ウェーブレット理論は，これら多くの領域における研究の自然な発展と見なすことができる．我々は，これらの研究の幾つかについて，やや詳しく説明したい．また，詳細に議論することはできないが，ウェーブレットを導いている別の方向についても注目してみたい．

正規直交ウェーブレットは，調和解析，偏微分方程式 (PDE)，Banach 空間論に現われる多くの重要な関数空間において無条件基底となる．そのような基底の構成法には，長い研究史があった．近代の Haar (1910), Walsh (1923), Franklin (1928), Pelcynski と Ciesielski による結果を含め，これらの研究の中には，ウェーブレット理論に直接的な影響を与えたものがある．1980 年代の Hardy 空間 H^1 における無条件基底の Carleson の構成法は，Meyer がウェーブレット理論に対して決定的な寄与をした数年前に，Strömberg (1981) ([St]) を正規直交スプラインウェーブレット基底の構成へと導いた．

スプライン理論もまた，長くて実りの多い歴史がある．例えばスプラインウェーブレット基底の進んだ構成法（[Chu1] に参照）におけるように，スプラインとウェーブレットの関係は現在まで続いている．これらの話題は，当然近似理論の広範な領域につながっている．近似理論とウェーブレットを関係づける最近の成果は，De Vore,Jawerth,Popov,de Boor,Ron([DeVJaP],[deetal]) らによるものである．

Coifman やその他の研究者 ([Coi], [L], [CoiWei]) の Hardy 空間 $H^p, 0 < p \leq 1$ における「原子分解（atomic decomposition）」理論は，ウェーブレット理論の発展に非常に強い影響を与え，前述の Carleson や Strömberg の研究とは別の動機づけとなった．この理論と「分子理論 (molecular theory)」（[CoiRo], [TWei] 参照) の一般化は，以下で議論するような滑らかな原子と滑らかな分子分解を導くこととなった．

ウェーブレット理論のもうひとつの直接的な先駆は， Weyl，von Neumann，Klauder らによるコヒーレント状態に関する数理物理学的研究であった．このアプローチは，我々の議論において重要な役割を演じている Gabor 理論を導いた．例えば [GrMoP] などの Grossmann, Morlet, Paul やその他の研究者による数理物理学における群表現に関連した研究は，Meyer の研究の直接的な動機となった．数理物理学からウェーブレット理論への初期の非常に重要な寄与として，Guy Battle [Ba] の研究も挙げなくてはならない．彼はくりこみ群の考え方を用いて正規直交ウェーブレットを構成した．また，非調和フーリエ級数の理論 [DuSc] は，ウェーブレットに対して重要なつながりがあると考えられる．

ここでは，これ以上列挙するのはやめて，ウェーブレットに至る 2 つの重要な発展の流れについて，より詳細な議論を行うことにしたい．第 1 のものは，フーリエとともに始まり Haar 関数を経由し Calderón の公式や関連する分解法に至る，調和解析の中にあるものである．第

2のものは，信号解析に対する時間-周波数と時間-スケール法の話題である．

0.2 フーリエからウェーブレットへ：ショートコース

熱方程式のような偏微分方程式（PDE）の研究から，フーリエ(1807)は $[0,1)$ における「一般的な」関数 f は，そのフーリエ級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ （現代の表記法による）によって表現することができると信じていた．すなわち，

$$\hat{f}(n)=\langle f(x),e^{2\pi inx}\rangle\equiv\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$$

(この式は，可算なデータ $\{\hat{f}(n):n\in\mathbb{Z}\}$ によって可算でないデータ $\{f(x):x\in[0,1)\}$ を置き換えている「データ圧縮」と見なすことができる.) 多くの美しい数学は，フーリエの信念を厳密化することに力を注いだ ([Z])．PDE に対するフーリエの発案の利点は，$(e^{2\pi inx})'=2\pi ine^{2\pi inx}$ すなわち複素指数関数が微分演算子の固有関数であることにある． この利点は， 行列を対角化する基底で行列演算を行うことと同じである．

実際，以下の内容も正しい．即ち，三角関数系 $\{e^{2\pi inx}:n\in\mathbb{Z}\}$ は， $L^2([0,1))$ 上で平行移動に不変なすべての演算子（平行移動不変演算子）を対角化する．これに対応したウェーブレットによる解析はこの本の第3部のテーマなので，ここではこの内容を厳密に述べておこう．T は $L^2([0,1))$ 上で有界な線形演算子とする．我々は話しを単純にするため，つまり T の領域を議論することを避けるため，有界性を仮定したが，結果は d/dx のような有界でない演算子に対しても成り立つ．$f\in L^2([0,1))$ としよう．すると

$$\begin{aligned}Tf(x) &= T\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(m)e^{2\pi im\cdot}\right)(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(m)T(e^{2\pi im\cdot})(x)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle T(e^{2\pi im\cdot})(y),e^{2\pi iny}\rangle e^{2\pi inx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(A\hat{f})(n)e^{2\pi inx}\end{aligned}$$

ここで，$a_{n,m}\equiv\langle T(e^{2\pi im\cdot})(y),e^{2\pi iny}\rangle$ に対して $(A\hat{f})(n)\equiv\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_{n,m}\hat{f}(m)$ である．それゆえに， $L^2([0,1))$ における T の挙動は，$\ell^2(\mathbb{Z})$ における無限行列 $A\equiv\{a_{n,m}:m,n\in\mathbb{Z}\}$ の挙動に等しい．

さて，T は平行移動不変 (translation invariant) とする．この概念を定義するために，g を $[0,1)$ における任意の関数としよう．gを周期1の $\mathbb{R}$ の関数へ周期的に拡張する．固定された任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\tau_t g(x)=g(x-t)$ によって平行移動を定義する．T の領域におけるすべての t とすべての g に対して $T(\tau_t g)=\tau_t(Tg)$，すなわち $T(g(\cdot-t))(x)=(Tg)(x-t)$ であるならば，T は平行移動不変 **(translation invariant)** (あるいはシフト不変 **(shift invariant)**)

である．固定した $m \in \mathbb{Z}$ に対し，以下のように書くことができる．

$$T(e^{2\pi i m \cdot})(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$$

そこで，仮定より

$$\begin{aligned} T(e^{2\pi i m(\cdot - t)})(x) &= T(e^{2\pi i m \cdot})(x - t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n(x-t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i n t} e^{2\pi i n x} \end{aligned}$$

一方，線形性により

$$T(e^{2\pi i m(\cdot - t)})(x) = e^{-2\pi i m t} T(e^{2\pi i m \cdot})(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i m t} e^{2\pi i n x}$$

フーリエ係数を等値とすると，$n \neq m$ ならば $c_n = 0$ となる．すなわち $T(e^{2\pi i m \cdot})(x) = c_m e^{2\pi i m x}$ である．それゆえ，T はフーリエの側からみると定数 c_m との積して作用し，T に対応する行列 A は $n \neq m$ であれば $a_{n,m} = \langle T(e^{2\pi i m \cdot})(y), e^{2\pi i n y} \rangle = 0$ であるので対角化する．これは，理論上も計算上も，ともに大きな利点である．

この単純な結果は，Calderón–Zygmund 演算子の現代的理論を導く調和解析の出発点である．線形，平行移動不変系（例：理想的増幅器）のインパルス応答が，K（$\hat{K}(m) = a_{m,m}$，$m \in \mathbb{Z}$）とのたたみ込みによって与えられる，ということは，信号解析の基本的事項である．それゆえに $K = K * \delta = T\delta$ のような $Tf = K * f$ は「インパルス応答」という語句がぴったりである．これは，調和解析の研究者と信号解析の研究者が異なった専門用語を経て同じ結果を知ったという，しばしば起きることの一例である．

フーリエ系には利点があるにもかかわらず，関数の局所解析にうまく用いることは難しい．すなわち，x と n の各々において $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i n x}dx$ かつ $|e^{2\pi i n x}| = 1$ なので，f の局所摂動はすべての係数 $\hat{f}(n)$ に著しく影響を与える．それゆえ，展開項で安心して無視できるものはない．例えば PDE における特異性やショック構成（ shock formation ）の研究の場合や，あるいは，画像全体を再現するために必要なデータのビット数のパーセンテージをできるだけ少なくして画像中の局所変化を表現する画像圧縮の場合などにおいては，効果的な局所解析が好まれる．

非周期的な構造を扱うためには和を積分に置き換える．フーリエ級数に関するこれらの注釈は，$\mathbb{R}^n$ におけるフーリエ変換にも適用される．$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \gamma}dx$$

によって定義される関数 $\hat{f}$ である．

1910 年に Haar [H] は，現在 Haar 系として知られている $L^2([0,1))$ に対する正規直交基底

を構成した．これは我々が今まさに述べた意味における局所解析である．Schauder (1928) は Haar 系が $p \geq 1$ において $L^p([0,1))$ 空間の基底であることを証明した．我々は，$L^2(\mathbb{R})$ 空間において 正規直交基底である Haar 系を定義しよう．$m,n \in \mathbb{Z}$ に対して I_{mn} は以下のような閉区間とする．

$$I_{mn} = [2^{-m}n, 2^{-m}(n+1)] \subseteq \mathbb{R}$$

そのような区間は **2 進区間**と呼ばれる．すべての 2 進区間の集合 $\{I_{mn} : m,n \in \mathbb{Z}\}$ は，ネスティング性（入れ子になった属性 **nesting property** ）を持つ．すなわちもし I_{mn} と I_{pq} のインターセクションの内部が空でないならば，$I_{mn} \subseteq I_{pq}$ あるいは $I_{pq} \subseteq I_{mn}$ である．$\mathbb{R}$ における **Haar 関数** $\{h_{m,n} : m,n \in \mathbb{Z}\}$ は，以下のように定義される．

$$h_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2}, & 2^{-m}n \leq x < 2^{-m}(n+1/2) \quad \text{の時} \\ -2^{m/2}, & 2^{-m}(n+1/2) \leq x < 2^{-m}(n+1) \quad \text{の時} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

各 $h_{m,n}$ は I_{mn}上でサポートされ $\|h_{m,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ である．$\{I_{mn}\}$ のネスティング性から，$\{h_{m,n}\}$ は直交集合であることは簡単にわかる．すなわち，もし $m = p$ かつ $n = q$でないなら

$$\langle h_{m,n}, h_{p,q} \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} h_{m,n}(x)\overline{h_{p,q}(x)}dx = 0$$

である．Haar 系 $\{h_{m,n} : m,n \in \mathbb{R}\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 空間において完備であり，それゆえ $L^2(\mathbb{R})$ における次の恒等式をえる．

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, h_{m,n} \rangle h_{m,n}$$

この展開は，もし f が I_{mn} において 0 ならば $\langle f, h_{m,n} \rangle = 0$ であるという意味で局所的である．さらに，$x \notin I_{mn}$ に対して $h_{m,n}(x) = 0$ であるから，x_0 点においては $x_0 \in I_{mn}$ となる $m,n \in \mathbb{Z}$ だけに注目すればよい．Haar 関数の欠点は，滑らかでなく，事実，連続でさえないことである．従って，PDE の研究に使用することは難しい．

いま $h \equiv h_{0,0}$とおくと，各 $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して $h_{m,n}(x) = 2^{m/2}h(2^m x - n)$ となることに注意されたい．これはウェーブレット基底の特徴的な構造である．すなわち，すべての基底の要素はウェーブレットと呼ばれるひとつの要素から平行移動と拡大，縮小によって得られる．それゆえに，Haar 系はウェーブレット基底の最も単純な例としてみなされており，h は **Haar ウェーブレット**として知られている．

ウェーブレット基底のその他の例は，古典的な（あるいは Shannon の）サンプリング定理と密接に関連した手法によって得ることができる．このサンプリング定理は，指数型の関数に対

する補間結果（ cardinal 級数）として，複素解析においても知られている．さて $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ を

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq |\gamma| \leq 1 \quad \text{の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．

$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して， $\varphi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\varphi(2^m x - n)$ としよう． $\{\varphi_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ 空間に対する正規直交基底であることは，例えば第 6 章をみてもわかるように，かなりわかりやすい． $2^{m-1} \leq |\gamma| \leq 2^m$ でないならば $\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma) = 0$ であるので，$\{\varphi_{m,n}\}$ は周波数域上でうまく局在化しているとみなされる．しかしながら，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}(2\cos \pi x - 1)$ であるから空間上ではそれほどうまく局在化していない．

Haar 関数は，空間上ではうまく局在するが， $|\gamma| \to \infty$ に対し $|\hat{h}_{m,n}(\gamma)| \approx |\gamma|^{-1}$ なので周波数域ではうまく局在しないという反対の特性を持っている．

最後の 2 例は基本的なジレンマを反映している．純粋なフーリエ基底は平行移動不変な線形演算子を対角化する．そこで，行列の要素が対角項から素早く減衰するという意味で演算子をほとんど対角化するために，基底が周波数域上でうまく局在化することを期待するのである．一方，我々は効果的な局所解析を行うために，基底を空間上でうまく局在化したいと思う．ところが，Haar あるいは関数 $(\varphi_{m,n})^\wedge$ を滑らかにすることによって，これら両方の要求を満たそうとしても，直交性を導いている（集合の要素が）互いに素であるサポート特性を破壊してしまう.（だが，同様の方針に沿ったアプローチを研究している第 5 章を参照）しかしさらに基本的には不確定性原理が，これらの要求を同時に満たそうとする際の障害になっている．古典的な不確定性原理の不等式（第 7 章参照）は，$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ である任意の $x_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$ と任意の $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して次のように述べている．すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\varphi(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} (\gamma - \gamma_0)^2 |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 d\gamma \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

である．

明らかに，この不等式における積分は，それぞれ， x_0 について φ の分散と，γ_0 について $\hat{\varphi}$ の分散を示している．それゆえに，この不等式は φ と $\hat{\varphi}$ が同時に任意にうまく局在することができないことを表わしている．上記の例の $\{h_{m,n}\}$ と $\{\varphi_{m,n}\}$ はこの事実に対応している．しかしながら，もし Schwartz 空間に属する $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$（すなわち，$\hat{\varphi} \in \varphi$ は無限に微分可能で，φ とそのすべての導関数は $\pm\infty$ においていかなる多項式の逆数より速く減衰する）を考えるなら，$\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ でもあるから，今までの例よりも良い同時局在化を得ることが可能である．

Calderón の公式 ([Ca1]) として知られる恒等式は，我々が考えている方向への一つのステップと考えることができる．Calderón の研究 (1964) 以後，彼の公式は多くの研究者，例えば [CTo], [ChF], [U] 等によって詳細に論じられてきた．Calderón の公式は $|x| > 1$ において $\varphi(x) = 0$

であるような偶実関数で $\int_0^\infty (\hat{\varphi}(t))^2 dt/t = 1$ を満足するような $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,「一般的な」 f が次のように表わせることを述べている.

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x-y)\varphi_t * f(y)dy\frac{dt}{t} \tag{1}$$

ここで，$\varphi_t(x) = (1/t)\varphi(x/t)$ は t による φ の拡大である．ここでは和ではなく積分を行う．式 (1) は，固定された $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の伸張 $\varphi_t(x-y)$ と「係数」 $\varphi_t * f(y)$ を用いた「線形結合」として fを表わしていると考えることができる．$\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であるから， f に対する空間-周波数領域での局在化公式となっている．

多くの状況において，特に計算に際して，離散和で表わされる恒等作用素を持つことが好まれる．式 (1) で $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上で適当に積分を分解することによって，$f(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} b_{m,n}(f)a_{m,n}(x)$ という形式の f の離散的な滑らかな原子分解を得ることができる．ここに各 $b_{m,n}(f)$ はスカラーであり，各 $a_{m,n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であり，かつ x が 2 進区間 I_{mn} の 3 つの組に含まれないならば $a_{m,n}(x) = 0$ である．(例えば [FrJaWei] 参照) $a_{m,n}$ は滑らかな原子と呼ばれている．

この方法や類似の分解法 (ウェーブレット分解を含む) のひとつの利点は，関数空間の特性が係数 $b_{m,n}(f)$ の大きさの特性にうまく反映されていることである．これは Littlewood-Paley-Stein の理論として知られている数学的研究の成果である．この分解法における基本的な問題は，族 $\{a_{m,n}\}$ は固定されていない，つまり f 毎に変化することである．それゆえ，この恒等作用素の表現だけでは線形演算子を表わす行列についてさえ話すことができない．

φ-変換の恒等作用素は，この難点を避けながら，時間-周波数局在化をうまく維持している ([FrJa1], [FrJa2], [FrJa3]) . Calderón の公式と古典的なサンプリング定理の離散式を使うことによって，ある $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して恒等作用素 $f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\langle f, \varphi_{m,n}\rangle\psi_{m,n}$ を得ることができる．ここに$\varphi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\varphi(2^m x - n)$ かつ $\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\psi(2^m x - n)$ である．それゆえ， $\{\varphi_{m,n}\}$ と $\{\psi_{m,n}\}$ は，関数 φ と ψ を平行移動，拡大縮小によって得られる固定された族である．$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であるからこれらは空間と周波数域上で同時に局在化しているとみなすことができる．

恒等作用素は，その表現によって決まる行列を演算子の研究に用いることができる．しかしながら，上記の列 $\{\psi_{m,n}\}$ は正規直交ではなく，実際は自明でない関係 $0 = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}\psi_{m,n}$ が可能である． $\{\psi_{m,n}\}$ におけるこの冗長性は，計算上の難点をもたらすことがある．たとえば， φ-変換の表現による恒等演算子の行列は，単位行列ではない．他方，双直交分解の長くて実りの多い発展と， φ-変換と比較することのできるさらに一般的なフレーム分解がある．さらに，非正規直交「調和振動 (harmonics)」(例えば [BeTe] を参照) によって最も効果的に解析された蝸牛 (かぎゅう) 殻過程のように，重なりあったフィルターバンクを持つ多くの物理系がある．

これで， $L^2(\mathbb{R})$ における正規直交基底 $\{\psi_{m,n}\}$ に関する Meyer の発見 [Me1] の段階に到達し

た．ここで $\{\psi_{m,n}\}$ は $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\psi(2^m x - n)$ である．これらの $\{\psi_{m,n}\}$ は Littlewood–Paley のウェーブレットとして知られている．これは，優れた空間-周波数局在性があり冗長性のない恒等作用素 $f = \sum_{m,n\in\mathbb{R}}\langle f, \psi_{m,n}\rangle\psi_{m,n}$ を生みだした．(Littlewood–Paley ウェーブレットの構成方法を含めこれらの考え方のさらに詳しい議論は，参照文献 [FrJaWei] にある．) この時点において，我々は，前にウェーブレットそのものの正しい歴史と呼んだものの始まりの点にたどりついた．さて，我々はもうひとつの視点からウェーブレットの前史にさかのぼり，考えていこうと思う．

0.3　信号処理における時間-周波数解析

ウェーブレット理論の重要さを示すもうひとつの見方は，信号解析に由来する．フーリエ解析者と信号解析者は共に，フーリエ変換変数 γ を周波数と考える．しかし，フーリエ解析者はもとの変数 x が位置を表わしていると考えるのに対して，信号解析者は信号 $f(x)$ に対する時間の変数とみなすことを好む．それゆえ，この節の「空間-周波数」という言葉は数学的に同じ意味の「時間-周波数」といいかえられる．ウェーブレット理論の出現に先だって，信号解析において，時間と周波数を同時に扱う手法の長い歴史があった．例として，Walsh 関数，短時間フーリエ変換 (STFT)，Gabor 分解法，およびクワドラチュアミラーフィルター (QMF) について言及する．

1922 年，Rademacher [R] は以下のような $[0,1)$ における関数の正規直交列 $\{r_m : m = 0,1,2,\ldots\}$ を定義した．$r_0 = h$ とすると Haar のウェーブレットとなる．$m > 0$ の場合，$x \in [0, 2^{-m})$ に対しては $r_m(x) = h(2^m x)$ とし，さらに $[0,1)$ に対しては周期 2^{-m} で周期的に r_m を拡大する．$[0,1)$ における **Walsh** 系 $\{w_m : m = 0,1,\ldots\}$ は，$w_0 = 1$ とし $m \geq 1$ に対して以下のように定義されている．

$$w_m = r_{m_1} r_{m_2} \ldots r_{m_k}$$

ここで $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ かつ $m = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_k}$ である．Walsh (1923) ([W]) は $\{w_m\}$ が $L^2([0,1))$ における正規直交基底であることを証明した．$\{\tau_n w_m : n \in \mathbb{Z}, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ が $L^2(R)$ の正規直交基底であるということはわかりやすい．ここに τ_n は n だけの移動を示す．

1900 年頃，チャンネルの「混線」を最小にするために，技術者は Walsh 系を基礎として信号の分配機構を設計した．Walsh 系は，今世紀の大部分において通信理論の中で適切な手段であり続けている（例えば [SchS] に参照）．

Walsh 系は好都合なことに，その要素の正負符号の変化の数に従って順序を決めることができる．たとえば，w_1, w_3, w_2, w_6 は，それぞれ 1 回, 2 回, 3 回, 4 回 と符号変化をする．応用に際してのゼロクロス（関数値が 0 を横切る）の重要性はよく知られており，そのような

Walsh 系の配列の順序決めは便利である．フーリエ系の周波数局在性と Haar 系の時間局在性は，対応する Walsh 系の「順序局在性」と比較することができる．ウェーブレット理論において， Haar 系が正規直交ウェーブレット基底の原型であるように，Walsh 系はウェーブレットパケット ([Coietal], [CoiMeWi]) の原型である．

短時間フーリエ変換 (STFT) は，与えられた信号の時間軸で局所的な周波数解析をするために開発された．g を $g = \mathbf{1}_{(T)}$ のような局在化された関数，ここで，$x \in [-T, T]$ では $\mathbf{1}_{(T)}(x) = 1$ でありその他では 0 であるような関数，としよう．そのような g は窓関数と呼ばれる．STFT は，

$$S_g f(\gamma) = (fg)^\wedge(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-2\pi i x\gamma}dx$$

によって定義される．それゆえスペクトルデータ $S_g f$ は，$[-T, T]$ に対する f の制限に関して周波数情報を与えている．$g = \tau_t \mathbf{1}_{(T)}$ の場合，

$$Sf(t, \gamma) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)\tau_t \mathbf{1}_{(T)}(x)e^{-2\pi i x\gamma}dx$$

と書かれる．

スペクトログラム $|Sf(t, \gamma)|^2$ は，振幅だけを論じることによって情報を失うにもかかわらず，信号解析における効果的なツールである．前後関係，経験，才能を使い，驚くべき正確さで $|Sf(t, \gamma)|^2$ から f を再構成できるスペクトログラムのすばらしい「読者」がいる．現代においては， 例えば [Co] のように，スペクトログラムはより洗練され，適応性の良い時間-周波数法に取ってかわられなければならない．

ペリオドグラムは密接に関連した概念である．それは最大エントロピー法のような高解像度法とともに，スペクトル評価における重要な技法であった (例えば [Pr] 参照)．適当に拘束された定常確率過程のサンプル関数 $f(\cdot, \alpha)$ が与えられたとき，

$$S_g f(\gamma, \alpha) = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x, \alpha)g(x)e^{-2\pi i x\gamma}dx \right|^2$$

を，過程 f とデータウィンドウ g に関するペリオドグラムという．f のパワースペクトルは，期待値 $P(t) = E\{f(t+x)\overline{f(x)}\}$ のフーリエ変換として定義される正の測度 S である．Bartlett と Tukey は，早くから，S を推定するための効果的なツールとして，ペリオドグラムの期待値を用いていた．その数学的基礎は，Wiener の一般調和解析までさかのぼる (1930)．([Be1, Chapter 2], [Wie] 参照)

Gabor [G] は，古典的な不確定性原理の不等式において分散の積を最小化するガウス関数の役割に注意して， 信号を，周波数変化や移動を伴うガウス関数の離散和として表現しようとした．与えられた信号 fを， その Gabor 分解によって理解しようとするとき，より適切な「調和 “harmonics”」によって，ガウス関数を置き換えることができることがわかった．Gabor 分解と様々な空間と不確定性原理の不等式に対する関連事項は，第 3 章と第 7 章の重要な内容で

あるので，ここでは詳細な内容には立ち入らない．

クワドラチュアミラーフィルタ (QMF) は，音声符号化問題を扱うために 1970 年代に導入された ([CroEGa], [CrWeFl], [EGa], [SmB]) ．定義の 1 例は，QMF $H \in L^2([0,1))$ が以下の式に対するフーリエ級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{H}(n)e^{2\pi in\gamma}$ であるというものである．

$$|H(\gamma)|^2 + |H(\gamma+1/2)|^2 = 2 \quad \text{a.e.}$$

このようなフィルターは，エイリアジングなしに伝達信号の完全な再構成ができるサブバンド符号化方式をもたらす ([Be2, 定義 78-定理 83], [SmB], [RiVe], [V], [VeHe]) ．QMF に類似した画像圧縮技法は，隣り合ったピクセルの冗長な画像の相関を取り除くために Burt と Adelson [BuA] (1983) によって定式化された Laplace-pyramid 符号である．多重スケール（マルチスケール）解析を扱う画像処理には類似の考え方がある（例えば [Ma] (1983) 参照）．

多重解像度解析 (MRA) において，これらの音声と画像処理の考え方と正規直交ウェーブレットの間には，密接な関係がある．第 1 章で詳細に論じられるように，MRA は $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間の列と，ある条件を満たすスケーリング関数φ からなる．**Meyer** のアルゴリズムは，任意に与えられた MRA から $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交ウェーブレット基底を構成するための手順である（例えば [Me2], [M] を参照）．この構成法において，あるフーリエ級数 H が生じる（例えば第 1 章参照）． $x \in [0,1)$ では $\varphi(x) = 1$ でありその他では 0 であるような MRA を，簡単に得ることができる．この例において，ウェーブレット基底は Haar 系であり $H(\gamma) = (1/\sqrt{2})(1 + e^{2\pi i\gamma})$ である．これが QMF であることは容易にわかる．

このように，各 MRA は QMF を定義しており，それゆえに，形式的に言えば，QMF の考え方は MRA より一般的である．しかし，Daubechies, Lemarié, Mallat, Meyer, 等々によって構成された MRA とウェーブレット基底は，滑らにするためや，異なった問題を解くために考案された点で，以前音声解析のために研究された QMF よりも実際には複雑である．このように，Walsh 関数， STFT ， Gabor 分解 および QMF は，大ざっぱに言って（例えば一般的な Gabor 表現も含めて)，ウェーブレット理論の先駆者と考えられる信号処理法の中に現われる数学的なツールである．

これまでの議論から分かるように，この本はウェーブレットと Gabor 理論及びそれらの応用に重点をおいている．ここで，これら 2 つの話題の関連性についてさらにいくつかのことを述べておきたい．これらは，1986 年から行われた Feichtinger と Gröchenig の研究に基づいている ([FeGrö]) ．ウェーブレット分解は次の形式であることを思い出そう．

$$f(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}(f)\psi_{m,n}(x) \tag{2}$$

ここで， $\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\psi(2^m x - n)$ である．**Gabor** (あるいはコヒーレント状態，**Weyl–**

Heisenberg) 分解は，次の形式である．

$$f(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} d_{m,n}(f)g_{m,n}(x) \tag{3}$$

ここで，$g_{m,n}(x) = e^{2\pi ixmb}g(x-na)$ である．ウェーブレットの場合の拡大縮小と平行移動は，局所的にコンパクトな 非可換アフィン群に関連する．Gabor の場合における周波数変調と平行移動は局所的にコンパクトな Heisenberg 群に関連する．局所コンパクト群は，調和解析における対称性と不変式の理解に基本的な役割を果たしている（例えば [HewRos] 参照）．

ウェーブレットとコヒーレント状態について，対称性よりむしろ分解を基本とした方法がある．例えば，(2) および (3) 式の両者で連続的な「オーバーサンプルした "oversampled"」バージョンは，次の形式で表現される．

$$f(t) = \int_G \theta_{x,w}(t)\Theta f(x,w)dxdw \tag{4}$$

ここで G は，Haar 測度 "$dxdw$" において基礎となる群であり，$\theta_{x,w}$ は $\psi_{m,n}$ あるいは $g_{m,n}$ に対応し，Θf は一般的には (1) に類似した分解時の係数に対応する内積である．もし G が対称性の少ない領域に置きかえられるならば，$\theta_{x,w}$ の選択により (4) 式は他の変換や分解とみなすことができる．信号を効果的に理解するには，ウェーブレットや Gabor 理論のタイルではなく，時間-周波数平面の別のタイル張りが必要かもしれない．それゆえに，群理論は，ウェーブレットと Gabor 理論を数学的に統一するだけでなく，応用のための新しい発展を示唆している．

0.4　各章の紹介

この本は 3 部からなる．第 1 部のタイトルは「数学的基礎」である．この部を構成している 5 つの章は，(広い意味において) 我々がウェーブレット理論の基礎とみなしている内容を整理している．これらの内容は，後に続く章の背景となる．

Robert Strichartz による第 1 章は，多重解像度解析の基礎理論と $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ における正規直交ウェーブレットの構成法を紹介している．その応用として，コンパクトサポートな正規直交ウェーブレットである Daubechies の構成法 [D1] が述べられている．Strichartz はまた，正規直交ウェーブレット係数を計算するための高速手法であるサブバンド符号化を議論している．この章における多重解像度解析の扱いの利点の一つは，通常の 2 進格子（grid）でなく格子（lattice）が可能な一般形式で述べられていることである．

Michael W. Frazier と Arun Kumar による第 2 章は，離散集合である整数 $\mathbb{Z}$ と，整数 N $\{0,1,\ldots,N-1\}$ を法とする $\mathbb{Z}_N$についての正規直交ウェーブレット理論の手引書である．この理論と Strichartz の章で議論されている連続理論との関係は，離散フーリエ変換 (DFT) と $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{R}^n$ における連続フーリエ変換との関係と同様である．この章は，離散的な場合に最

も強い関心を持っている技術者を念頭において書かれている．z-変換は，技術者が慣れ親しんでおり，有限でも無限でも，つまり $\mathbb{Z}_N$ でも $\mathbb{Z}$ でも，同時に処理することができるので，理論展開に用いられている．結果の理論的意味は強調されていないが，離散正規直交ウェーブレットを構成するためのアルゴリズムを導く筋道が示されている．離散ウェーブレット係数の高速の計算法（同様に信号の再構成法）は，フィルターバンクの数列を介して，最初から強調されている．多次元の場合は，最後に論述される．

John J. Benedetto と David Walnut による第 3 章は，フレームの一般的な理論の紹介と，Gabor フレーム分解を特に扱っている．Gabor あるいはコヒーレント状態理論は，周波数変調 (modulations) と平行移動 (translations) に基づくが，一方，ウェーブレット分解は拡大縮小と平行移動を基礎にしている．L^2 における古典的な Gabor 理論の解説に加えて，第 3 章では L^1 と Sobolev 空間に対する Gabor 分解とその一般化に関する著者の理論を展開させている．この章のもうひとつの特徴は，移動のみで構成されているフレームの研究である．

各多重解像度解析は，その係数 $\hat{H}(n)$ が QMF のフーリエ係数であるような「伸張方程式 (dilation equation)」 $f(t) = \sum_n \hat{H}(n) f(2t-n)$ の， L^2 解を決定する．伸張方程式の理論は，解析したり滑らかさなど予め定められた性質を満たす正規直交ウェーブレット基底を構成したりする場合の本質的な要素である．第 4 章において，David Colella と Christopher Heil は彼等自身の結果を同じ分野の他の研究者の結果と関連させて，この理論を詳しく紹介している．また，この分野でさらに進んだ研究をするために必要な代数的ツールと解析的ツールが紹介されている．

最近，$\mathbb{R}$ 上で正規直交基底を与える窓フーリエ変換について 2 つの新理論が開発された．Wilson 基底は Gabor フレームの一種である．それらの構成法は，Daubechies，Jaffard，Journé [DJJou] によって単純化された．局所サイン，コサイン基底，あるいは Malvar 基底は，Malvar および Coifman と Meyer によって別々に開発された．Pascal Auscher による第 5 章は，[DJJou] の主要な結果である Wilson 基底の新しい特徴から始まっている．結果として，コンパクトサポートな Wilson 基底の例が得られている．Malvar 基底を簡単に紹介した後，局所フーリエ基底の一般的な概念が紹介されている．Auscher は，これが統一された枠組みとなることを示す．これは極性の特別な選択に対して Wilson と Malvar 基底となる．また，Meyer の Littlewood–Paley ウェーブレットもまた局所フーリエ基底から作ることができる．

「数学的基礎」に続くこの本の第 2 部は，信号処理に関連した話題を取り扱う．第 2 部の最初の記述である Michael W. Frazier と Rodolfo Torres による第 6 章は，サンプリング理論の導入である．それは，「B-横断 "B-transversal'」集合に対する Shannon のサンプリング定理の一般的な内容から始まる．これは，φ-変換の恒等作用素と，ウェーブレット $(\sin \pi x)(2\cos \pi x - 1)/(\pi x)$ について以前に注意した単純な正規直交ウェーブレット基底「 Shannon 基底」を導く．これらの様々な結果は，$\mathbb{R}$ と単位円 $\mathbb{T}$ の連続的な集合と，$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_N$ の離散的な集合において与えら

れる．

John J. Benedetto による第 7 章は，サンプリング公式と不確定性原理の不等式の間の自然な関係を研究する．サンプリング公式はフレーム分解法に関してである．不確定性原理の不等式は，問題の情報平面に最も効果的にタイル張りすることで生じる．サンプリングの結果は，局所的なサンプリングと同様に，規則的，及び不規則的な空間データの両方を取り扱う．不確定性原理の不等式は，古典的な（Heisenberg の）不確定性原理の不等式を一般化した様々な場合で取り扱われる．L^2 フレームの結論は，第 3 章で与えられたフレームの一般 Hilbert 空間論を越えた内容が必要とされる．

Hans Feichtinger と Karl-Heinz Gröchenig は，第 8 章において不規則サンプリングとその内容の具体化に関する彼等の理論を扱う．不規則サンプリングは活発に研究されている分野であり，平行する多くの発展があった．著者の手法は，重みつきフレームといわゆる適応重み法と呼ばれている手法をふくむ，かれらが開発した解析的な考えに基づいている．かれらの局所平均を用いた再構成公式は，不確定性原理に関連する影響と，ポイントワイズのサンプリング測度を作るときの技術的な限界をある程度回避している．第 8 章では，著者の理論から得られたアルゴリズムを数値的に具体化する点も重要である．

第 9 章では，確率と統計におけるウェーブレットの役割に関して，Christian Houdré が 3 つの問題を論じる．これらの問題は，理論的な信号処理において重要であるだけでなく，確率とウェーブレット理論の両方に新しい結果を与えている．第一に，ある過程の弱定常性や類似の性質が，ウェーブレット変換によって特徴づけられている．Wiener の Tauberian 定理が，証明において本質的である．第二に，Houdré は定常な帯域制限過程に対する不規則なサンプリング理論を紹介している．第三に，彼は媒介変数のない統計量に対してウェーブレットの手法を適用するための基本的な考え方を紹介している．Bessel 数列やフレームの新しい特徴を含めて，多くの関連成果がある．

Ronald Coifman と Victor Wickerhauser による第 10 章の主題は，計算効率と有意義な信号表現の間にある基本的な関係である．著者は，データ圧縮とパターン抽出の文脈のなかで，適合ウェーブレット変換 (AWT) 法を用いてこの関係を確立した．AWT 法は，高速計算アルゴリズムばかりでなく，ウェーブレット，ウェーブレットパケット，そして窓つき三角関数波形のような，正規直交基底の集合を作ることができる．

データが与えられたとき，まずそのデータの処理に適当な基底を選ぶことを考えよう．そのような様々な基底のライブラリーが作られ，窓つき三角関数の波形やウェーブレットパケットも集められている．著者はウェーブレット解析が窓つきフーリエ空間に対応することを示している．これらのライブラリーを使うと，最適な基底，ノイズ除去，圧縮問題を扱うための相空間解析が可能である．最後に，多次元問題が言及される．

この本の第 2 部は，Chia-chang Hsiao, Björn Jawerth, Bradley Lucier, そして Xiangming

Yu による第 11 章で終わる．ここではウェーブレット基底による圧縮に関する数学的な面を扱う．これは，工学的問題が，理論，応用の両面で重要な数学理論を生んだ良い例でもある．圧縮の基本的な問題は，信号あるいは画像を少ないデータ量で可能なかぎり近似することである．圧縮は信号処理において非常に重要である．ウェーブレットは，自然かつ経験的に見込みのあるアプローチである．関数空間論は，近似の精度を正確に測定することができる，数学的な枠組みを与える．幸にしてほとんどの通常の関数空間は，Littlewood–Paley 理論によるウェーブレット展開によって，明確に特徴づけられる．これによって，振幅に基づいて係数を選択するという単純で実際的な方法が，ほぼ最適な圧縮率を与えるということを示すことができる．ある近似率をもった関数の特性が論じられる．同様にウェーブレット基底で行列を用いて線形演算子を圧縮するための方法も論じられている．これらの論点は Banach 空間で L^p と ℓ^p を比較する古典的な問題に関連している．

この本の第 3 部は，ウェーブレット理論と PDE における演算子の研究の自然なつながりを扱う．歴史的に，このつながりには Littlewood–Paley 理論と Calderón–Zygmund 演算子の強い関係が反映している．ウェーブレット解析は， Littlewood–Paley 理論の特に明確かつ有効な定式化と見ることができる．すなわち，ウェーブレット解析は Calderón–Zygmund の旧来の演算子解析に対する直接の理論的ツールである．さらに，ウェーブレットは非常に単純で明白なので，深い理論的洞察を通して有効な数値計算手法となった．このプロトタイプは Beylkin, Coifman， Rokhlin [Beyetal] による突破口的業績である．彼等は PDE で用いる積分演算子がウェーブレット座標では疎行列で表現され，高速計算に向いていることを示した．

第 12 章において，Gregory Beylkin は区間 $[0,1]$ における二次元二点 Dirichlet 境界条件微分方程式を検討する．彼は， [Beyetal] のように対応する積分方程式に対してではなく方程式の離散化に直接，ウェーブレット解析を適用した．これは疎行列 A を用いて微分方程式を線形代数系に変換する．しかしながら，A の条件数は，離散化における点の数 N にともなって急速に増える．これは計算の不安定性をまねく．標準的なプレコンディショニング行列を適用すれば， 条件数が $O(N)$ の問題は緩和できる． Beylkin は，ウェーブレットを用いた明解な計算方法を用意した．それは対角行列でプレコンディショニングした後も，有界で N に独立な条件数を持つ．この方法は，関連する行列のスパース性を保っており， $O(N)$ ステップ内で Green 関数 (解演算子 solution operator) の計算を可能にしている．

第 13 章において，Stephane Jaffard は適切に選ばれた正規直交ウェーブレット基底が非線形現象のきわめて局所的な解析に用いることができることを示した．例えば，仮に関数 f が Hölder 条件を局所的に満足したとする．するとそのウェーブレット係数を，平均値と見なすことが可能，かつ Tauber 条件を保持したものとして十分に高精度で推定できる．そして，それらは本質的に Hölder 性を特徴づけるものになっている．そのような技法の拡張によって，楕円形演算子の特定点上での成立性に関する結果が得られると共に，種々の Sobolev 空間上の点で

の特異性を特徴づける結果も得られる．Jaffard の解析は，乱流において生じる可能性があるマルチフラクタル関数の構成方法やある種の非線形偏微分方程式を解くために使用可能な非線形量のウェーブレット分解方法を与える

第 14 章では， Frédéric Heurtaux, Fabrice Planchon, Victor Wickerhauser が乱流に関連した複雑さについて考察している．乱流の挙動を特徴づけているのは，エネルギーが大きな波長から小さな波長までカスケードすることである．乱流中には，大きなスケールの速度場から小さなスケールの渦活動まであるが，カスケードの正確な記述は，与えられたスケールでのエネルギーという言葉に有意味な定義を与えるという基本的な問題を伴う．著者は，エネルギーに関する古典的なフーリエ波数の解釈を，ウェーブレットによるもので置き換える．この新しいアイデアを使って，彼等は時間発展している乱流における，スケール間のエネルギー移動の問題を述べている．Burgers の一次元発展方程式はこの章において数値的に研究されている． Burgers 方程式の解のウェーブレット分解は，小さいスケールのウェーブレットが時間発展と共に特異点へ近づいていくにつれ，いかにしてエネルギーを集めていくかを示す．解析は，正確な解析解が得られない他の重要なケースにまで拡張される．この章のテーマはそれらの例やアルゴリズムと共に，そのような適応アルゴリズムを使って流体力学問題の数値解法を改良することである．

Lars Andersson, Björn Jawerth, Marius Mitrea による第 15 章においては，ウェーブレットの手法が Cauchy の特異積分演算子 (CSIO) の L^2 有界性を証明するために用いられる．この結果は，2 層ポテンシャルを使って， $\mathbb{R}^n$ 空間における Lipschitz 領域の Laplacian に対する Dirichlet 問題を解くことに用いることができる．1 次元における Lipschitz 曲線上の L^2 有界性は， Calderón [Ca2] と Coifman, McIntosh, と Meyer [CoiMcMe] による有名な結果である．近年，Haar のウェーブレットを使ってこの結果の非常に簡単な証明が Coifman, Jones, 及び Semmes [CoiJoSe] によってなされた． Anderson, Jawerth, 及び Mitrea は，複素多次元空間においてある役割を担う 2^n次元の Clifford 代数 $\mathbb{R}_{(n)}$ に値を持つ演算子に対し，有界性を得ることによって，n 次元における L^2 有界性を証明した．Clifford 解析，例えば Cauchy の積分公式の Clifford 版は， [CoiJoSe] の中で同様の手法を用いて論じられている．特に，彼らは $\mathbb{R}$ 空間の Haar 系に類似した Clifford 値を取るウェーブレットの集合を作った．その証明は Littlewood–Paley の理論のやり方に従っている．この章は，精密化された Littlewood–Paley の技法（この場合はウェーブレットであるが）を用いた一連の解説の，もうひとつの流れとみなせるが古典的な Calderón–Zygmund フレームワークに関係していても必ずしもそのものではない．

Richard Rochberg による最終章（第 16 章）は，演算子の解析において分解定理を適用するための手法の一般論を紹介する．これは，正規直交ウェーブレットの表現だけでなく (1) のような連続，あるいは非直交分解を含む．演算子の研究にこれらの結果を利用する一つの方法は，

与えられた関数 f を分解し， f を構成する小部分に対する演算子のふるまいを検討することである．Rochberg はこの手法を，ある一般化された微分演算子の特異値における Cwikel の成果に適用する．2 番目のアプローチは演算子それ自体の分解である．この手法は， Schrödinger 演算子に対する固有値の推定値を得るために用いられる．さらに，これらのタイプのアプローチは， Calderón–Toeplitz 演算子と呼ばれるクラスに対する理論の拡張へと導く． Rochberg の章の興味深い点は，どのようにして，複雑な演算子を，ウェーブレット分解を用いて得られる比較的単純な演算子によって理解できるかという点である．

これらの章は，ウェーブレット理論と演算子解析， PDE ，サンプリング理論，信号解析，確率と統計，そして数値解析のような話題の間の，強い相互関係を示している．これらのつながりの深さと多様さは，ウェーブレット理論の豊かさと活気のあらわれである．我々はこの本がウェーブレット解析とその応用が有望な領域へ近づく第一歩となることを望んでいる．

参考文献

[Ba] G. Battle. 1987. "A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions," *Commun. Math. Phys.* **110**: 601–615.

[Be1] J. Benedetto. 1975. *Spectral Synthesis*, New York: Academic Press.

[Be2] J. Benedetto. 1992. "Irregular sampling and frames," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 445–507.

[BeTe] J. Benedetto and A. Teolis. 1993. "A wavelet auditory model and data compression," *Appl. Comp. Harmonic Analysis*, to appear.

[Beyetal] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. 1991. "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I," *Commun. Pure and Appl. Math.* **44**: 141–183.

[Bo] E. Bombieri. 1992. "Prime territory,"' *The Sciences*, Sept./Oct., 30–36.

[BuA] P.J. Burt and E.H. Adelson. 1983. "The Laplacian pyramid as a compact image code," *IEEE Trans. Commun.* **31**: 532–540.

[C1] A.P. Calderón. 1964. "Intermediate spaces and interpolation, the complex method," *Studia Math.* **24**: 113–190.

[C2] A.P. Calderón. 1977. "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **74**: 1324–1327.

[CTo] A.P. Calderón and A. Torchinsky. 1975 & 1977. "Parabolic maximal functions associated with a distribution I, II," *Adv. Math.* **16**: 1–64 and **24**: 101–171.

[ChF] S.-Y.A. Chang and R. Fefferman. 1980. "A continuous version of duality of H^1 and BMO on the bidisc," *Ann. Math.* **112**: 179–201.

[Chu1] C.K. Chui. 1992. *An Introduction to Wavelets*, New York: Academic Press.

[Chu2] C.K. Chui (ed.). 1992. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, New York: Academic Press.

[Co] L. Cohen. 1989. "Time-frequency distributions—a review," *Proc. IEEE* **77**: 941–981.

[Coi] R. Coifman. 1974. "A real variable characterization of H^p," *Studia Math.* **51**: 269–274.

[CoiJoSe] R. Coifman, P. Jones, and S. Semmes. 1989. "Two elementary proofs of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz curves," *J. A.M.S.* **2**: 553–564.

[CoiMcMe] R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer. 1982. "L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes," *Ann. Math.* **116**: 361–387.

[CoiMe] R. Coifman and Y. Meyer. 1991. "Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre," *C. R. Acad. Sci.*, sér. 1 **312** 259–261.

[Coietal] R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, and M. Wickerhauser. 1990. "Signal processing and compression with wavelet packets," Numerical Algorithms Research Group, Yale University.

[CoiMeWi] R. Coifman, Y. Meyer, and M. Wickerhauser. 1992. "Wavelet analysis and signal processing," in *Wavelets and Their Applications*, Ruskai et al., eds., Boston: Jones and Bartlett, pp. 153–178.

[CoiRo] R. Coifman and R. Rochberg. 1980. "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p," *Astérisque* **77**: 11–66.

[CoiWei] R. Coifman and G. Weiss. 1977. "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis," *Bull. Amer. Math. Soc.* **83**: 569–645.

[ComGrTc] J.M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian (eds.). 1989. *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, Proc. Int. Conf., Marseille, Dec. 1987, Berlin: Springer-Verlag,

[CrWeFl] R. Crochiere, S. Weber, and J. Flanagan. 1976. "Digital coding of speech in subbands," *Bell System Tech. J.* **55**(Oct.): 1069–1085.

[CroEGa] A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand. 1976. "Perfect channel splitting by use of interpolation, decimation, tree decomposition techniques," Int. Conf. Information Sciences/Systems, Patras, August, pp. 443–446.

[D1] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[D2] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[DJJou] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journé. 1991. "A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 554–572.

[Da] G. David. 1991. *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces*, Lect. Notes Math. **1465**, Berlin: Springer-Verlag.

[deetal] C. de Boor, R. DeVore, and A. Ron. 1991. "Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$," CM-TSR University of Wisconsin-Madison 92-2, pp. 1–20.

[DeVJaP] R. DeVore, B. Jawerth, and V. Popov. 1992. "Compression of wavelet decompositions," *Amer. J. Math.* **114**: 737–785.

[DuSc] R. Duffin and A. Schaeffer. 1952. "A class of nonharmonic Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**: 341–366.

[Dy] F. Dyson. 1972. "Missed opportunities," *Bull. Amer. Math. Soc.* **78**: 635–652.

[EGa] D. Esteban and C. Galand. 1977. "Applications of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes," *Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, Hartford, CT (May 1977), pp. 191–195.

[FeGrö] H. Feichtinger and K. Gröchenig. 1989. "Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions I," *J. Funct. Anal.* **86**: 307–340.

[FrJa1] M. Frazier and B. Jawerth. 1985. "Decomposition of Besov spaces," *Indiana Univ. Math. J.* **34**: 777–799.

[FrJa2] M. Frazier and B. Jawerth. 1988. "The φ-transform and applications to distribution

spaces," in *Function Spaces and Applications*, M. Cwikel et al., eds., Lect. Notes Math. **1302** Berlin: Springer-Verlag, pp. 223–246.

[FrJa3] M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transform and decompositions of distribution spaces," *J. Funct. Anal.* **93**: 34–170.

[FrJaWei] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss. 1991. *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS Conf. Lect. Notes **79**, Providence: Amer. Math. Soc.

[G] D. Gabor. 1946. "Theory of communication," *J. IEE (London)* **93**: 429–457.

[GrMoP] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. 1985 & 1986. "Transforms associated to square integrable group representations I. General results," *J. Math. Phys.* **26**: 2473–2479; "II. Examples," *Ann. Inst. Henri Poincaré* **45**: 293–309.

[H] A. Haar. 1910. "Zur theorie der orthogonalen Funktionensysteme," *Math. Ann.* **69**: 331–371.

[HewRos] E. Hewitt and K. Ross. 1963. *Abstract Harmonic Analysis*, Berlin: Springer-Verlag.

[L] R.H. Latter. 1978. "A decomposition of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms," *Studia Math.* **62**: 92–101.

[Le] P.G. Lemarié (ed.). 1990. *Les ondelettes en 1989*, Lect. Notes Math. **1438**, Berlin: Springer-Verlag.

[LeMe] P.G. Lemarié and Y. Meyer. 1986. "Ondelettes et bases hilbertiennes," *Rev. Mat. Iberoamericana* **2**: 1–18.

[M] S. Mallat. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–87.

[Ma] D. Marr. 1982. *Vision*, New York: Freeman.

[Me1] Y. Meyer. 1985–1986. "Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et albgèbres d'opérateu " *Séminaire Bourbaki* **662**: 1–15.

[Me2] Y. Meyer. 1987. "Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées," *Rapport Ceremade* **8703**.

[Me3] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, Paris: Hermann.

[Pr] M. Priestley. 1981. *Spectral Analysis and Time Series*, New York: Academic Press.

[R] H. Rademacher. 1922. "Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonal-funktionen, " *Math. Ann.* **87**: 112–138.

[RiVe] O. Rioul and M. Vetterli. 1991. "Wavelets and signal processing," *IEEE Signal Process. Mag.* October: 14–38.

[Ruetal] M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael (eds.). 1992. *Wavelets and Their Applications*, Boston: Jones and Bartlett.

[SchS] H. Schreiber and G. Sandy (eds.). 1974. *Applications of Walsh Functions and Sequency Theory*, New York: IEEE.

[SmB] M. Smith and T. Barnwell. 1986. "Exact reconstruction for tree-structured subband codes," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **34**: 434–441.

[St] J.-O. Strömberg. 1983. "A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces," in *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund II*, Beckner et al., eds., Belmont, CA: Wadsworth, pp. 475–494.

[TWei] M. Taibleson and G. Weiss. 1980. "The molecular characterization of certain Hardy spaces," *Astérisque* **77**: 67–149.

[U] A. Uchiyama. 1982. "A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition of

BMO ($\mathbb{R}^n$)," *Acta Math.* **148**: 215–241.

[V] P. Vaidyanathan. 1990. "Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial," *Proc. IEEE* **78**: 56–93.

[VeHe] M. Vetterli and C. Herley. 1992. "Wavelets and filter banks: theory and design," *IEEE Trans. Signal Processing* **40**: 2207–2232.

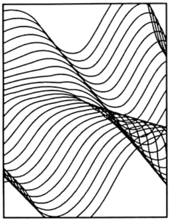
[W] J. Walsh. 1923. "A closed set of normal orthogonal functions," *Amer. J. Math.* **45**: 5–24.

[Wie] N. Wiener. 1981. *Collected Works*, P. Masani, ed., Cambridge, MA: MIT Press.

[Z] A. Zygmund. 1959. *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge Univ. Press.

第 1 部

数学的基礎



第1章　正規直交ウェーブレットの構成

Robert S. Strichartz

【概要】 ここでは，多重解像度解析と $\mathbb{R}^n$空間における正規直交ウェーブレット基底の構成方法について，Meyer と Mallat が提唱した基礎理論を完結した形で記述する．実際には，$\mathbb{R}^n$空間における任意の格子と，この格子を保存して真に拡大する行列を使って，より一般的な形で述べる．これに関してもっともよく知られた例は，単位行列の 2 倍に等しい行列をもつ整数格子 $\mathbb{Z}^n$ である．この一般理論は，Daubechies のコンパクトサポートなウェーブレットを構成する際に用いられている．また，ウェーブレット係数の計算や，これらの係数値から関数を再構成する際の効率的なアルゴリズムを与えるサブバンドコーディングについても述べる．

1.1　はじめに

我々の目的は，正規直交ウェーブレットと多重解像度解析の基本的な定理と，コンパクトサポートウェーブレットの構成法を述べることである．なぜそのようなことをするのかを説明し，全ての定義と多くの証明を行って一貫した説明を与える．これは決して完全な記述ではないが，この問題の「なぜ」「何が」「どのようにして」ということを素早く知りたいと思っている読者には，役に立つであろう．我々は，多重解像度解析の理論を，ウェーブレットを構成するために実際に必要なものよりも，やや一般的な形式で述べる．なぜならば，この一般的な形式が現在急速に発展している方向であるように思われるからである．ここで記述する内容が誰に属するものであるのかをいちいち述べることはしない．ただ，これらの内容の中で私の寄与になるものは何もないことは明記しておく．ここで扱う内容に関してより詳細な説明は，[Retal] [C1] [C2] [D2] [FJaW] あるいは [M] を参照されたい．この論文は主として一次元の理論に関して述べており，短縮版が，“How to make wavelets” [St] というタイトルで “American Mathematical Monthly” に発表される予定である．

正規直交ウェーブレット展開は，フーリエ級数や，その他の古典的な展開を改善するための試みである．ここで我々が論じる改善がどのようなものかを説明するために，簡単な例を挙げ

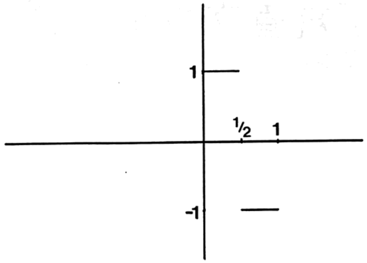


図 1.1　Haar 関数の生成元のグラフ

ておこう．区間 [0,1] における実関数 $f(x)$ を考える．フーリエ級数による展開は

$$f(x) = b_0 + \sum_{1}^{\infty}(b_k \cos 2\pi kx + a_k \sin 2\pi kx) \tag{1.1}$$

あるいは，Haar 関数級数により以下のように展開される．

$$f(x) = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk}\psi(2^j x - k) \tag{1.2}$$

ここで， $\psi(x)$ は以下のように定義される関数である．(図 1.1 参照のこと)

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{1.3}$$

これらの二つの級数は， $L^2(0,1)$ における直交関数を使った展開例である．それゆえに，係数は簡単な式で求められる．(練習：$\{\psi(2^j x - k)\}$ は直交であるが，正規化されていないことを示せ.）しかし，フーリエ級数は空間上ではうまく局在していない．仮に，小区間 $[a,b]$ における $f(x)$ のふるまいを調べたいとしても，すべてのフーリエ係数が必然的に必要となる．一方，Haar 級数は，大変うまく局在している．というのは，小区間 $[a,b]$ に限定して注目してみると，$[a,b]$ と交わる区間 (Haar 級数の場合は) $I_{jk} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ （関数 $\psi(2^j x - k)$ のサポート）について (1.2) 式のインデックス j,k の和をとるだけでよい．

さらに Haar 級数の部分和を ($0 \le j \le N$ の範囲で) 求めると，明らかに，2^{-N} のオーダーかあるいはそれより良い精度で f の近似値が求められる．空間上での局在とスケーリングというこれら二つの性質は，ウェーブレット展開の特徴となるものである．それに加えて，Haar 関数は 2 進伸張と整数の平行移動によって一つの関数 φ から作られている．これらの性質と本質的に同じ属性は，我々がこれから議論しようとしているすべてのウェーブレット基底にも成り立

ち，実際，ウェーブレット展開の近似的な定義としても用いられる．

我々が組み立てようとしているウェーブレット展開は，Haar 級数の一般論と考えることができる．またその中で，関数φはより滑らかな関数によって置き換えられる．これらの関数に必要な性質は何であるのか，またどのようにすればこれらの関数を構成できるかを正確に述べるが，その前に Haar 関数ではどのようになっているのかを，正確に見ておくことは役に立つはずである．また，実数全体を関数の定義域と考えることも，よりわかりやすくなるであろう．

1.2 Haar ウェーブレットの概略

まず，単位区間 $[0,1]$ の特性関数φ から始める．確かにこれは誰もが想像することのできる最も単純な関数の一つであるが，実は次の二つの重要な性質を持っているために選ばれている．

1. 整数によるφ の平行移動，すなわち$\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ は，$L^2(\mathbb{R})$ 空間における正規直交系をなす．

2. φは自己相似 な関数である．φ の図を半分に分割しても，各半分を用いて復活させることができる．この性質は，スケーリング恒等作用素によって代数的に表現することができる．

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) \tag{1.4}$$

φ をスケーリング関数と呼ぶことにする.（フランスの文献では，時折 φ を「le père」（父の意），ψを「la mère」（母の意）と呼んでいるが，これは人間の再生に対するひどい誤解である．ウェーブレットの生成は，むしろ，アメーバの繁殖のライフスタイルに，ずっと似ている.）スケーリング恒等作用素は，定数倍を除いて本質的に φ を決定する（練習）．スケーリング恒等作用素の重要性は，以下のとおりである．V_0 を，関数$\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$によって張られる線形空間（記号で表すと$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\varphi(x-k)$,$\sum |a_k|^2 < \infty$と表される関数全体）を示すとする．関数 $\varphi(x-k)$ は V_0 における正規直交基底なので，これは上記の **(1)** の観点からみると自然な空間である．もちろん V_0 は L^2全体ではなく，$\mathbb{Z}$において不連続にジャンプする区分的定数関数の部分空間である．再スケーリングをすることによって，我々はさらに大きい空間を得ることができる．V_0 が，半分の整数値 $k/2, k \in \mathbb{Z}$ の格子を示し，V_1が，$1/2\mathbb{Z}$ において不連続にジャンプする区分的定数関数の L^2の部分空間を示すとする．$f(2x) \in V_1$と $f(x) \in V_0$が同値であるということは明らかである．関数 $2^{1/2}\varphi(2x-k)$ は V_1に対する正規直交基底を生成する（因子 $2^{1/2}$ は $\|2^{1/2}\varphi(2x-k)\|_2 = 1$ を保つよう正規化するために使われる）．スケーリング恒等作用素 (1.4)，あるいは次式のように (1.4) 式を平行移動した等式から，明らかに V_0 の基底は V_1 の基底の線形結合として表現されるので，$V_0 \subseteq V_1$である．

$$\varphi(x-k) = (2x-2k) + \varphi(2x-2k-1) \tag{1.4$'$}$$

(もちろん，$V_0 \subseteq V_1$ の包含関係は空間 V_0 と V_1 の元の不連続点の位置を考えれば明らかである．しかし，後で一般化的に論じるときには，このような単純な性格づけは期待できない．しかしその場合でも，スケーリング恒等作用素は存在する．)

以上の話全体は，2進のスケールの上下によって繰り返すことができる．その結果部分空間 V_jは $j \in \mathbb{Z}$ について増大列 (increasing sequence) となる．ここで V_j は $2^{-j}\mathbb{Z}$ で不連続点をもつ2乗可積分な区分的定数関数 (piecewise-constant L^2 functions) から構成される．関数 $2^{j/2}\varphi(2^j x-k)$ は，$k \in \mathbb{Z}$ について V_j の正規直交基底をなす．我々は再スケーリングによって，空間 V_j の間を行ったり来たりすることができる． $f(2^{k-j}x) \in V_k$と $f(x) \in V_j$ は同値であり，適当に再スケーリングしたスケーリング恒等作用素 (1.4) を用いると，$j \leq k$ ならば $V_j \subseteq V_k$ を示すことができる．数列 $\{V_j\}$ は**多重解像度解析**と呼ばれるものの例である．$\{V_j\}$ には他に二つの重要な属性がある．すなわち，

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{1.5}$$

及び，

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \quad \text{は} \quad L^2\text{において稠密} \tag{1.6}$$

である（練習）．(1.6) 式を見ると，V_j のすべての正規直交基底 $\{2^{j/2}\varphi(2^j x-k)\}$ を合わせると，$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底の一つになると考えたくなるかもしれない．しかし， $V_j \subseteq V_{j+1}$ ではあっても， V_j に対する正規直交基底 $\{2^{j/2}\varphi(2^j x-k)\}$ は， V_{j+1} に対する正規直交基底 $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x-k)\}$ には含まれない．(実際，二つの正規直交基底の中に，互いに直交しない要素がある．) そのため， $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を得ようとしてもこのままではうまくいかない．どうすればよいであろうか？

思い描いていた考えに戻ろう．$V_0 \subseteq V_1$ であり，かつ $\{\varphi(x-k)\}$ は V_0 の正規直交基底をなしている．そこで，ある関数 ψ を用いて得られる $\{\psi(x-k)\}$ の形の関数を付け加えて V_1 の正規直交基底を完成する案はどうであろうか？ これは， V_1 の中で V_0 の直交補空間を張る正規直交基底で，要求された形を持つものを探すことと同じである．この直交補空間を W_0 とすると， $V_1 = V_0 \oplus W_0$ である（ Hilbert 空間の直和）．

答えは簡単である． ψ をまさしく 1.1 節において定義されている Haar 関数生成元であるとしよう． ψ は次式のように φ で表せることに注意しよう．

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) \tag{1.7}$$

これは，スケーリング恒等作用素にとても似ている．(演習： $\{\psi(x-k)\}$ が W_0 に対する正規直交基底をなしていることを示せ．) さて，ここでわれわれは空間 W_0 の再スケーリングをする

ことができる．そこで，

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{1.8}$$

そして $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は W_j に対する正規直交基底である．もし (1.5)，(1.6)，(1.7) の条件を組み合わせるならば，次式を得る．

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \tag{1.9}$$

空間 W_j はすべて互いに直交するので， W_j のすべての正規直交基底は $L^2(\mathbb{R})$ に対する一つの重要な正規直交基底 $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}}$ に結び付けることができる．これは以前の初歩的な試みを洗練したものとなっている．(唯一の違いは，スケーリング関数 φ がウェーブレット ψ によって置き換えられていることである．) これは，実数軸全体に Haar 級数基底を与える．以上の話は，少し変更するだけで，単位区間上の Haar 展開と密接な関係を持つようにできる．(1.9) 式を，次のように書くこともできる．

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \left\{ \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right\} \tag{1.9$'$}$$

これは， V_0 に対する基底 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ に， $j \geq 0$ である W_j に対する基底 $\{2^{j/2}\psi(2^{1/2}x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を組み合わせると， $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底が得られることを示している．

1.3 多重解像度解析

前節までの議論によれば，ウェーブレットを構成する前に，まずスケーリング関数 φ とそれに伴う多重解像度解析 $\cdots \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots$ を構成しなければならない．前節では，これらは整数格子 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ と 2 進伸張 $x \to 2x$ を基本としていたが，その代わりに格子 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ のベクトル空間の基底 $v_1, \ldots, v_n$ の整数係数線形結合によって与えられる離散部分群) と以下の条件を満足する $n \times n$ 行列 M を用いることにより，労せずして広い一般性を得ることができる．

$$M\Gamma \subset \Gamma \quad (M\text{は格子を保存する}) \tag{1.10}$$

$$M\text{のすべての固有値}\gamma\text{は} \quad |\gamma| > 1 \quad \text{を満たす} \tag{1.11}$$

$$(M\text{は真に拡大的である})$$

(1.10) と (1.11) から，$|\det M| = m$ が $m \geq 2$ の整数であって，$\Gamma/M\Gamma$ が位数 m の群であることを示すのは，簡単な練習問題である．最も簡単な例は，$m = 2^n$ で $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ かつ $M = 2I$

の場合である．次のような例もある．

(a) $n=2,\ \Gamma=\mathbb{Z}^2,\ M=\begin{pmatrix} 1,-1 \\ 1,1 \end{pmatrix},\ m=2$

(b) $n=2,\ \Gamma=\left\{\left(j+\frac{1}{2}k,\frac{k\sqrt{3}}{2}\right):(j,k)\in\mathbb{Z}^2\right\},\ M=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},\ m=7$

定義 1.1　スケーリング関数φ を伴う多重解像度解析 $\cdots\subseteq V_{-1}\subseteq V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots$ とは，以下の 4 条件を満足する $L^2(\mathbb{R}^n)$ の部分空間の増大列である．

1. **(稠密性)** $\bigcup_j V_j$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 空間で稠密である

2. **(分離性)** $\bigcap_j V_j=\{0\}$

3. **(スケーリング)** $f(x)\in V_j\leftrightarrow f(M^{-j}x)\in V_0$

4. **(正規直交性)** $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は V_0の正規直交基底である

$\{m^{j/2}\varphi(M^jx-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ が V_j に対する正規直交基底になることは，定義から容易にわかる．$\varphi\in V_0\subseteq V_1$ なので，次式が成り立つ．

$$\varphi(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a(\gamma)\varphi(Mx-\gamma) \tag{1.12}$$

ここで係数 $a(\gamma)$ は，

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|a(\gamma)|^2=m \tag{1.13}$$

をみたす．実際

$$a(\gamma)=m\int\varphi(x)\overline{\varphi(Mx-\gamma)}dx \tag{1.14}$$

である．方程式 (1.12) は (1.4) 式に似ており，我々はこの式をスケーリング恒等作用素と呼ぶことにする．

スケーリング関数が多重解像度解析を決定することは定義から明らかであるが，逆は成り立たない．より難しい問題は，多重解像度解析に対してそのスケーリング関数となり得る関数 φ を，どのように特徴づけるかである．ここで，スケーリング恒等作用素が重要な役割を果たすことが期待されるが，定義から得られる係数 $a(\gamma)$ に対する代数的な条件を調べなければなら

ない．

まず最初に，定義 1.1 の条件 **4** と (1.12) 式から得られる両立性条件がある．条件 **4** より，次式が成り立つ．(δ は Kronecker のデルタ)

$$\int \varphi(x-\gamma)\overline{\varphi(x)}dx = \delta(\gamma,0) \tag{1.15}$$

(1.12) 式を使って，(1.15) 式の $\varphi(x-\gamma)$ と $\overline{\varphi(x)}$ を置き換え，変数変換 $x \to M^{-1}x$ を用いて次式を得る．

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma'\in\Gamma}\sum_{\gamma''\in\Gamma} a(\gamma')\overline{a(\gamma'')}\int \varphi(Mx-M\gamma-\gamma')\overline{\varphi(Mx-\gamma'')}dx \\ = m^{-1}\sum_{\gamma''=M}\sum_{\gamma+\gamma'} a(\gamma')\overline{a(\gamma'')} = \delta(\gamma,0)\end{aligned}$$

この式は，次のように書き直すことができる．

$$\sum_{\gamma'\in\Gamma} a(\gamma')\overline{a(M\gamma+\gamma')} = m\delta(\gamma,0) \tag{1.16}$$

(1.16) 式は，特別な例として (1.13) 式を含むことを注意しておく．

もし φ が積分可能であり $\int\varphi(x)dx \neq 0$ であると仮定するならば（この条件は，実際に求められるすべてのスケーリング関数に対して当てはまる)，別の代数的条件が得られる．(1.12) 式を積分し，変数変換を行って次式を得る．

$$\begin{aligned}\sum \varphi(x)dx &= \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\int\varphi(Mx-\gamma)dx \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)m^{-1}\int\varphi(x)dx\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma) = m \tag{1.17}$$

さて，今までの手続きを逆にたどってみよう．第 **1** 段階は，代数的な恒等式 (1.16) と (1.17) をみたす $a(\gamma)$ を得ることである．第 **2** 段階は，スケーリング恒等作用素 (1.12) 式を経てスケーリング関数を定義することである．(1.12) 式は φ が次の線形変換の不動点であると言っていることに注意しよう．

$$Sf(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)f(Mx-\gamma) \tag{1.18}$$

そこで，適当な初期関数 fに対して，Sを繰り返して作用させることによって，φ を構成することが考えられる．

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} S^n f \tag{1.19}$$

以下の節において，我々は (1.12) 式を解くための他の手法を議論する．**第 3 段階**では，(1.12) 式を満たす関数 φ （ $\|\varphi\|_2 = 1$ に正規化されている）が，多重解像度解析を生成することの証明をめざす．これは最も注意を必要とする段階である．というのも，実はこのことが必ずしも正しくはないということを示す簡単な反例があるからである．(n=1; $\Gamma = \mathbb{Z}$; $M = 2$; $a(\gamma)$ は $\gamma = 0, 3$ に対して $a(\gamma) = 1$，それ以外では $a(\gamma) = 0$; このとき，$\varphi = \chi_{[0,3)}$ は条件 **4** を満たさない）．とはいえ，多くの $a(\gamma)$ は，多重解像度解析を生成する．確かめるのが難しい条件は正規直交条件 **4** であり，なぜ，そしてどのようなときにこの条件が成り立つのかを議論するのは，後の節に先送りにしなければならない．この節の残りの部分では，正規直交性と次のような付加的な規格化条件が与えられた時に稠密条件 **1** と分離条件 **2** を確立する方法を示すことにする．

$$\int \varphi(x)dx = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \tag{1.20}$$

(ここで， $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ はトーラス（torus 輪環面）$\mathbb{R}^n/\Gamma$の体積，あるいは同じことだが Γ に対する基本領域の体積を示す.)

補題 1.2　V_0 を， $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に含まれる $L^2(\mathbb{R}^n)$ の部分空間で次のような性質を持つものとする．任意の $f \in V_0$ に対し

$$\|f\|_\infty \le c\|f\|_2 \tag{1.21}$$

スケーリング条件 **3** によって， V_j を定義する（ $V_j \subseteq V_{j+1}$ のような仮定は必要ない）．このとき，条件 **2** が成り立つ．

証明　スケーリング条件と簡単な変数変換によって，(1.21) 式は次のようになる．任意の $f \in V_j$ に対し

$$\|f\|_\infty \le cm^{j/2}\|f\|_2 \tag{1.22}$$

もし $f \in \cap V_j$ ならば，(1.22) 式はすべての j に対して成り立つ．そして， $j \to -\infty$ によって $\|f\|_\infty = 0$ を得るので，それゆえに $f = 0$ である．　▮

(1.21) 式の評価は，我々の例においては簡単に得られる．簡単のため，φ は有界であり，コンパクトサポートであるとする．これは，我々のすべての例で成り立っている．そこで，正規

直交条件 **4** によって，次式を得る．

$$f(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(x-\gamma)\int f(y)\overline{\varphi(y-\gamma)}dy=\int K(x,y)f(y)dy$$

ここで $K(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(x-\gamma)\overline{\varphi(y-\gamma)}$であり，

$$|f(x)|\le\left(\int|K(x,y)|^2dy\right)^{1/2}\|f\|_2=\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|\varphi(x-\gamma)|^2\right)^{1/2}\|f\|_2$$

が得られ， $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\varphi(x-\gamma)|^2$ は一様に有界である．(もちろん， φ のみたす条件が，急減少のようにずっと弱い場合でもこのことは成り立つ．)

補題 1.3　φ はコンパクトサポートを持ち，(1.12) 式，(1.20) 式，及び正規直交条件 **4** を満たすものとする．このとき稠密条件 **1** が成り立つ．

証明の概略　(***M*** が相似な場合)

$$P_jf(x)=m^j\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(M^jx-\gamma)\int f(y)\overline{\varphi(M^jy-\gamma)}dy$$

を V_j への直交射影とする．我々は，すべての $f\in L^2$ に対して L^2 空間上で $\lim_{j\to\infty}P_jf=f$ を示す必要がある．これは，ピタゴラスの定理によって $\lim_{j\to\infty}\|P_jf\|_2^2=\|f\|_2^2$ と同値である．そこで密度変数（density argument）により， A を任意の矩型として $f=\chi_A$ に対してこのことを証明すれば十分である．しかし，

$$\|P_j\chi_A\|_2^2=m^j\sum_{\gamma\in\Gamma}|\int_A\varphi(M^jy-\gamma)dy|^2=m^{-j}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\int_{M^jA}\varphi(y-\gamma)dy|^2$$

である．大きな j に対して，M^jA は巨大な平行 6 面体になるであろう．そこで本質的に (1.20) 式によって，$\gamma\notin M^jA$ ならば$\int_{M^jA}\varphi(y-\gamma)dy=0$，あるいは $\gamma\in M^jA$ ならば$\int_{M^jA}\varphi(y-\gamma)dy=\sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}$ のいずれかである．(M^jA の境界の小さな近傍内のγ についてはこれは完全に正しいわけではないが， M は相似であると仮定しているので，極限においてこのような細部は無視することができる.) そこで，

$$\|P_j\chi_A\|_2^2\approx m^{-j}\ vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)\#\{\gamma\in M^jA\}\approx\ vol(A)=\|\chi_A\|_2^2$$

であり，極限においてはこの式は等式となる．　∎

以上の議論は本質的に逆にたどることが可能で，規格化条件 (1.20) の必要性を示せることを注意しておく．

以上によって，ウェーブレットそれ自体の構成という第 **4** 段階に移る準備ができた．

1.4　ウェーブレット

我々は全部で m 個の関数 $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ が必要である．ここで $\psi_0 = \varphi$ はスケーリング関数であり， $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ はウェーブレット生成元である．関数 $\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma, k=0,\ldots,m-1}$ を V_1 の正規直交基底となるようにしたい．関数 $\{\varphi(Mx-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ はすでに V_1 の直交基底なので，関数 ψ_k は$\varphi(Mx-\gamma)$ の線形結合で表すことができる．ゆえに，(1.12) 式を一般化した次式が成り立つ（もちろん $a_0(\gamma) = a(\gamma)$ である）．

$$\psi_k(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_k(\gamma)\varphi(Mx-\gamma) \tag{1.23}$$

$k = 1, \ldots, m-1$ に対して (1.23) 式は$\psi_k(x)$ を陽に表している．しかし，どのような条件を係数 $a_k(\gamma)$ につければよいのであろうか？　(1.16) 式を導き出したのと同様にして，次式を導くことができる．

$$\sum_{\gamma'\in\Gamma} a_j(\gamma')\overline{a_k(M\gamma+\gamma')} = m\delta(j,k)\delta(\gamma,0) \tag{1.24}$$

一方，条件 $\int\varphi(x)dx \neq 0$ は ψ_k に対して期待できることはない（Haar 関数の例を思い出そう）．そこで (1.17) 式は単純に，新しい記法で次のように書き直しておくにとどまらざるをえない．

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_0(\gamma) = m \tag{1.25}$$

補題 1.4　もし $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ が正規直交系であり，$a_j(\gamma)$ が (1.24) (1.25) 式を満たすならば，$\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma, k=0,\ldots,m-1}$ は正規直交系である．

証明　次式を示せばよい．

$$\int \psi_j(x)\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx = \delta(j,k)\delta(\gamma,0) \tag{1.26}$$

しかし，

$$\int \psi_j(x)\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx = \sum_{\gamma'\in\Gamma}\sum_{\gamma''\in\Gamma} a_j(\gamma')\overline{a_k(\gamma'')}\int\varphi(Mx-\gamma')\overline{\varphi(Mx-M\gamma-\gamma'')}dx$$

である．だがここで， $\varphi(x-\gamma)$ の正規直交性によって積分は $(1/m)\delta(\gamma', M\gamma+\gamma'')$ であるので， (1.26) 式は (1.24) 式 に帰着される．　∎

注意 1.5 級数と積分を交換することの正当化の説明は省略したが，実際には，我々の例のほとんどにおいて級数は有限和になる．

このように，$\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma,k=0,\ldots,m-1}$ は V_1 の関数の正規直交系である．それは基底であるか？(一種の擬次元計算の議論からは，このことは非常にもっともらしい.) それが基底であることを示すためには，各 $\tilde{\gamma}\in\Gamma$ について関数$\varphi(Mx-\tilde{\gamma})$ を線形結合として表現すればよい．係数は，次式をみたさなければならない．

$$\begin{aligned}\int\varphi(Mx-\tilde{\gamma})\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx &= \sum_{\gamma'\in\Gamma}\overline{a_k(\gamma')}\int\varphi(Mx-\tilde{\gamma})\overline{\varphi(Mx-M\gamma-\gamma')}dx \\ &= \frac{1}{m}\overline{a_k(\tilde{\gamma}-M\gamma)}\end{aligned}$$

それゆえ，

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{a_k(\tilde{\gamma}-M\gamma)}\psi_k(x-\gamma) \tag{1.27}$$

が $\varphi(Mx-\tilde{\gamma})$ と等しいということを示す必要がある．しかし，(1.23) 式を (1.27) 式に代入すると，

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma'\in\Gamma}a_k\overline{(M\gamma'+\tilde{\gamma})}a_k(M\gamma'+\gamma)\right)\varphi(Mx-\gamma)$$

がえられるので，次式が成り立てばよい．

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma'\in\Gamma}\overline{a_k(M\gamma'+\tilde{\gamma})}a_k(M\gamma'+\gamma)=m\delta(\gamma,\tilde{\gamma}) \tag{1.28}$$

補題 1.6 等式 (1.28) は常に成り立つ．従って，$\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma,k=0,\ldots,m-1}$ は V_1 空間の正規直交基底である．

これは純粋に代数的な命題であるが，証明は次の章まで延ばすことにする．

定理 1.7 φ は多重解像度解析と $a_k(\gamma)$ を生成し，$a_k(\gamma)$ は (1.23) 式によって定義される ψ_k と$\psi_0=\varphi$ によって，(1.24) 式 と (1.25) 式を満足するものとする．このとき， $j\in\mathbb{Z}$, $k=1,\ldots,m-1$ と $\gamma\in\Gamma$ に対して関数 $\{m^{j/2}\psi_k(M^jx-\gamma)\}$ は，$L^2(\mathbb{R}^n)$ における正規直交基底をなす．

証明 前と同じように， W_0 を V_1の中での V_0 の直交補空間，$V_1=V_0\oplus W_0$ であるとする．このとき，$\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma,k=1,\ldots,m-1}$ は W_0の正規直交基底である．我々は，補題 1.6 によって与えられる V_1 の基底を選び，そこから V_0 の基底 $\{\psi_0(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ を除いたのであるから，

このことは明らかである．スケーリングによって

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

が得られ，

$$\{m^{j/2}\psi_k(M^j x - \gamma)\}_{\gamma \in \Gamma, k=1,\ldots,m-1}$$

は W_j に対する正規直交基底となることが分かる．稠密条件により

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

であるから定理は証明された． ∎

この定理に類似した次の定理を練習問題として残しておこう：$\gamma \in \Gamma$ に対して $\{\varphi(x-\gamma)\}$ は，$j \geq 0$, $k = 1, \ldots, m-1$, $\gamma \in \Gamma$ に対する $\{m^{j/2}\psi_k(M^j x - \gamma)\}$ と共に $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底をなす．この定理の利点は，より細かい解像度 $(j \to +\infty)$ だけをスケーリングし，一つの族 $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ によってすべての粗い解像度 $(j < 0)$ を扱っていることである．

以上のように，ウェーブレットの構成を，代数的な関係式 (1.24)，(1.25) の解及び正規直交条件 **4** を保証するいくつかの技術的な条件に還元した．第 **5** 段階では，実際に (1.24) と (1.25) の解を求め，第 **6** 段階ではウェーブレット関数の様々な属性，すなわち微分可能性，無限遠での減衰，モーメント条件などを確立する．

これまで，構成法のいくつかの詳細な点に関する説明を延ばしてきた理由は，それらが，新しい技法，というよりむしろ古い技法であるフーリエ変換を必要とするからである．

1.5　フーリエ変換からの観点

これまで扱ってきた様々な式について，そのフーリエ変換を考えてみよう．我々の関係式のほとんどは，たたみ込み構造 (convolutional structure) を持っているので，フーリエ変換によって単なる積の等式となることが期待される．その前に，正規直交性の問題にもどってみよう．この問題についてまったく新しい扱い方を可能にする．$\varphi \in L^2$ が与えられたとき，$\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ が正規直交であるかどうかは，$\hat{\varphi}$ を用いた場合どのように論じることができるだろうか．

（[SW] のように）次式の定義を採用することで色々な式を簡単にすることができる．

$$\hat{\varphi}(x) = \int e^{2\pi i x \cdot y} \varphi(y) dy \tag{1.29}$$

例えば，逆フーリエ変換の公式は単に

$$\hat{\hat{\varphi}}(x) = \varphi(-x) \tag{1.30}$$

となり， Plancherel の公式は

$$\|\varphi\|_2 = \|\hat{\varphi}\|_2 \tag{1.31}$$

となる（注意：すべての文献がこの式を使っているわけではない！）．すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma \cdot \gamma^* \in \mathbb{Z}$ （従って，すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $e^{2\pi i \gamma \cdot \gamma^*} = 1$ である）のような点 $\gamma^* \in \mathbb{R}^n$ の集合を**双対格子**Γ^* と定義する．もし $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ であるならば， $\Gamma = \Gamma^*$ となることを注意しよう． また $vol(\mathbb{R}^n/\Gamma) = (vol(\mathbb{R}^n/\Gamma^*))^{-1}$ が成り立つ．

補題 1.8　$\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ が正規直交系であるためには，すべての ξ に対して

$$\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} |\hat{\varphi}(\xi+\gamma^*)|^2 = vol(\mathbb{R}^n/\Gamma) \tag{1.32}$$

が成り立つことが必要十分である．

証明　Plancherel の公式によって， $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ が正規直交系であるためには

$$\int e^{2\pi i \xi\cdot\gamma} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \delta(\gamma, 0) \tag{1.33}$$

が必要十分である．ここで， $\mathbb{R}^n$ 上の積分は $\mathbb{R}^n/\Gamma^*$ 上の積分と Γ^* （厳密にいえば基本領域）上の和に分解することができる．$e^{2\pi i \xi\cdot\gamma}$ は Γ^* に対して周期的なので，次式を得る．

$$\int_{\mathbb{R}^n/\Gamma^*} e^{2\pi i \xi\cdot\gamma} \sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} |\hat{\varphi}(\xi+\gamma^*)|^2 d\xi = \delta(\gamma, 0)$$

この式は，$\mathbb{R}^n/\Gamma^*$ 上の関数 $\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} |\hat{\varphi}(\xi+\gamma^*)|^2$ のフーリエ係数が $\delta(\gamma, 0)$ であることを意味する．従って $\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} |\hat{\varphi}(\xi+\gamma^*)|^2$ は定数である．この定数の値を求めるには上の積分において $\gamma = 0$ にすればよい．　∎

さて，スケーリング恒等作用素 (1.23) は容易に次の条件

$$\hat{\psi}_k(\xi) = A_k(M^{*-1}\xi)\hat{\varphi}(M^{*-1}\xi) \tag{1.34}$$

に書き直すことができる．ここで

$$A_k(\xi) = \frac{1}{m}\sum_{\gamma\in\Gamma} a_k(\gamma) e^{2\pi i \gamma\cdot\xi} \tag{1.35}$$

である．(これは練習問題である：フーリエ変換の定義と変数の変換を使う）．$A_k(\xi)$ は Γ^* 周

期であり，もし和が有限であると仮定するならば（あるいは $a_k(\gamma)$ がより急減少の時）滑らかであることに注意しよう．(1.25) 式から

$$A_0(0) = 1 \tag{1.36}$$

が，また (1.20) 式から

$$\hat{\varphi}(0) = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \tag{1.37}$$

が得られる．$k=0$ （ $\psi_0 = \varphi$ を思い出すこと）に対する (1.34) 式を繰り返すことによって，次の無限乗積表現を得る．

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \prod_{j=1}^{\infty} A_0((M^*)^{-j}\xi) \tag{1.38}$$

ここで，(1.36) 式を用いて，無限乗積が局所一様収束であることを容易に示すことができる．(1.38) 式を (1.34) 式に代入することにより，次の式をえる．

$$\hat{\psi}_k(\xi) = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} A_k(M^{*-1}\xi) \prod_{j=2}^{\infty} A_0((M^*)^{-j}\xi) \tag{1.39}$$

ゆえに，関数 A_k は完全に，そして陽な形でウェーブレットを決定する．

フーリエ変換による書き換えの過程で最も複雑な部分は，係数 $a_j(\gamma)$ が満たさねばならない (1.24) 式である．これは関数 A_k については何をいっているのであろうか？　この問題を直接扱うよりもむしろ（これは後で，練習として試してみられたい），(1.23) 式のつまり (1.34) 式の整合性条件である (1.24) 式と正規直交条件 (1.32) 式を導いた過程を繰り返すことにする．即ち，もし $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ が正規直交であるならば (1.32) 式が成り立たなければならないし，もし (1.34) 式で $\hat{\psi}_k$ を定義するならば，(1.32) 式と類似した次の式が成り立ってほしいわけである．

$$\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} \hat{\psi}_k(\xi+\gamma^*)\overline{\hat{\psi}_j(\xi+\gamma^*)} = \delta_{jk} vol(\mathbb{R}^n/\Gamma) \tag{1.40}$$

まず，計算に必要な表記法を導入しよう．$M^{*-1}\Gamma^*$ はΓ^* を含む格子であり，$M^{*-1}\Gamma^*/\Gamma^*$ は位数 m の群である．Γ^* の m 個の異なる剰余類の代表元として，$M^{*-1}\Gamma^*$ の元 $\eta_1, \ldots, \eta_m$ を選ぼう．このとき，格子 Γ^* 上の点は Γ^* 間を動く変数 γ^* と $p=1,\ldots,m$ を用いて $M^*(\gamma^*+\eta_p)$ のように一意に表すことができる．この，Γ^* の元のパラメーター表示を用いると

$$\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} \hat{\psi}_k(\xi+\gamma^*)\overline{\hat{\psi}_j(\xi+\gamma^*)} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} \hat{\psi}_k(\xi+M^*(\gamma^*+\eta_p))\overline{\hat{\psi}_j(\xi+M^*(\gamma^*+\eta_p))}$$

となる．さらに (1.34) 式を代入し，A_k の Γ^* 周期性を用いると，次式が得られる．

$$\sum_{p=1}^{m} A_k(M^{*-1}\xi+\eta_p)\overline{A_j(M^{*-1}\xi+\eta_p)} = \sum_{\gamma^*\in\Gamma^*} |\hat{\varphi}(M^{*-1}\xi+\eta_p+\gamma^*)|^2$$

Γ^* 上の内積和（inner sum）は定数 $vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ を与え，従って (1.40) 式は次の整合性条件を導く．

$$\sum_{p=1}^{m} A_k(\xi+\eta_p)\overline{A_j(\xi+\eta_p)} = \delta_{jk} \tag{1.41}$$

これは (1.24) 式と等価なフーリエ変換の式である．(1.41) 式は次の式を意味していることに注意せよ．

$$|A_k(\xi)| \le 1 \tag{1.42}$$

これはフーリエ変換 $\hat{\psi}_k$ が有界であることを意味している．

いまや，補題 1.6 は容易に証明できる．(1.41) 式は，各 ξ に対して $m\times m$ 行列 $\{A_k(\xi+\eta_p)\}_{k,p}$ が行についてユニタリ行列になることを意味することに注意しよう．これは，列についても次のようにユニタリ行列になることと同値である．

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_k(\xi+\eta_p)\overline{A_k(\xi+\eta_p)} = \delta_{pq} \tag{1.43}$$

さて，(1.35) を (1.43) に代入することによって次の式を得る．

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma'\in\Gamma} a_k(\gamma'+\gamma)\overline{a_k(\gamma')}e^{2\pi i\gamma\cdot\eta_p}e^{2\pi i\gamma'\cdot(\eta_p-\eta_q)}\right)e^{2\pi i\gamma\cdot\xi} = \delta_{pq}$$

これを $\mathbb{R}^n/\Gamma$ におけるフーリエ級数展開と考え，係数を等しく置き換えて次式を得る．

$$\frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma'\in\Gamma} a_k(\gamma'+\gamma)\overline{a_k(\gamma')}e^{2\pi i\gamma\cdot\eta_p}e^{2\pi i\gamma'\cdot(\eta_p-\eta_q)} = \delta_{pq}\delta(\gamma,0)$$

変数変換 $\gamma\to\gamma-\tilde{\gamma}, \gamma'\to\gamma'+\tilde{\gamma}$を行って，

$$\frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\gamma'\in\Gamma} a_k(\gamma'+\gamma)\overline{a_k(\gamma'+\tilde{\gamma})}e^{2\pi i(\gamma+\gamma')\cdot\eta_p}e^{-2\pi i(\tilde{\gamma}+\gamma')\cdot\eta_q} = \delta_{pq}\delta(\gamma,\tilde{\gamma})$$

となる．η_pを恒等作用素の剰余類（例：$\eta_p\in\Gamma^*$）の代表とすると $e^{2\pi i(\gamma+\gamma')\cdot\eta_p}=1$ となる．この式に $e^{2\pi i\tilde{\gamma}\cdot\eta_q}$ を掛け，q について和をとり，

$$\sum_{q=1}^{m} e^{-2\pi i\gamma'\cdot\eta_q} = \begin{cases} m & \gamma'\in M\Gamma \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を用いると，(1.28) 式を得る．

いよいよ，$\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ の正規直交性を直接的に証明する時が来た．証明に際しては，付加的な仮定が必要である．

定理 1.9　原点のコンパクト近傍 K で，以下の条件をみたすものが存在するとする．

(a) $M^{*-1}K \subseteq K$

(b) $K + M^{*-1}\Gamma^* = \mathbb{R}^n$

(c) $A_0(\xi) \neq 0$ for $\xi \in K$

このとき，$\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は正規直交系である．

証明　M^*K_0 が Γ^* に対する基本領域であるような部分集合 $K_0 \subseteq K$ を選ぶ．φ_0 を次のように定義しよう．

$$\hat{\varphi}_0(\xi) = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\chi_{M^*K_0}(\xi) \tag{1.44}$$

$\{\varphi_0(\xi-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は正規直交である．なぜなら，M^*K_0 は基本領域であるから，(1.32) 式は唯一つだけ 0 でない項を持ち，補題 1.8 から直ちに正規直交性が得られるからである．

ここで，

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = A_0(M^{*-1}\xi)\hat{\varphi}_{j-1}(M^{*-1}\xi) \tag{1.45}$$

によって，帰納的に関数 φ_j を定義しよう．

$\{\varphi_j(x-\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ も正規直交である．これは，$j=k=0$ における (1.41) 式と補題 1.8 よりすぐにわかる．あるいは，次式と (1.24) 式より導き出すこともできる．

$$\varphi_j(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_0(\gamma)\varphi_{j-1}(Mx-\gamma) \tag{1.46}$$

この式は，(1.45) 式のフーリエ逆変換である．ここで，

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\left(\prod_{k=1}^{j} A_0((M^*)^{-k}\xi)\right)\chi_{(M^*)^{j+1}K_0}(\xi) \tag{1.47}$$

であるから，(1.38) 式から各点収束の意味で $\hat{\varphi}_j \to \hat{\varphi}$ となることに注意しよう．

L^2 ノルムにおいて $\varphi_j \to \varphi$ となることを示したい．正規直交集合の，ノルムの意味での極限は正規直交集合なので，これは証明を完結させるのに十分である．証明のキーポイントにおいては，仮定 (c) を使わねばならない．(1.3 節に与えられた反例において証明の議論がどのように破綻するのかを調べることは，面白い演習となるだろう．)

Plancherel の公式から，L^2 ノルムにおいて $\hat{\varphi}_j \to \hat{\varphi}$ を証明すれば十分である．すでに$\hat{\varphi}_j$ は

各点収束することを知っているので，収束定理を使いたい．$\hat{\varphi}$ は $\hat{\varphi}_j$ の各点収束極限であり，かつ $\|\hat{\varphi}_j\|_2 = 1$ なので， Fatou の定理により $\hat{\varphi} \in L^2$ となる．そこで，優関数として$\hat{\varphi}$ の定数倍を使うことができる．(1.47) 式と (1.38) 式を比較することによって，次式を得る．

$$\hat{\varphi}_j(\xi) = \begin{cases} \frac{\hat{\varphi}(\xi)\sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}}{\hat{\varphi}((M^*)^{-j}\xi)} & (M^*)^{-j}(\xi) \in M^*K_0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{1.48}$$

M^*K_0 において $\hat{\varphi}$ は下に有界である．ポイントは$\hat{\varphi}$ が連続であり，従って (a) と (c) によって，$\xi \in M^*K$ に対して $A_0((M^*)^{-j}\xi) \neq 0$ となることである．従って$\hat{\varphi}$ は M^*K 上でゼロにならないので，$c = \sqrt{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}(\inf_{M^*K}|\hat{\varphi}|)^{-1}$ に対して $|\hat{\varphi}_j(\xi)| \leq c|\hat{\varphi}(\xi)|$ が成り立つ． ∎

1.6 構成方法

さてここで我々は，構成におけるすべての主要な段階を示したが，最後まで第 1 段階を残してきた．我々は代数的な恒等式 (1.24) と (1.25) ，あるいはそれらのフーリエ変換である (1.41) と (1.36) に対して，定理 1.9 の仮定を満足するような解を見つける必要がある．この問題に対しては，いくつかの異なったアプローチがある．ここでは Ingrid Daubechies [D1] によるアプローチを述べることにする．

我々が最初に扱った特別なケース，すなわち $n = 1$，$\Gamma = \mathbb{Z}$，$M = 2I$ に戻る． ゼロでない $a_k(\gamma)$ の数が有限個であるような解をさがそう．これは $A_k(\xi)$ が三角多項式になる場合である．この場合，スケーリング関数 φ とウェーブレット ψ_1 はコンパクトサポートを持つ．(もし $\gamma \in [-M, M]$ 以外では $a(\gamma) = 0$ ならば， f が $[-M, M]$ 内にサポートを持てば Sf もそうなる．従って，まず (1.18) と (1.19) を繰り返すことによってφ と ψがコンパクトサポートをもつことを実際に示すことができる.) まず，関数 A_0 を見つけよう．この関数は，以下の 3 条件を満足しなければならない．

$$A_0(0) = 1 \tag{1.49}$$

$$|A_0(\xi)|^2 + \left|A_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1 \tag{1.50}$$

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad , \quad |\xi| \leq \frac{1}{4} \tag{1.51}$$

ここで (1.49) 式は (1.36) 式であり，(1.50) 式はすなわち $j = k = 0$ ，$\eta_p = 0$，1/2 に対する (1.41) 式である．また (1.51) 式は定理 1.9 の仮定 (c) で $K = [-1/4, 1/4]$ としたものである．もちろん A_0 は

$$A_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} a_0(\gamma) e^{2\pi i \gamma \xi} \quad (\text{有限和}) \tag{1.52}$$

の形でなければならない．このとき $|A_0(\xi)|^2$ もこれと同じ形を持つことに注意しよう．

さて，我々はすでに一つの解を知っている，すなわち，

$$A_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{2\pi i\xi})=e^{\pi i\xi}\cos\pi\xi$$

これは Haar ウェーブレットを生成する．しかしこのウェーブレットは連続ではないので，これでは不十分であると考えられた．連続性，あるいはさらに微分可能性をつくるための一つの方法は，たたみ込みをくりかえすこと，あるいはフーリエ変換の側から見て通常のパワーをとることである．そこで，ある大きな N に対して $A_0(\xi)=(e^{\pi i\xi}\cos\pi\xi)^N$ を試みたくなるだろう．残念ながら，この方法では (1.50) 式は保たれないが，これを改良することができる．$|\cos\pi\xi|^2+|\cos\pi(\xi+1/2)|^2=1$ となるのは，$\cos\pi(\xi+1/2)=-\sin\pi\xi$ となるからであることを注意しよう．

まず，等式を $\cos^2\pi\xi+\sin^2\pi\xi=1$ ととり，その奇数のベキをとると，例えば以下のようになる．

$$\begin{aligned}1 &= (\cos^2\pi\xi+\sin^2\pi\xi)^5=\cos^{10}\pi\xi+5\cos^8\pi\xi\sin^2\pi\xi\\ &+ 10\cos^6\pi\xi\sin^4\pi\xi+10\cos^4\pi\xi\sin^6\pi\xi+5\cos^2\pi\xi\sin^8\pi\xi\\ &+ \sin^{10}\pi\xi\end{aligned}$$

$|A_0|^2$ として最初の半分の項をとると

$$|A_0(\xi)|^2=\cos^{10}\pi\xi+5\cos^8\pi\xi\sin^2\pi\xi+10\cos^6\pi\xi\sin^4\pi\xi \tag{1.53}$$

となる．ξ を $\xi+1/2$ に置き換えることで，これらの項は残りの半分の項になる．すなわち (1.50) 式は自動的に満たされ，(1.49) 式と (1.51) 式は容易に確認できる．このようにして $|A_0|^2$ を導くための手順が与えられる．そして，(1.52) の形の式の平方根をとることが残る．実数値スケーリング関数を生成するために（そして同様に，最終的に実数値ウェーブレットを得るために），(1.52) 式の係数 $a_0(\gamma)$ を実数に選びたい．これが可能であることを示す F.Riesz による一般的な定理がある．しかしこの例は簡単なので，試行錯誤によって求めてもそれほど難しくない．

$$\begin{aligned}|A_0(\xi)|^2 &= (\cos^4\pi\xi+5\cos^2\pi\xi\sin^2\pi\xi+10\sin^4\pi\xi)\cos^6\pi\xi\\ &= ((\cos^2\pi\xi-\sqrt{10}\sin^2\pi\xi)^2+(5+2\sqrt{10}\cos^2\pi\xi\sin^2\pi\xi)\cos^6\pi\xi\end{aligned}$$

であるから，

$$A_0(\xi) = (e^{\pi i\xi}\cos\pi\xi)^3(\cos^2\pi\xi-\sqrt{10}\sin^2\pi\xi+i\sqrt{5+2\sqrt{10}}\cos\pi\xi\sin\pi\xi)$$

$$= \frac{1}{8}(e^{2\pi i\xi}+1)^3\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}+\frac{1+\sqrt{10}}{4}(e^{2\pi i\xi}+e^{-2\pi i\xi}) + \frac{1}{4}\sqrt{5+2\sqrt{10}}(e^{2\pi i\xi}-e^{-2\pi i\xi})\right) \tag{1.54}$$

と求めることができる．これは，明らかに (1.52) の形を持ち， $a_0(\gamma)$ は実数で，$-1 \leq \gamma \leq 4$ のときに限り $a_0(\gamma) \neq 0$ である．

話しを完結するために，やはり (1.52) の形を持ち以下の 2 式を満足する $A_1(\xi)$ を見つける必要がある．

$$|A_1(\xi)|^2 + \left|A_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1 \tag{1.55}$$

$$A_0(\xi)\overline{A_1(\xi)} + A_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\overline{A_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)} = 0 \tag{1.56}$$

(これらは (1.41) 式における残りの条件である.) 幸運にも， $A_1(\xi)$ を見つけることは容易である．以下のようにすればよい．

$$A_1(\xi) = e^{2\pi i\xi}\overline{A_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)} \tag{1.57}$$

これは，次のように選ぶことに相当する．

$$a_1(\gamma) = (-1)^{\gamma+1}\overline{a_0(1-\gamma)} \tag{1.58}$$

ここで，A_0 の周期性と (1.50) 式を用いれば， (1.55) 式と (1.56) 式は簡単な代数の練習問題となる．また，$a_0(\gamma)$ が実数のとき，$a_1(\gamma)$ も実数となることに注意しよう．

ここで考えている特別な場合は，ただ一つだけウェーブレット生成元ψ_1 があり，そのフーリエ変換は (1.39) 式によって以下のように与えられる．

$$\hat{\psi}_1(\xi) = A_1\left(\frac{1}{2}\xi\right)\prod_{j=2}^{\infty} A_0(2^{-j}\xi) \tag{1.59}$$

ここで A_0 は (1.54) 式によって， A_1 は (1.57) 式によって与えられる．もし，そのフーリエ変換よりもむしろウェーブレット ψ_1 自身を求めようとするなら，次の写像の繰り返しによって最初に $\psi_0 = \varphi$ を求める．

$$Sf(x) = \sum a_0(j)f(2x-j) \tag{1.60}$$

(実際には，整数 x に対する値 $\varphi(x)$ を得るときだけ反復法を使えばよい．スケーリング方程式をくりかえし用いることによって，$x = 2^{-k}$ ×整数に対する $\varphi(x)$ の値を求めることができ

る.) そこで, 次式を用いて ψ_1 を得る.

$$\psi_1(x) = \sum a_1(j)\varphi(2x - j) \tag{1.61}$$

図 1.2 と図 1.3 を参照のこと.

異なるウェーブレット基底を導くようなスケーリング関数を構成するための, 別のアプローチがある. その方法は, それほど代数計算を要しないという点で有利であるが, 求めたウェーブレットのサポートがコンパクトでないという点で不利である. Haar 基底のスケーリング関数 $\chi_{[0,1]}$ から始める. そのフーリエ変換は $e^{\pi i\xi}(\sin \pi\xi)/(\pi\xi)$ であり, N 重のたたみ込み積

$$g = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]} \qquad (\text{N 個の要素}) \tag{1.62}$$

をとると

$$\hat{g}(\xi) = \left(e^{\pi i\xi}\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^N \tag{1.63}$$

を得る.

$g \in C^{N-1}$ であることは簡単にわかるが, もちろん $\chi_{[0,1]}$ のもつ $\mathbb{Z}$ による平行移動の正規直交性は壊される. これは非常に悪い点であるが, 簡単に修正することができる.

$$h(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2\right)^{1/2} \tag{1.64}$$

とおくと, h は周期的であり

$$0 < c_1 \leq h(\xi) \leq c_2 < \infty \tag{1.65}$$

となる. ここで,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{g}(\xi)/h(\xi) \tag{1.66}$$

とおくだけでよい. (1.32) 式は自動的にみたされ, $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の正規直交性が従う. $\hat{g}(0) = 1$ および $k \neq 0$ のとき $\hat{g}(k) = 0$ であるから, 期待通り $\hat{\varphi}(0) = 1$ となることに注意しよう. また $\varphi \in C^{N-1}$ を示すことも難しくない.

スケーリング恒等作用素はどうなるだろう? なるほど, スケーリング恒等作用素は確かに g に対して存在する. すなわち

$$\hat{g}(\xi) = B(\xi/2)\hat{g}(\xi/2) \tag{1.67}$$

ここで,

$$B(\xi) = (e^{\pi i\xi} \cos \pi\xi)^N \tag{1.68}$$

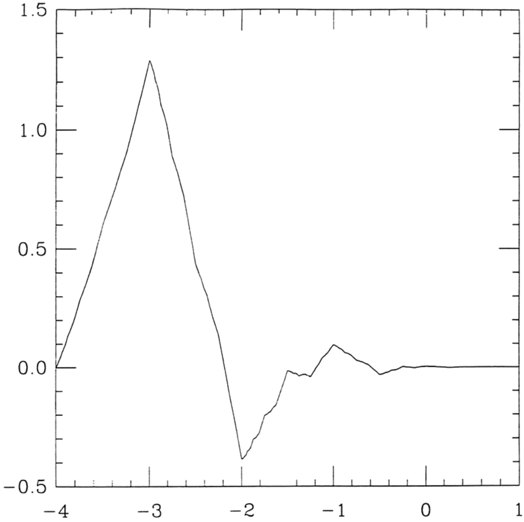


図 **1.2** David Aronstein によるスケーリング関数 φ のグラフ

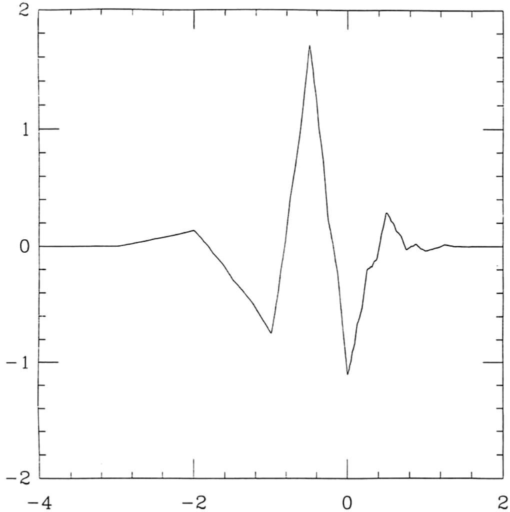


図 **1.3** David Aronstein によるウェーブレット生成元 ψ_1 のグラフ

は，期待されている形式 (1.52) を持っている．そこで，次式が得られる．

$$\hat{\varphi}(\xi) = A_0(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{1.69}$$

ここで，

$$A_0(\xi) = B(\xi)h(\xi)/h(2\xi) \tag{1.70}$$

A_0 は周期 1 の周期性を持つので，(1.52) の形を持たなければならないが，もはや有限和ではない．これは，φ のコンパクトサポート性を失ったということである．一方，A_0 は明らかに滑らかであるので，(1.52) 式におけるフーリエ係数は急減少しなければならない．これは φ が急減少であることを意味する．

$A_1(\xi)$ とウェーブレットフーリエ変換 $\hat{\psi}_1(\xi)$ の構成は，前述のように (1.57) 式と (1.59) 式を用いて行えばよい．

1.7　ウェーブレットの滑らかさ

我々のウェーブレットはどのくらい滑らかであるのか？　フーリエ変換の側から見るのが最も分かりやすいので，ここで$\hat{\varphi}$ の無限遠における減衰が φ の滑らかさに対応するという原理を用いることにする（我々はまずスケーリング関数の滑らかさを確立し，(1.61) 式を経てウェーブレットの滑らかさを示す）．例えば次式が $\varphi \in C^N$ を意味することは，容易に示すことができる．

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \le c(1+|\xi|)^{-N-1-\epsilon} \tag{1.71}$$

問題は (1.71) 式をどのようにして示すかということである．

無限積表現 (1.38) から

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} A_0(2^{-k}\xi) \tag{1.72}$$

が導かれる，ここで A_0 は周期関数である．各々の因子は無限遠で減衰しないのに，なぜ積は減衰するのであろうか．これは不思議なことに思えるが，最も簡単な例 $A_0(\xi) = \cos \pi\xi$ を調べることによって納得できる．この場合，

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos 2^{-k}\pi\xi = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \tag{1.73}$$

は，$O(|\xi|^{-1})$ の割合で減衰する．(公式 (1.73) は Euler によって証明されたが，特別な場合については 1500 年代終わりに Francois Viète によって見いだされている．ウェーブレットの考

え方による証明は，$\chi_{[-1/2,1/2]}$ のフーリエ変換とそのスケーリング性を考慮することによって得られる.)

明らかに ξ の大部分の選択に対して，$\cos 2^{-k}\pi\xi$ の値は時々小さくなり，そして積 (1.73) も小さくなる．大きな N に対して$\xi = 2^N$ を取ることによって，これを回避しようとするかもしれない．確かに $k = 1, \ldots, N$ に対しては $\cos 2^{-k}\pi\xi = \pm 1$ であり，減衰しない．しかし $\cos 2^{-N-1}\pi\xi = 0$ であるのでこの考えは一掃されてしまう．このような議論をもっと定量化することもできるが，これによって例えば $\sin \pi\xi/\pi\xi = O(|\xi|^{-2/3})$ だとしてもあまり魅力的な結論ではない．そこで，我々がはじめにしていたように (1.73) 式を使うことにする．

A_0 に対する (1.54) 式の表現や，あるいはより複雑な表現は，いずれも係数として $\cos \pi\xi$ を何回も含む．このため $\hat{\varphi}(\xi)$ は因子として $\sin \pi\xi/\xi$ を何回も含み，それゆえ減衰することが期待される．不運にも，他の係数は増加する．最後に平方根をとることを注意すれば，(1.53) 式によって与えられる $|A_0|^2$ を研究する方がより簡単である．ここで扱っている特別な場合において，我々は次の式を得る．

$$|A_0(\xi)|^2 = (\cos \pi\xi)^6(\cos^4 \pi\xi + 5\cos^2 \pi\xi \sin^2 \pi\xi + 10\sin^4 \pi\xi)$$

最初の因子は $O(|\xi|^{-6})$ の減衰をもたらす．2 番目の因子は，$1 + 3\sin^2 \pi\xi + 6\sin^4 \pi\xi$ と書くことができ，明らかに $\xi = 1/2$ において最大値 10 をもつ．以下の議論により，2 番目の因子によって生じる増加率に対するおおまかな評価を得ることができる．すなわち，もし $|\xi| \approx 2^N$ ならば，$2^{-k}|\xi|$ が大きくなる因子の数は約 N 個である．故に積の上限は，10^N の定数倍である．$\alpha = \log 10/\log 2 \approx 3.32$ に対して $10^N \approx |\xi|^\alpha$ であるから，成長率は多くとも $O(|\xi|^{3.32})$ であり，組み合わせると $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ に対して $O(|\xi|^{-2.68})$ であり，それゆえに，$\hat{\varphi}(\xi)$ に対して $O(|\xi|^{-1.34})$ である．

これは，期待はずれの評価である．(1.71) 式から，φ が連続であることしか示すことができない．いくらか改善することができるが，多くではない．この理由を調べるために，$\xi = 2^N/3$ としてみよう．N 個の因子においては，$2^{-k}\xi = 2^{N-k}/3, 1 \le k \le N$ だから，我々は $1 + 3\sin^2(2^{N-k}\pi/3) + 6\sin^4(2^{N-k}\pi/3) = 1 + 3\cdot(\sqrt{3}/2)^2 + 6(\sqrt{3}/2)^4 = 6.625$ となる．ここで α に対する下限は $\log 6.625/\log 2$ であり，$\hat{\varphi}(\xi)$ の評価を $O(|\xi|^{-1.636})$ に改善する．

1.6 節の方法で構成されたウェーブレットの族については，2 番目の係数をさらにもっと複雑にし，$\cos \pi\xi$ のより高次のベキとの積を作って $|A_0(\xi)|^2$ を得ることができるだろう．この場合，$\hat{\varphi}(\xi)$ はより早く増加する関数と，より早く減少する関数の積である．どちらが勝つのか？それは激しい競り合いである．結局減衰が勝つことになるのだが，上で用いたようなまずい方法で増加を評価していては，これを示すことができない．最終的な結果 ([D1], [Co2]) によると，C^N 級のウェーブレットを作るためには，我々は $5(N+1)$ のオーダーの大きさをもつ M に対する $(\cos^2 \pi\xi + \sin^2 \pi\xi)^M = 1$ から出発しなければならない．これは，中庸の滑らかさを得る

ために，かなり複雑な計算を（例えば，$|A_0|^2$ から A_0 に至る計算など）覚悟しなければならないことを意味している（つい最近，フーリエ変換を用いることなく直接滑らかさを評価するより優れた手法が出された [DL]）．図 1.4 は，$\hat{\varphi}(\xi)$ のグラフを示している．この関数の驚くべき自己相似性の議論については [JRSt] を参照のこと．

滑らかさと共に，ウェーブレットの重要な特性は，次の消失モーメント条件である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi_1(x)dx = 0, k = 0, 1, \ldots, N \tag{1.74}$$

これは，次のように高次のフーリエ変換の微分が示す原点においてゼロとなることに相当する．

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \hat{\psi}_1(0) = 0 \quad , k = 0, 1, \ldots, N \tag{1.75}$$

滑らかさの場合と異なり，この性質を持つのはスケーリング関数ではなく，ウェーブレットだけである．$\psi_1(2^j x - k)$ のフーリエ変換は主に 2^j のオーダーの $|\xi|$ の付近に集中するので，この条件は，周波数（フーリエ変換）変数における弱い局在性を意味している．(ある種のウェーブレットにおいては，実際にフーリエ変換のサポートが環状領域 $c_1 2^j \le |\xi| \le c_2 2^j$ に存在する．これらの「 Littlewood–Paley 」タイプのウェーブレットについては，[M] を参照されたい.)
我々のウェーブレットについて (1.75) 式を確認することは簡単である．(1.59) 式から $\hat{\psi}_1$ は因子 $A_1(\xi/2)$ を持ち，形式 (1.57) 式から $\xi = 0$ において A_1 が $\xi = 1/2$ における A_0 と同じオーダーのゼロを持つことがわかる．しかし，A_0 は $\cos \pi\xi$ のベキを因子に持つため，我々の例では$\xi = 1/2$ で 3 位のゼロを持つ．またウェーブレットの構成を $(\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x)^{2M-1} = 1$ からはじめるのであれば，A_0 は $\xi = 1/2$ で M 位のゼロを持つ．一般的な条件では，(1.49) 式と (1.50) 式からは $A_0(1/2) = 0$ となり，$\xi = 0$ の近傍で A_0 がより平らになるほど$\xi = 1/2$ の近傍でゼロに近づく，ということを意味している．

1.8　テンソル積による多次元化

$\mathbb{R}^n$ におけるウェーブレットを作る問題を考えよう．簡単なテンソル積を構成することにより，これまで述べてきた $\mathbb{R}^1$ ウェーブレットから多次元ウェーブレットを簡単に得ることができる．$\mathbb{R}^n$ における格子$\Gamma = \mathbb{Z}^n$ とスケーリングに対する行列 $M = 2I$ を用いることにしよう．$\det M = m = 2^n$ なので，$2^n - 1$ 個のウェーブレット生成元が期待される．

$\psi_0(x)$ と $\psi_1(x)$ を，$\mathbb{R}^1$-スケーリング関数とウェーブレット生成元とする．すべての種類の積

$$\psi_{j_1}(x_1)\psi_{j_2}(x_2)\cdots\psi_{j_n}(x_n) \tag{1.76}$$

を考えよう．ここで，$j_1, j_2, \ldots, j_n$ は 0 か 1 である．全体で 2^n 個の関数があるが，$j_1 = j_2 = \cdots = j_n = 0$ がスケーリング関数であり，残りの $2^n - 1$ 個がウェーブレット生成元となる．ス

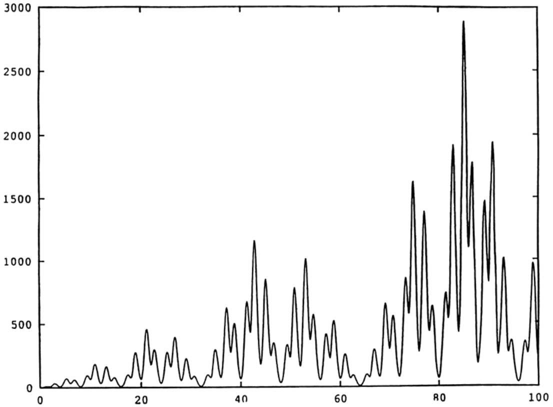


図 1.4 Prem Janardhan と David Rosenblum による$\hat{\varphi}$のグラフ．$\sin \pi x/\pi x$ のベキの因子を除いた．

ケーリング関数は，新しい V_j が古い V_j のテンソル積になるような多重解像度解析に対応している．確かめるべきことは，すべて容易に示すことができる．試みよ！

1.9 サブバンド符号化

関数 f が与えられたとき，そのウェーブレット展開の係数を実際にはどのように計算すればよいのであろうか．それらのすべての数値積分を実行しなければならないのであろうか．答えはノーである．そんなことはない．代数的に計算するために単純な再帰的アルゴリズムがあることがわかる．それはサブバンド符号化の名前でよばれ，そのウェーブレット展開から関数を復元するという逆の作業においても，全く同じようにうまくはたらく．このアルゴリズムはスケーリング係数 $a_k(\gamma)$ のみを扱うので，ウェーブレットやスケーリング関数を計算することはまったく必要ない．

話を簡単にするために，1 次元の場合についてアルゴリズムを説明する．関数 f は単位区間 $[0,1]$ においてサポートされ，ある固定された整数 J について $x = k/2^J$, $0 \le k \le 2^J - 1$ での値が数値的に与えられているとしよう．

いま，多重解像度解析における空間 V_J を考える．この空間は，おおまかに言って，f に対する我々の数値データと同程度の解像度をもっている．ゆえに，次の形で f のよい近似を期待できるだろう．

$$\sum_k c_k \varphi(2^J x - k) \tag{1.77}$$

(1.20) 式によって $2^J \int \varphi(2^J x - k)dx = 1$ であり，$\varphi(2^J x - k)$ は $x = k/2^J$ 付近の小さな区間をサポートとするので，V_J における f の近似は，簡単に

$$\sum_{k=0}^{2^J-1} f(k/2^J)2^J\varphi(2^J x - k) \tag{1.78}$$

のようになるだろう．展開係数から明らかに全データ $f(k/2^J)$ を復元できるので，どの程度近似が良いのか心配しなくてもよい．別の言葉でいうと，$0 \leq k \leq 2^J - 1$ 以外では $c_k = 0$ であるというサポートの制限のもとで，我々の区間データは V_J における関数の展開 (1.77) 式における係数 c_k とみなすことができる．

さて，ウェーブレットの構成法によると，$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$ である．ここで，W_{J-1} は $\psi_1(2^{J-1}x - k)$ によって張られる空間であり，V_{J-1} は $\psi_0(2^{J-1}x - k)$ によって張られる空間である．それゆえ，(1.77) の形の関数は次のように書くこともできる．

$$\sum_k a_k\psi_0(2^{J-1}x - k) + \sum_k b_k\psi_1(2^{J-1}x - k) \tag{1.79}$$

サブバンド符号化は，どのようにして (1.77) 式の係数 $\{c_k\}$ から (1.79) 式の係数 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ を得るのか（符号化），また逆に (1.79) 式の係数 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ から (1.77) 式の係数 $\{c_k\}$ をどのようにして得るのか（復号化）を示している．

(1.77) 式と (1.79) 式で表現される関数を f とすると，基底の直交性から

$$a_k = 2^{J-1}\int f(x)\overline{\psi_0(2^{J-1}x - k)}dx \tag{1.80}$$

$$b_k = 2^{J-1}\int f(x)\overline{\psi_1(2^{J-1}x - k)}dx \tag{1.81}$$

そして

$$c_k = 2^J\int f(x)\overline{\psi(2^J x - k)}dx \tag{1.82}$$

となる．しかし，(1.23) 式のスケーリング恒等作用素を用いると，$\varphi(2^J x - k)$ を用いて $\psi_0(2^{J-1}x - k)$ と $\psi_1(2^{J-1}x - k)$ を表現することができる．すなわち，

$$\psi_0(2^{J-1}x - k) = \sum_\gamma a_0(\gamma)\varphi(2^J x - 2k - \gamma) \tag{1.83}$$

$$\psi_1(2^{J-1}x - k) = \sum_\gamma a_1(\gamma)\varphi(2^J x - 2k - \gamma) \tag{1.84}$$

(1.80) に (1.83) 式を，(1.81) に (1.84) 式をそれぞれ代入し，(1.82) 式を用いると，次の式を得る．

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_\gamma \overline{a_0(\gamma)}c_{2k+\gamma} \tag{1.85}$$

$$b_k = \frac{1}{2}\sum_{\gamma}\overline{a_1(\gamma)}c_{2k+\gamma} \tag{1.86}$$

これが符号化のアルゴリズムである．

復号化のアルゴリズムは，次の関係式をベースにしている．

$$\begin{aligned}\varphi(2^J x - k) = \quad & \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma}\overline{a_0(k-2\gamma)}\psi_0(2^{J-1}x-\gamma) \\ & +\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma}\overline{a_1(k-2\gamma)}\psi_1(2^{J-1}x-\gamma)\end{aligned} \tag{1.87}$$

これは，V_{J-1} と W_{J-1} のそれぞれの基底 $\{\psi_0(2^{J-1}x-\gamma)\}$，$\{\psi_1(2^{J-1}x-\gamma)\}$ の線形結合として，V_J の基底 $\{\varphi(2^J x-k)\}$ を表現している．(1.87) 式の証明は，関数の直交性を使って (1.83) 式と (1.84) 式を逆転させて行う．(1.83) 式の複素共役に$\varphi(2^J x - k')$ をかけて積分すると,（添え字を書き換えて）

$$\int \varphi(2^J x - k)\overline{\psi_0(2^{J-1}x-\gamma)}dx = 2^{-J}\overline{a_0(k-2\gamma)}$$

また，同様にして

$$\int \varphi(2^J x - k)\overline{\psi_1(2^{J-1}x-\gamma)}dx = 2^{-J}\overline{a_1(k-2\gamma)}$$

を得る．これに $\{2^{(J-1)/2}\psi_0(2^{J-1}x-\gamma)\}$ と $\{2^{(J-1)/2}\psi_1(2^{J-1}x-\gamma\}$ の正規直交性を用いれば，(1.87) 式が得られる．そこで，(1.87) 式を (1.82) 式に代入し，(1.80) 式と (1.81) 式を用いると，次の復号化アルゴリズムに到達する．

$$c_k = \sum_{\gamma} a_0(k-2\gamma)a_{\gamma} + \sum_{\gamma} a_1(k-2\gamma)b_{\gamma} \tag{1.88}$$

あるいは，書き換えて

$$c_k = \sum_{\gamma}{}' a_0(\gamma)a_{(k-\gamma)/2} + \sum_{\gamma}{}' a_1(\gamma)b_{(k-\gamma)/2} \tag{1.88$'$}$$

ここで$\sum'$ は，k と同じ偶奇性を持つ γ についての和をとることを意味している．なお，このとき $(k-\gamma)/2$ は整数である．

$\{c_k\}$ は $0 \le k \le 2^J - 1$ にサポートを持つので，もし $a_0(\gamma)$ と $a_1(\gamma)$ が $-N \le \gamma \le N$ でサポートされるのならば，(1.85) 式と (1.86) 式によって，$\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ は $-N/2 \le k \le 2^{J-1} + (N-1)/2$ でサポートされることに注意されたい．逆に，これは (1.88) 式や (1.88′) 式を用いてすべての初期データ $\{c_k\}$ を復元するために必要な $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ の値域である．それゆえ，初期データと比較したときに，$2N$ によって，符号化されたデータの数はわずかに $2N$ だけ増加する．2^J と比較すれば，おそらく $2N$ は小さいであろう．

さて，反復計算に入ろう．(1.79) 式における第 1 番目の和は V_{J-1} （$= V_{J-2} \oplus W_{J-2}$ ）に属

す関数であり，J を $J-1$ によって置き換え，同様の手順を適用できる．この手順を繰り返し，$J=0$ のレベルで止めることで，図式的に書くと

$$V_J = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{J-1} \tag{1.89}$$

の結果を得る．ここで各空間での展開係数の正確な表現も同時に得られる．この結果は，以下のようにも書くことができる．

$$f(x) = \sum_k c_{0,k}\psi_0(x-k) + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_k b_{j,k}\psi_1(2^j x - k) \tag{1.90}$$

我々の符号化アルゴリズムでは，レベル j における係数 $\{c_{j,k}\}_k$ からレベル $j-1$ における係数 $\{c_{j-1,k}\}_k$ と $\{b_{j-1,k}\}$ を以下のように得ることができる．

$$c_{j-1,k} = \frac{1}{2}\sum_\gamma \overline{a_0(\gamma)}c_{j,2k+\gamma} \tag{1.91}$$

$$b_{j-1,k} = \frac{1}{2}\sum_\gamma \overline{a_1(\gamma)}c_{j,2k+\gamma} \tag{1.92}$$

$j \neq 0$ における中間のレベル $\{c_{j,k}\}_k$ は，最終的には不必要であるが，符号化している際には必要である．

符号化されたデータは，(1.90) 式における $0 \leq j \leq J-1$ に対する係数，$\{c_{0,k}\}_k$ と $\{b_{j,k}\}_k$ の全体である．これは定理 1.7 の直後に述べた展開に対する近似である．われわれが 0 以外のデータを得る k の範囲は，各レベル j において 2^j のオーダーであり，最大 $4N$ の重複を生じる．それゆえ，符号化されたデータ数は初期データの最初の数よりわずかだけ（およそ $4JN$ ）大きい．復号化は，(1.88′) に似た方法を反復して行う．すなわち，

$$c_{j,k} = {\sum_\gamma}' a_0(\gamma)c_{j-1,(k-\gamma)/2} + {\sum_\gamma}' a_1(\gamma)b_{j-1,(k-\gamma)/2} \tag{1.93}$$

により符号化されたデータから初期データ $\{c_{J,k}\}_k$ を再現する．($\sum_\gamma'$ は $\gamma-k$が偶数となる γ について和をとることを意味する．) どちらのアルゴリズムにおいても，演算の数は，データの数と同じオーダーの数となることに注意しよう．

なぜ，こんなやっかいなことをしなければいけないのか，と思うかもしれない．ウェーブレットの考え方を信じるなら，符号化されたデータは相対的に疎であるはずである．ウェーブレット係数のほとんどは十分 0 に近いので，関数にあまり影響を与えることなくこれらの係数を 0 におくことができる．ゆえに，われわれはデータの圧縮を実現することができる．すなわち，はるかに少ない情報で，十分な近似を保つことができる．また係数についても，その近似値だけをたくわえることにすれば，さらに少ないビット数でデータを保存することができる．データ圧縮の詳しい議論は [DeJaLu] を参照されたい．

参考文献

[C1] C.K. Chui. 1992. *An Introduction to Wavelets*, New York: Academic Press.

[C2] C.K. Chui (ed.). 1992. *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, New York: Academic Press.

[Co1] A. Cohen. 1990. "Ondelettes, analyses multi-résolutions et filtres miroir en quadrature," Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaires **7**: 439–459

[Co2] A. Cohen. 1990. "Construction de bases d'ondelettes α-Hölderiennes," *Rev. Mat. Iberoamericana* **6**: 91–108.

[D1] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[D2] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[DL] I. Daubechies and J. Lagarias. 1991. "Two-scale difference equations: I and II," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 1388–1410; 1992. **23**: 1031–1079.

[DeJaLu] R. DeVore, B. Jawerth, and B. Lucier. 1992. "Image compression through wavelet transform coding," *IEEE J. Inform. Theory* **38**: 719–747.

[FJaW] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss. 1991. *Littlewood–Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS Reg. Conf. Lect. Notes **79**, Providence: Amer. Math. Soc.

[JRSt] P. Janardhan, D. Roseblum, and R.S. Strichartz. 1993. "Numerical experiments in Fourier asymptotics of Cantor measures and wavelets," *Exp. Math.*, to appear.

[M] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Operateurs*, 3 vols., Paris: Herman.

[Retal] M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael (eds.). 1992. *Wavelets and Their Applications*, Boston: Jones and Bartlett.

[SW] E. Stein and G. Weiss. 1971. *An Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[St] R. Strichartz. 1993. "How to make wavelets," *Amer. Math. Monthly*, to appear.

第 2 章　離散集合上の正規直交ウェーブレット変換入門

Michael W. Frazier* and Arun Kumar

【概要】この論文では，z-変換を用いて多次元信号に対する離散正規直交ウェーブレット変換を展開する．この論文は，教科書的かつ説明的なものである．z-変換とベクトル空間に関するいくらかの基本的な知識を前提とする．信号のウェーブレット変換は，完全正規直交基底系要素と信号との一連の内積から構成される．信号は，重みづけした基底ベクトルの和の形で復元される．この論文では，そのような基底が満たさねばならない必要十分条件を説明する．適切な基底を作り上げるアルゴリズムは，正規直交性と完全復元条件から導かれる．簡単のために，多次元信号の場合を別に扱う．この論文を通して，ハードウェアの構造とソフトウェアの導入方法も明らかになるであろう．

2.1　はじめに

この論文では，離散集合上のウェーブレット変換を簡単であるが厳密な方法で議論する．二つの基本的なテーマが同時に展開される．第一のテーマは，内積の列から信号を復元することである．第二のテーマは，実用にかかわることで，ハードウェアまたはソフトウェアにウェーブレット変換を組み込むために必要なフィルタの設計に関することである．正規直交分解と完全再構成のための必要かつ十分な条件が得られる．ウェーブレットのフィルタの設計のためのアルゴリズムは図例とともに提示されている．z-変換，ベクトル空間，そして内積に関する基本的知識は前提としている．しかしながら，説明は完全で，本論文だけで十分である．この論文は以前の技術報告 [FK] と [K] のなかのいくつかを少し修正したものである．

ここでは，この話題について知られている過去の成果の歴史を述べるつもりはない．以降で述べるほとんどすべての結果は（おそらく 2.3.2 節と 2.4.6 節の 2 番目の例を除いて），サブバンドコーディング，フィルターバンク（filter bank）そしてウェーブレットに関する書物から知ることができ，筆者らによるものではない．歴史や付帯事項については [D2] や [RVe] のようなすぐれた説明を参照せよ．簡単で実際的かつ数学的に厳密な離散集合上の正規直交ウェーブレット変換の設計と，反復フィルタバンクによるウェーブレット変換の計算方法を提示したい．

---

*Michael W. Frazier は NSF postdoctoral fellowship DMS 8705935 の援助を一部受けている．

この目的に向かってまっすぐ進むために，付帯的な理論的事項については極力排除した．技術者，科学者や数学者にも受け入れやすく，また仕事にウェーブレット解析を用いたいと考えている非専門家に対しても十分な参考情報を提示したいと考えている．

ここで紹介するのは，広大かつ成長過程にある分野への簡単な入門にすぎない．ウェーブレットとフィルタバンクの結び付きについて特に強調している文献としては，[RVe],[VeH], [V] を推薦する．これらは，より進んだ情報と多くの参考文献を含んでいる．一般に，ウェーブレットの問題は，非常に広大なので，ここではさらなる参考文献のための導入について述べているにすぎない．

2.2 節において，有限次元と無限次元の離散ベクトル空間に対する “第一世代” のウェーブレット基底の構成について論ずる．「第一世代」の基底は二つの関数 f_L と f_Hの偶数だけの平行移動により構成される．この二つの関数は普通 low-pass filter と high-pass filter に対応する．ここでの基本的な結果は，定理 2.5 で，そのような正規直交基底を構成するための必要十分条件を示している．このウェーブレット基底による入力信号の分解と再構成は，1 段 フィルタバンク構造に最もうまく組み込むことができる．このような構造に対して，「合成フィルタ」 g_L, g_H と「分解フィルタ」 f_L, f_Hを関連づける簡単な条件がある．この条件は，各入力信号の完全再構成のための必要十分条件である．この結果は 2.2 節の中で導き出される．

2.3 節では，第一世代のウェーブレット基底の実際の設計について論ずる．定理 2.5 の条件を満足するすべての可能な f_L と f_H を得るアルゴリズムが与えられる．そのようなウェーブレット基底のいくつかの例も示す．とくに周波数領域でよく局在している「シャノン」と「実シャノン」基底を示す．あるベクトルに対して（ ℓ^2 の意味で）最も近い第一世代ウェーブレットを見つけるという問題も論ずる．この問題は，我々のウェーブレット構成アルゴリズムによって，簡単に解くことができる．

2.4 節では後位世代のウェーブレット基底について論ずる．基本的な結果は，定理 2.10 で，これは第一世代のウェーブレット基底から次の世代へどのように移るかを説明している．有限の場合は，これには新しいフィルタの構成が必要となるが，それは補題 2.11 で示されるように，第一世代のフィルタから簡単な手順によって得られる．

2.5 節では，離散有限そして無限ベクトル空間上の多次元信号まで話を拡張するのに必要な結果を述べ，説明する．主な考え方は，2.2 節から 2.4 節で説明されているので，2.5 節は短くなっている．この節の目的は，完全な文献を提示することにすぎない．新しい難しさは主として表記法によるものである．

この論文では z変換を基本的なツールとして用いている．なによりも，z 変換は便利な記述法で，有限次元と無限次元を同時に扱うことができる．

2.1.1　記号

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, そして $\mathbb{Z}^+$ はそれぞれ，複素数の集合，実数の集合，整数（正，負，0）の集合，正整数の集合を表す． $a, b \in \mathbb{Z}$ が整数のとき， $a \mid b$ は， a が b の約数であることを意味する． $\mathbb{Z}_N$は $\{0, \ldots, N-1\}$ の整数環を示す．離散集合 Uに対して， $\ell^1(U)$ は， U から $\mathbb{C}$への絶対総和可能な数列すべてのベクトル空間であり， $\ell^2(U)$ は， Uから $\mathbb{C}$への二乗絶対総和可能な数列すべてのベクトル空間である． f を離散集合 U から $\mathbb{C}$への関数とするとき， f の台を fが 0 でない U の部分集合と定義する．すなわち $\mathrm{supp}(f) = \{u \in U : f(u) \neq 0\}$．

A をあるベクトル空間 Vに属するベクトルの集合とするとき，$\mathrm{span}(A)$ とは， A の有限の線型結合のすべてで構成される V の部分空間である．任意の $A \subseteq V$ について， V における A の位相的閉包を $\mathrm{cl}(A)$ と表す．

α をアルファベット A 上の文字列とするとき， $\alpha \in A^*$ と書くことにする．“$*$” は，ここでは Kleene 作用素である． α， β が文字列のとき， $\alpha\beta$ はそれらの結合である． $\alpha(i)$ をαの i 番目の文字として $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(n)$ と表す． $|\alpha| \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$は文字列$\alpha$の長さを表す． $|\alpha| = 0$ のときα を空文字列とよぶ． $\alpha, \beta, \gamma \in A^*$ で $\alpha = \beta\gamma$なら β を αのプレフィックス (**prefix**) と呼ぶ． $\beta = \mathrm{pfx}(\alpha, i)$, $0 \leq i \leq |\alpha|$, とはβがα のプレフィックスで $|\beta| = i$ を意味する．

2.2　離散 1 次元信号の 2 バンド直交分解と完全再構成

この節では，離散無限ベクトル空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ または離散 N-次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ (ただし $2 \mid N$) の任意の信号がどのようにしてある「基本的」synthesizing 関数の荷重和で記述されるかを示すことである．信号 x のある synthesizing 関数の荷重和として表現を x の**分解**と呼ぶ．問題を設定するために，図 2.1 に示すようなフィルタアレンジとダウンサンプリング **downsampling** とアップサンプリング **upsampling** を考える．「$\downarrow 2$」によって，ダウンサンプリング，すなわち入力シーケンス以外の番号を削除することを意味する．「$\uparrow 2$」によってアップサンプリング，すなわち入力シーケンスの数字のすべての対の間に 0 を挿入することを意味する． $\mathcal{D}$ と $\mathcal{U}$ はそれぞれダウンサンプリング，アップサンプリング演算子を示す． f_L と f_H は分解フィルタを示し， g_L と g_H は合成フィルタを示す． サブスクリプトの “H” と “L” はそれぞれ “high-pass” と “low-pass” の略記と考えてもよい．なぜなら， f_H と g_H が high-pass フィルタで f_L と g_L は low-pass フィルタであるというのは，必ずしもその必要はないものの，普通であるからである．

信号 x が $V = \ell^2(\mathbb{Z})$ なる無限次元ベクトル空間にあるなら，$f_L, f_H, g_L, g_H \in \ell^1(\mathbb{Z})$ を仮定する．すると， $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対して， u_L, v_L, w_L, y_L, u_H, v_H, w_H, y_H はすべて， $\ell^2(\mathbb{Z})$ に属する．有限次元信号（ベクトル空間） $V = \mathbb{C}^N = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の元 x については，$f_L, f_H, g_L, g_H \in \mathbb{C}^N$

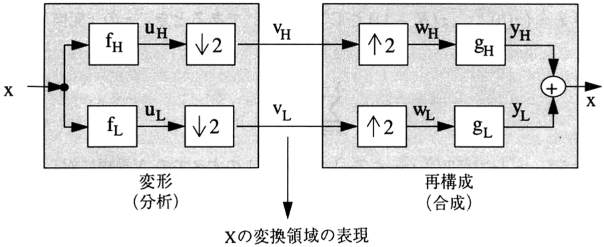


図 **2.1** フィルタアレンジ，ダウンサンプリング，アップサンプリング

とする．すると，$x \in \mathbb{C}^N$ に対して，シーケンス $u_L, w_L, y_L, u_H, w_H, y_H$ は $\mathbb{C}^N$に属する．しかしながら，v_L と v_Hは $\mathbb{C}^{N/2}$に属する．

シーケンス v_H と v_L は分解フィルタ f_H, f_L が 2.2.2 節で述べるルールに従って選ばれるなら，信号 x の離散直交ウェーブレット変換を定義すると言われている．合成フィルタ g_H, g_L は x を完全再構成できるように選ばれる．完全再構成は x の分解を定義することがわかる．

この節の主な結果として，フィルタシーケンス f_H, f_L, g_H そして g_Lの設計に関する制約条件を定める，二つの定理が挙げられる．この節の他の目的は，工学的，数学的視点を統一することである．問題はこれまでのところフィルタ設計の問題として述べられている一方で，純粋なベクトル空間の問題としても研究することができる．フィルタリングの過程は内積数列の計算過程と等しく，工学的，数学的視点の間には密接な関係が存在することが理解できよう．

2.2.1 z 変換による記述

無限列 $x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), \ldots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, すべての i に対して $x(i) \in \mathbb{C}$ ，x の z-変換 $\hat{x}(z)$ を次のように書く．

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{2.1}$$

ここで，不確定な数 zの範囲は ，複素平面上の単位円 $\mathbb{T}$ 上である．z変換の標準的な定義においては，不確定な数 z は全複素空間上である．ここでは，標準的な定義に対する制限を用いる．$x(n)$ が，$\omega \in [-\pi, \pi]$ を $\hat{x}(e^{-j\omega})$ に写す関数の n 番目のフーリエ係数となることに注意しておく．すなわち，次のようになる．

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{-j\omega}) e^{-jn\omega}\, d\omega \tag{2.2}$$

(2.2) から，すべての $z \in \mathbb{T}$ について$\hat{x}(z) = \hat{y}(z)$ ならば，$x = y$であり，したがって z変換は 1 対 1 である．

x が有限列 $x = (x(0), \ldots, x(N-1)) \in \mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{Z}^+$であるとき，x の z変換 $\hat{x}(z)$ を次のように書く．

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \tag{2.3}$$

関数 $\hat{x}$ は $z \in \mathbb{W}_N = \{e^{-j2\pi m/N} : m \in \mathbb{Z}_N\}$ すなわち1のすべての N乗根に対して定義される．複素数 $\hat{x}(e^{-j2\pi m/N}), m \in \mathbb{Z}_N$は x の m 番目の離散フーリエ変換 (DFT) の係数となる．DFT の逆変換により

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{x}(e^{-j2\pi m/N}) e^{-j2\pi mn/N} \tag{2.4}$$

(2.4) からすべての $z \in \mathbb{W}_N$について$\hat{x}(z) = \hat{y}(z)$ ならば $x = y$である．

x が $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上にあるとき，$\omega \in [-\pi, \pi]$ での x のフーリエ変換を $(\mathcal{F}x)(\omega)$ と表す．すなわち，$(\mathcal{F}x)(\omega) = \hat{x}(e^{-j\omega})$． x が $\mathbb{C}^N$上にあるとき，$m \in \mathbb{Z}_N$で評価された x の DFT を $(\mathcal{F}x)(m)$ と表す．すなわち，$(\mathcal{F}x)(m) = \hat{x}(e^{-j2\pi m/N})$．

総和の際のインデックスの範囲が等式中で指定されていないときは，$\mathbb{Z}$ 上と $\mathbb{Z}_N$上の両方の総和について等式が成立することを意味する．同様に，$\hat{x}(z)$のある性質が「すべての z」とか「$\forall z$」で成立すると述べたときは，x が $V = \ell^2(\mathbb{Z})$ または $V = \mathbb{C}^N$ に属するかに従って，“$\forall z \in \mathbb{T}$” または “$\forall z \in \mathbb{W}_N$” であることを意味する．

有限列 x の場合は，$z \in \mathbb{W}_N$であるから，$\hat{x}(z)$ 中の不確定項である z^{-1}のベキ乗の計算は，環 $\mathbb{Z}_N$において行われる．したがって，$N = 4$ ならば $az^{-2} + bz^{-5} + cz^9 = az^{-2} + bz^{-1} + cz^{-3}$ である．有限列の z変換 を z^{-1}の $\mathbb{Z}_N$のある数のベキ乗によってのみ表したとき，z変換を正規表現した（**canonical form**）という．無限列の場合，z変換はいつも正規表現である．すべての z変換が正規表現で書かれるとするなら，ここでくり広げる数学的考察は有限と無限の信号空間 $\mathbb{C}^N$ と $\ell^2(\mathbb{Z})$ に対して同時に正しい．

$x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $x, y \in \mathbb{C}^N$とするとき，たたみ込み（convolution）$(x * y)$ は次のように定義される．

$$(x * y)(n) = \sum_m x(m) y(n-m) \tag{2.5}$$

$x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ならば，n, m の範囲は $\mathbb{Z}$となる．$x, y \in \mathbb{C}^N$ならば，n, m の範囲は $\mathbb{Z}_N$である．後者の場合，(2.5) におけるインデックス $(n-m)$ は yの定義域 $\mathbb{Z}_N$ をはみだしてしまうように見える．しかし，有限のたたみ込みを扱うときは，すべてのインデックス列の計算環 $\mathbb{Z}_N$において行う．これは，z変換における z^{-1}のベキの計算の場合と同様である．従って，インデックスが範囲外にはみ出ても問題ではなく，すべての有限たたみ込みはデジタル信号処理の標準的用語の意味で「循環たたみ込み」である．

x と y のたたみ込み $(x*y)$ の z 変換は，x と y の z 変換の積となる．すなわち，$(x*y)\wedge(z) = \hat{x}(z)\hat{y}(z)$ である．$\mathrm{coeff}_k(\hat{x}(z))$ は $\hat{x}(z)$ の正規表現における z^{-k} の係数を示す．(2.2) と (2.4) からこの係数は定まる．$f, h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $f, h \in \mathbb{C}^N$ の内積を

$$\langle f, h\rangle = \sum_n f(n)\bar{h}(n) \tag{2.6}$$

により定義する．ここで n は考えている信号空間によって $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_N$ 上のすべてである．この内積は z 変換の記法により表すことができる．

補題 2.1　f, h が複素数列で $z \in \mathbb{T}$ または $z \in \mathbb{W}_N$ ならば，$\langle f, h\rangle = \mathrm{coeff}_0\left(\hat{f}(z)\overline{\hat{h}}(z)\right)$．である．

証明

$$\begin{aligned}\hat{f}(z)\overline{\hat{h}}(z) &= \left(\sum_n f(n)z^{-n}\right)\overline{\left(\sum_m h(m)z^{-m}\right)} &(2.7)\\ &= \sum_n\sum_m f(n)\bar{h}(m)z^{m-n} &(2.8)\end{aligned}$$

(2.7) から (2.8) への変換の際，$z \in \mathbb{T}$ または $z \in \mathbb{W}_N$ ならば $\overline{z^{-1}} = z$ という事実を用いた．等式 (2.8) より補題が得られる．∎

2.2.2　正規直交分解

R を列 $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $x \in \mathbb{C}^N$ に作用する右シフト作用素とする．$(Rx)(n) = x(n-1)$ または，次と同等である．

$$(Rx)\wedge(z) = z^{-1}\hat{x}(z) \tag{2.9}$$

有限信号空間 $\mathbb{C}^N$ においては，(2.9) で定義された右シフト作用素は列を巡回的にぐるぐるまわす．すなわち，x が 1 回右にシフトされると，$x(N-1)$ は $x(0)$ のあった場所に移動する．これは，x のインデックスに対して，$\mathbb{Z}_N$ 上の計算を適用した結果である．z 変換の記法は，正規表現を用いれば，このぐるぐる巻きを如実に示している．

f をインプット x，アウトプット y であるフィルタの衝撃応答とする．これは，$\tilde{f}(n) = \bar{f}(-n)$ で定義する．列 $\tilde{f}$ は列 f の時間的逆順の複素共役である．したがって，y は次のようになる．

$$\begin{aligned}y(k) &= \sum_n x(n)f(k-n) = \sum_n x(n)\bar{\tilde{f}}(n-k) = \sum_n x(n)\left(R^k\bar{\tilde{f}}\right)(n) &(2.10)\\ &= \sum_n x(n)\overline{\left(R^k\tilde{f}\right)}(n) = \left\langle x, R^k\tilde{f}\right\rangle &(2.11)\end{aligned}$$

(2.10) から等式 (2.11) が導かれるのは，列 $\tilde{f}$ の複素共役の右シフトが，列 $\tilde{f}$ の右シフトの複素共役と同じであるからである．(2.10) と (2.11) から，フィルタ fによる信号 x のフィルタリングの過程は，内積の列の計算に等価であることが明らかである．フィルタにより生成される $y(k)$ に対して一つの内積が計算される．

マルチ集合（バッグともいう）は，一つまたは複数の要素について複数のコピーを持つことを許す「集合」である．図 2.1 において，u_L は，x のマルチ集合 $\{R^k\tilde{f}_L\}_{k\in\mathbb{Z}\text{ または }k\in\mathbb{Z}_N}$に対する内積をとることにより構成される． $\{R^k\tilde{f}_L\}_k$は集合でなくマルチ集合であるとされる理由は，$k_1\neq k_2$に対して $R^{k_1}\tilde{f}_L=R^{k_2}\tilde{f}_L$であってもよいからである．列 v_Lは， u_L の一つおきの数をとり除くことによって得られる．したがって v_Lは， x とマルチ集合

$$\tilde{B}_L=\{R^{2k}\tilde{f}_L\}_k \tag{2.12}$$

の要素との内積で構成される．ここで信号空間に依存して $k\in\mathbb{Z}$または $k\in\mathbb{Z}_{N/2}$ である．

また，次のマルチ集合$\tilde{B}$を定義する．

$$\tilde{B}_H = \{R^{2k}\tilde{f}_H\}_k \tag{2.13}$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}_L\cup\tilde{B}_H \tag{2.14}$$

(2.14) における和は，マルチ集合としての和であり，マルチ集合の要素の重複度を保存する．

直交ウェーブレット解析においては，$\tilde{B}$は信号空間 $V=\ell^2(\mathbb{Z})$ または $V=\mathbb{C}^N$における正規直交基底を定義するのに必要である．マルチ集合$\tilde{B}_L$と $\tilde{B}_H$は Vの互いに直交する部分空間 V_Lと V_Hの正規直交基底を定義するのに必要である．それゆえ，$\tilde{B}_L$, $\tilde{B}_H$, $\tilde{B}$ は各々,「集合」でなければならない．$\tilde{B}$の正規直交性から，信号の分解と完全な再構成のための特別に簡単な条件を導くことができる．

次に，$\tilde{B}$の正規直交性の結果から分かることを述べよう．しかし，その前に一つの補題を述べる．それによってより簡単な記法を導入しよう．

補題 2.2　次のマルチ集合を定義する．

$$B_L = \{R^{2k}f_L\}_k \tag{2.15}$$

$$B_H = \{R^{2k}f_H\}_k \tag{2.16}$$

$$B = B_L\cup B_H \tag{2.17}$$

$\tilde{B}_L$は B_Lが正規直交であるとき，かつそのときに限り，正規直交である．$\tilde{B}_H$は B_Lが正規直交であるとき，かつそのときに限り，正規直交である．$\tilde{B}$ は B が正規直交であるとき，かつそのときに限り，正規直交である．

証明　$f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $f \in \mathbb{C}^N$について，

$$
\begin{aligned}
(\tilde{f}) \wedge (z) &= \sum_n \tilde{f}(n) z^{-n} = \sum_n \bar{f}(-n) z^{-n} = \sum_{m=-n} \bar{f}(m) z^m \\
&= \overline{\left(\sum_m f(m) z^{-m}\right)} = \bar{\hat{f}}(z)
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

補題 2.1 と (2.18) より，

$$
\begin{aligned}
\langle R^{2k}\tilde{f}, R^{2\ell}\tilde{h}\rangle &= \mathrm{coeff}_0 \left(z^{-2k}(\tilde{f}) \wedge (z) z^{2\ell}\overline{(\tilde{h})\wedge(z)}\right) \\
&= \mathrm{coeff}_0 \left(z^{-2k}\bar{\hat{f}}(z) z^{2\ell}\hat{h}(z)\right) \\
&= \langle R^{-2\ell}h, R^{-2k}f\rangle
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

$\tilde{B}_L$ が正規直交なら，

$$
\langle R^{2k}\tilde{f}_L, R^{2\ell}\tilde{f}_L\rangle = \delta(k-\ell) \tag{2.20}
$$

である，ここでδはクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) である．

$$
\delta(i) \triangleq \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \tag{2.21}
$$

(2.19) を (2.20) から $\langle R^{-2\ell}f_L, R^{-2k}f_L\rangle = \delta(k-\ell)$，それゆえ B_Lは直規直交である．同様の議論により補題が成立する．∎

簡単にわかるように，マルチ集合，$B=\{R^{2k}f_L\}_k \cup \{R^{2k}f_H\}_k$ （したがって$\tilde{B}$）は次の等式が任意の $k \in \mathbb{Z}$ または任意の $k \in \mathbb{Z}_{N/2}$に対して成立するとき，かつそのときに限り正規直交である．

$$
\langle f_L, R^{2k}f_L\rangle = \delta(k) \tag{2.22}
$$

$$
\langle f_H, R^{2k}f_H\rangle = \delta(k) \tag{2.23}
$$

$$
\langle f_L, R^{2k}f_H\rangle \equiv 0 \tag{2.24}
$$

等式 (2.22) から (2.24) は正規直交条件とよばれる．

次の二つの補題は，正規直交分解に関する主定理の証明において用いられる．補題を述べる前に定義が必要である．関数$\hat{h}(z)$ が奇関数 (odd) であるとは，$\hat{h}(z) = -\hat{h}(-z)$ であることである． $\hat{g}(z)$ が zの殆ど奇関数 (almost-odd) であるとは，ある奇関数と定数関数 "1" の和であることである．

補題 2.3　$f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$とする．次の命題は同等である．

P1 すべての $k \in \mathbb{Z}$ または $k \in \mathbb{Z}_{N/2}$について $\langle f, R^{2k} f\rangle = \delta(k)$

P2 $\forall z$, $|\hat{f}(z)|^2$は zの殆ど奇関数である．

P3 $\forall z$, $|\hat{f}(z)|^2 + |\hat{f}(-z)|^2 = 2$

証明　補題 2.1 によって

$$\begin{aligned}\langle f, R^{2k} f\rangle &= \operatorname{coeff}_0 \left(\hat{f}(z)\overline{(R^{2k} f)\wedge(z)}\right) = \operatorname{coeff}_0 \left(\hat{f}(z)\overline{z^{-2k}\bar{\hat{f}}(z)}\right) && (2.25)\\ &= \operatorname{coeff}_0 \left(z^{2k}|\hat{f}(z)|^2\right) = \operatorname{coeff}_{2k} \left(|\hat{f}(z)|^2\right) && (2.26)\end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}(z) = \sum_n \alpha(n) z^{-n} = |\hat{f}(z)|^2 \tag{2.27}$$

と定義しよう．(2.26) より

$$\hat{\alpha}(z) = 1 + \sum_n \alpha(2n+1) z^{-(2n+1)} \tag{2.28}$$

であるときに限り **P1** は真となる．

等式 (2.28) は $\hat{\alpha}$ が z の殆ど奇関数であることを意味する．したがって **P1** ⇒ **P2** である．逆に，**P2** が成立すれば，(2.2) と (2.4) と対称性から， $n \neq 0$ について $\alpha(2n) = 0$ である．したがって (2.26) は **P2** ⇒ **P1** を示している．

P2 によって $|\hat{f}(z)|^2 = 1 + \hat{\beta}(z)$，$\hat{\beta}(z)$ は zのある奇関数である．直接代入すれば，**P3** は $\hat{\beta}(z) + \hat{\beta}(-z) = 0$ と同値である．したがって，**P2** ⇔ **P3** である．∎

補題 2.4　$f, h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$とする．次は同値である．

P1 すべての $k \in \mathbb{Z}$ または $k \in \mathbb{Z}_{N/2}$について，$\langle f, R^{2k} h\rangle = 0$

P2 $(\hat{f}\bar{\hat{h}})$ は zの奇関数である．

P3 任意の zに対して，$\hat{f}(z)\bar{\hat{h}}(z) + \hat{f}(-z)\bar{\hat{h}}(-z) = 0$

証明　補題 2.1 から

$$\langle f, R^{2k} h\rangle = \operatorname{coeff}_{2k} \left(\hat{f}(z)\bar{\hat{h}}(z)\right) \tag{2.29}$$

である．補題 2.3 の証明にあてはめれば， **P1** は $(\hat{f}\bar{\hat{h}})$ が zの奇関数であるときに限り負となる．それゆえ **P1** ⇔ **P2** である．また定義により **P2** ⇔ **P3** である．∎

いいかえれば，補題 2.3 は集合 $B_L = \{R^{2k} f_L\}_k$と $B_H = \{R^{2k} f_H\}_k$（それゆえ，$\tilde{B}_L$と $\tilde{B}_H$）はそれぞれ，多項式 $|\hat{f}_L(z)|^2$ と $|\hat{f}_H(z)|^2$ が $z \in \mathbb{T}$ または $z \in \mathbb{W}_N$についての殆ど奇関数であるときに限り正規直交であることを示している．補題 2.4 は B_Lと B_H（それゆえ $\tilde{B}_L$ と$\tilde{B}_H$）

は，多項式 $\hat{f}(z)\overline{\hat{g}}(z)$ が $z \in \mathbb{T}$ または $z \in \mathbb{W}_N$の奇関数であるときに限り，互いに正規直交することを示している．これらの補題は，Strichartz [S] の (1.41) の条件に相当する次の興味深い結果をもたらす．

定理 2.5 集合 $\tilde{B} = \{R^{2k}\tilde{f}_L\}_k \cup \{R^{2k}\tilde{f}_H\}_k$ は行列

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{f}_L(z) & \hat{f}_H(z) \\ \hat{f}_L(-z) & \hat{f}_H(-z) \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

がすべての $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$に対してユニタリ行列であるときかつそのときに限り，正規直交となる．

証明 正規直交条件 (2.22)-(2.24) と補題 2.2-2.4 から，$\tilde{B}$は，すべての $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$について次の等式が成立するとき，かつそのときに限り正規直交となる．

$$|\hat{f}_L(z)|^2 + |\hat{f}_L(-z)|^2 = 2 \tag{2.31}$$

$$|\hat{f}_H(z)|^2 + |\hat{f}_H(-z)|^2 = 2 \tag{2.32}$$

$$\hat{f}_L(z)\overline{\hat{f}_H}(z) + \hat{f}_L(-z)\overline{\hat{f}_H}(-z) = 0 \tag{2.33}$$

等式 (2.31)-(2.33) は行列 (2.30) がユニタリ行列であることと同値である． ∎

等式 (2.31)-(2.33) は，実際，(2.30) の $A(z)$ のユニタリ性を定義していると言ってもよい．等式 (2.31) と (2.32) は，$A(z)$ の二つの列がそれぞれある適切に定義された内積空間 Wで，単位ノルム（「サイズ」または「長さ」）を持たねばならないことを言っている．また，等式 (2.33) は，Wのベクトルとしての $A(z)$ の列が直交していること，すなわち Wにおける内積が 0 であることを言っている．(2.30) の行列 $A(z)$ はこれから先，何度も現われる．これをシステム行列と呼ぼう．

有限の場合は，(2.30) は $z \in \mathbb{W}_N$についてのみユニタリであることが要求されている．それゆえ，$\hat{f}(e^{-j2\pi m/N}) = (\mathcal{F}f)(m)$ で，定理 2.5 は，マルチ集合 B が，

$$A(e^{-j2\pi m/N}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\mathcal{F}f_L)(m) & (\mathcal{F}f_H)(m) \\ (\mathcal{F}f_L)\left(m \pm \frac{N}{2}\right) & (\mathcal{F}f_H)\left(m \pm \frac{N}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

が $m = 0, \ldots, (N-1)$ についてユニタリであるとき，かつそのときに限り正規直交であることを示している．ここで，(2.34) の符号は，$m \pm \frac{N}{2} \in \{0, \ldots, (N-1)\}$ であるように選ぶ．N次元信号空間の正規直交分解のためのフィルタ対 (f_L, f_H) の正当性を決定するためには，$N/2$ 個の (2×2) 行列のユニタリ性をチェックするだけでよい．残りの $N/2$ 個の (2×2) 行列は，初めの $N/2$ 個の行を反対にしたものであり，そのユニタリ性は自動的にチェックされる．

2.2.3　完全再構成

これまで，正規直交分解のための必要十分条件を確立してきた．これから，図 2.1 のアレンジが入力信号の完全な再構成を与えるための条件を確立する．ダウンサンプリング操作は，結果的に，図 2.1 の各分枝における Nyquist サンプリングの基準を満たさない．しかしこのことは，信号の忠実な復元を防げることはないことを注意しておく．図 2.1 の低周波（下の）分枝から，

$$\hat{u}_L(z) = \hat{f}_L(z)\hat{x}(z) \tag{2.35}$$

$$\hat{v}_L(z) = (\mathcal{D}u_L)\wedge(z) = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_L(z^{1/2}) + \hat{u}_L(-z^{1/2})\right) \tag{2.36}$$

$$\hat{w}_L(z) = (\mathcal{U}v_L)\wedge(z) = \hat{v}_L(z^2) \tag{2.37}$$

$$\hat{y}_L(z) = \hat{g}_L(z)\hat{w}_L(z) \tag{2.38}$$

等式 (2.36) と (2.37) は，それぞれダウンサンプルとアップサンプルオペレーションを示している．そして，実際，それらのオペレーションを定義していると考えられる．言い換えれば，ダウンサンプリングオペレータ $\mathcal{D} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathcal{D} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{N/2}$ を次のように定義する．

$$(\mathcal{D}u)(n) = u(2n), n \in \mathbb{Z} \quad \text{又は} \quad n \in \mathbb{Z}_{N/2} \tag{2.39}$$

$\mathcal{D}$の定義 (2.36) と (2.39) は，同値である．なぜなら，

$$\hat{u}(z^{1/2}) + \hat{u}(-z^{1/2}) = \sum_n u(n)z^{-n/2} + \sum_n u(n)(-1)^n z^{-n/2} \tag{2.40}$$

$$= 2\sum_{n\,\text{even}} u(n)z^{-n/2} = 2\sum_m u(2m)z^{-m} \tag{2.41}$$

同様に，アップサンプリングオペレータ $\mathcal{U} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathcal{U} : \mathbb{C}^{N/2} \to \mathbb{C}^N$を次のように定義する．

$$(\mathcal{U}v)(n) = \begin{cases} v(n/2), & n \quad \text{が偶数のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.42}$$

$\mathcal{U}$ の定義 (2.37) と (2.42) は同値である．

(2.35)-(2.38) から，

$$\hat{y}_L(z) = \frac{1}{2}\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(z)\hat{x}(z) + \frac{1}{2}\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(-z)\hat{x}(-z) \tag{2.43}$$

同様に，図 2.1 の high-pass 分枝から，

$$\hat{y}_H(z) = \frac{1}{2}\hat{g}_H(z)\hat{f}_H(z)\hat{x}(z) + \frac{1}{2}\hat{g}_H(z)\hat{f}_H(-z)\hat{x}(-z) \tag{2.44}$$

図 2.1 の完全再構成は，$\hat{x}(z) = \hat{y}_L(z) + \hat{y}_H(z)$ のとき，かつそのときに限り成立する．すなわち，次が成立するときかつそのときに限り成立する．

$$\begin{aligned}\hat{x}(z) &= \frac{1}{2}\left(\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(z) + \hat{g}_H(z)\hat{f}_H(z)\right)\hat{x}(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(-z) + \hat{g}_H(z)\hat{f}_H(-z)\right)\hat{x}(-z)\end{aligned} \tag{2.45}$$

また，次が成立する．

補題 2.6　$P(z), Q(z)$ を zのある固定された多項式とし，すべての$\hat{x}(z)$ について，

$$\hat{x}(z) = P(z)\hat{x}(z) + Q(z)\hat{x}(-z) \tag{2.46}$$

ならば，$P(z) = 1$, かつ $Q(z) = 0$ である．

証明　$\hat{x}(z) = 1$, $\hat{x}(z) = z$を (2.46) に代入すると

$$z = zP(z) + zQ(z) \tag{2.47}$$

$$z = zP(z) - zQ(z) \tag{2.48}$$

が得られる．(2.47) と (2.48) を加減すれば補題を得る．　▮

(2.45) と補題 2.6 から，次の等式が成立するとき，かつそのときに限り，完全再構成が成立することが導かれる．

$$\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(z) + \hat{g}_H(z)\hat{f}_H(z) = 2 \tag{2.49}$$

$$\hat{g}_L(z)\hat{f}_L(-z) + \hat{g}_H(z)\hat{f}_H(-z) = 0 \tag{2.50}$$

等式 (2.49) と (2.50) の素は，次の一つの行列の等式で表される．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{f}_L(z) & \hat{f}_H(z) \\ \hat{f}_L(-z) & \hat{f}_H(-z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{g}_L(z) \\ \hat{g}_H(z)\end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix}\hat{g}_L(z) \\ \hat{g}_H(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ 0\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

$A(z)$ は (2.30) のシステム行列である．

条件 (2.51) は$\tilde{B}$が正規直交であるかどうかにかかわらず完全再構成に必要かつ十分である．もし，$\tilde{B}$が正規直交なら，定理 2.5 により，システム行列 $A(z)$ は，ユニタリ行列であり，それゆえ，逆行列は簡単になる．$A^{-1}(z) = A^*(z) = \bar{A}^T(z)$．したがって (2.51) は，簡単に解くことができ，

$$\begin{pmatrix}\hat{g}_L(z) \\ \hat{g}_H(z)\end{pmatrix} = A^*(z)\begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{\hat{f}_L(z)} \\ \overline{\hat{f}_H(z)}\end{pmatrix} \tag{2.52}$$

となる．(2.52) と (2.18) から，$\tilde{B}$が正規直交のとき，完全再構成には，$g_L = \tilde{f}_L$と $g_H = \tilde{f}_H$が必要である．

内積空間 Vのある正規直交基底$\tilde{B}$ が与えられたとき，$x \in V$は$\tilde{B}$のベクトルの重荷和として分解でき，この重荷は基底ベクトルに対する x の内積により与えられるという観点から見れば，上で述べしたことは，それほどおどろくべき結果ではない．(2.10)-(2.11) から $(x*f)(2k) = \langle x, R^{2k}\tilde{f}\rangle$ であることを思いおこしてみよう．図 2.1 の完全再構成によって，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
x(n) &= (g_L * (\mathcal{UD}(x * f_L)))(n) + (g_H * (\mathcal{UD}(x * f_H)))(n) &(2.53)\\
&= \sum_k g_L(n-2k)\langle x, R^{2k}\tilde{f}_L\rangle + \sum_k g_H(n-2k)\langle x, R^{2k}\tilde{f}_H\rangle &(2.54)\\
&= \sum_k \langle x, R^{2k}\tilde{f}_L\rangle(R^{2k}g_L)(n) + \sum_k \langle x, R^{2k}\tilde{f}_H\rangle(R^{2k}g_H)(n) &(2.55)
\end{aligned}
$$

$x \in \mathbb{C}^N$に対しては，(2.54) と (2.55) のインデックス kは $\mathbb{Z}_{N/2}$上の値をとる．x の分解 (2.55) と$\tilde{B}$の正規直交性の観点からすれば，$g_L = \tilde{f}_L$,$g_H = \tilde{f}_H$となることはおどろくべきことではない．等式 (2.55) は，等式 $g_L = \tilde{f}_L$, $g_H = \tilde{f}_H$と一緒になって，$\tilde{B}$が完備であることを示している．これらの三つの等式は，$x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ あるいは $\mathbb{C}^N$のすべてのベクトルが$\tilde{B}$ の要素の和として表されることを示している．列$\tilde{f}_L$と$\tilde{f}_H$ は，第一世代ウェーブレットである．

もし$\tilde{B}$の正規直交性を仮定しないならば，(2.53)-(2.55) が $g_L \neq \tilde{h}_L$, $g_H \neq \tilde{h}_H$について成立し得ることは注意するに値する．これは,「双直交ウェーブレット」の展開の第一歩である．これについての詳細は，[C] と [CDFer] を見られたい．

結局，次の定理を証明した

定理 2.7　次の二つは同値である．

P1　集合 $\tilde{B} = \{R^{2k}\tilde{f}_L\}_k \cup \{R^{2k}\tilde{f}_H\}_k$が正規直交で，図 2.1 の完全再構成ができる．

P2　(2.30) のシステム行列 $A(z)$ in (2.30) がすべての $z \in \mathbb{T}$ または $z \in \mathbb{W}_N$についてユニタリで，$g_L = \tilde{f}_L$ かつ $g_H = \tilde{f}_H$

2.3　ウェーブレットフィルタの設計

この節では，信号空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ と $\mathbb{C}^N$における分解フィルタ f_Lと f_Hそして合成フィルタ g_Lと g_Hの設計について議論する．正規直交に対する要求は定理 2.5 により，システム行列 $A(z)$ がユニタリであることを決定した．ユニタリ条件により，システム行列 $A(z)$ の第1列のノルムが1でなければならない．それゆえ，次のとおりである．

$$|\hat{f}_L(z)|^2 + |\hat{f}_L(-z)|^2 = 2 \tag{2.56}$$

(2.56) と補題 2.3 から，$|\hat{f}_L(z)|^2$は殆ど奇関数である．それゆえ，$|\hat{f}_L(z)|^2 = 1 + \hat{h}(z)$，ここに$\hat{h}$はある奇関数である．さらに，$\hat{h}(z)$ は実数である．なぜなら，$|\hat{f}_L(z)|^2 - 1$ が実数であるからである．$|\hat{f}_L(z)|^2$は複素数の絶対値の二乗としてすべての $z \in \mathbb{T}$ について下から 0 でおさえられており，すべての $|\hat{f}_L(z)|^2 \leq 2, \forall z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$に対して，上から $|\hat{f}_L(z)|^2$ である．こうして，$-1 \leq \hat{h}(z) \leq 1, \forall z \in \mathbb{T}$ 又は $\mathbb{W}_N$となる．これらの考察から$\hat{f}_L(z)$ の構成のレシピが得られる．

$\hat{h}(z)$ を複素単位円 $\mathbb{T}$ または，1 の N 乗根 $\mathbb{W}_N$の上で定義された任意の実数値関数で，$\hat{h}(z) = -\hat{h}(-z)$ かつ$-1 \leq \hat{h}(z) \leq 1$ とする．$\rho(z)$ を $\mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$で定義されたもう一つの任意の実数値関数とする．このとき次のように定義する．

$$\hat{f}_L(z) = \sqrt{1 + \hat{h}(z)}e^{j\rho(z)} \tag{2.57}$$

(2.56) の $\hat{f}_L(z)$ の形式は最も一般的であってよい．それゆえ，$\rho(z)$ は zについての多項式である必要はないので$\hat{\rho}(z)$ とは記述しない．

$A(z)$ はユニタリであるから，$A^T(z)$ もそうである．$A^T(z)$ の第 1 列のノルムも 1 でなければならないので，$|\hat{f}_L(z)|^2 + |\hat{f}_H(z)|^2 = 2$ である．したがって，$\hat{f}_H(z)$ は次のような形式でなければならない．

$$\hat{f}_H(z) = \sqrt{1 - \hat{h}(z)}e^{j\sigma(z)} \tag{2.58}$$

ここに$\sigma(z)$ は zの実数値関数である．

(2.57) と (2.58) をシステム行列 (2.30) に代入し，$\hat{h}(z)$ が奇関数であることを用いれば，次を得る．

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\hat{h}(z)}e^{j\rho(z)} & \sqrt{1-\hat{h}(z)}e^{j\sigma(z)} \\ \sqrt{1-\hat{h}(z)}e^{j\rho(-z)} & \sqrt{1+\hat{h}(z)}e^{j\sigma(-z)} \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

定理 2.5 も $A^T(z)$ の二つの列ベクトルの直交性を要求している．言いかえれば，$A^T(z)$ の列ベクトルの内積の 0 でなければならない．したがって，次のようになる．

$$\sqrt{1 - \hat{h}^2(z)}\left(e^{j(\rho(z)-\rho(-z))} + e^{j(\sigma(z)-\sigma(-z))}\right) = 0 \tag{2.60}$$

$\hat{h}(z) \neq \pm 1$ ならば，(2.60) は次式を必要とする．ある $k \in \mathbb{Z}$に対して，

$$\sigma(z) - \sigma(-z) = (2k+1)\pi + \rho(z) - \rho(-z) \tag{2.61}$$

kは zに依存するかも知れない．もし，$\hat{h}(z) = \pm 1$ ならば，$\sigma(z)$ と $\rho(z)$ は，制限されない．

もし，$A(z)$ がユニタリならば，上で述べたような $\hat{h}(z), \sigma(z)$ そして $\rho(z)$ について，(2.59) のような形をもつことを示してきた．逆に，そのような行列はユニタリ行列となることは簡単にわかる．結局，合成フィルタ数列 g_L と g_Hは，定理 2.7 を満たすように選ばなければならな

い．フィルタ数列，f_L, f_H, g_L, g_Hの構成のための三つのステップ **S1**, **S2**, **S3** は次のようにまとめることができる．

S1　$z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$に対して実数値関数$\hat{h}(z)$ を，$-1 \leq \hat{h}(z) \leq 1$ そして$\hat{h}(z) = -\hat{h}(-z)$ となるように構成する．任意の実数値関数$\rho(z)$, $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$を構成する．$\hat{f}_L(z) = \sqrt{1+\hat{h}(z)}e^{j\rho(z)}$, $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$とする．

S2　$z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$上の実数値関数$\sigma(z)$ をもし$\hat{h}(z) \neq \pm 1$ なら，$\sigma(z) - \sigma(-z) = (2k+1)\pi + \rho(z) - \rho(-z)$ となるように構成する．ここで，$k \in \mathbb{Z}$ は zに依存するかも知れない任意の整数である．このとき$\hat{f}_H(z) = \sqrt{1-\hat{h}(z)}e^{j\sigma(z)}$, $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$と定義する．

S3　$\hat{g}_L(z) = \overline{\hat{f}_L(z)}$; $\hat{g}_H(z) = \overline{\hat{f}_H(z)}$ と定義する．

定理 2.7 は第 1 段階のどのようなウェーブレットフィルタもすべてこの方法で構成できることを示している．

2.3.1　ウェーブレットフィルタ構成の例

$x \in \mathbb{C}^4$とする．$\omega = e^{-j2\pi/4} = -j$，$\mathbb{W}_4 = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3\} = \{1, -j, -1, j\}$ とする．次のように選ぶ．

$$\hat{h}(1) = 1, \quad \hat{h}(-j) = -1, \quad \hat{h}(-1) = -1, \quad \hat{h}(j) = 1 \tag{2.62}$$

$\rho(z) \equiv 0$ と選ぶ．すると，$\hat{f}_L(z) = \sqrt{1+\hat{h}(z)}$から，

$$\hat{f}_L(1) = \sqrt{2}, \quad \hat{f}_L(-j) = 0, \quad \hat{f}_L(-1) = 0, \quad \hat{f}_L(j) = \sqrt{2} \tag{2.63}$$

となる．フィルタ数列 f_L 自身は，ベクトル $\mathcal{F}f_L = (\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{2})$ の逆 DFT として構成され，$f_L = 2^{-3/2}(2, (1+j), 0, (1-j))$ となる．f_Lが分かったので，多項式$\hat{f}_L(z)$ は次のように書ける．

$$\hat{f}_L(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+j)z^{-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-j)z^{-3} \tag{2.64}$$

$\hat{f}_H(z)$ を計算するために，関数$\sigma(z)$ を選ぶ必要がある．$z = 1, j, -1, -j$に対して $\hat{h}(z) = \pm 1$ であるから，$\sigma(z)$ の選び方は$\rho(z)$ により制限されない．$\sigma(z) \equiv 0$ と選ぶことにする．f_Hの DFT は，$\hat{f}_H(z) = \sqrt{1-\hat{h}(z)}$から計算して，

$$\mathcal{F}f_H = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \tag{2.65}$$

そして，次のようになる．

$$\hat{f}_H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+j)z^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-j)z^{-3} \tag{2.66}$$

フィルタ構成アルゴリズムの第 3 ステップにより，$\hat{g}_L(z) = \overline{\hat{f}_L}(z) = \hat{f}_L(z)$ ，そして $\hat{g}_H(z) = \overline{\hat{f}_H}(z) = \hat{f}_H(z)$.

2.3.1.1

第 2 の例：シャノンのウェーブレット基底

先ほどの例は，A/N の信号空間 $\mathbb{C}^N$ に一般化できる．A, B を次のような集合とする．

$$A = \{0, 1, \ldots, N/4 - 1\} \cup \{3N/4, \ldots, N-1\} \tag{2.67}$$

$$B = \{N/4, \ldots, 3N/4 - 1\} \tag{2.68}$$

次のように定義する．

$$(\mathcal{F}h)(m) = \begin{cases} 1, & m \in A \\ -1, & m \in B \end{cases} \tag{2.69}$$

$$\sigma(z) = \rho(z) \equiv 0 \tag{2.70}$$

これによって次のようになる．

$$(\mathcal{F}f_L)(m) = \hat{f}_L(e^{-j2\pi m/N}) = \begin{cases} \sqrt{2}, & m \in A \\ 0, & m \in B \end{cases} \tag{2.71}$$

$$(\mathcal{F}f_H)(m) = \hat{f}_H(e^{-j2\pi m/N}) = \begin{cases} 0, & m \in A \\ \sqrt{2}, & m \in B \end{cases} \tag{2.72}$$

フィルタ f_H と f_L は，周波数空間において交わらない台を持っている．このフィルタの対によって定義された基底をシャノンのウェーブレット基底と呼ぶ．その理由は，シャノンのサンプリング定理に登場する sinc 関数に類似しているからである．

2.3.1.2

第 3 の例：シャノンの実数値ウェーブレット基底

扱っている信号が実数値ならば，すべての内積が実数になる点で実数値フィルタの方が有利である．これにより，計算時間と記憶容量を節約できる．先ほどの例を実数値基底が得られるように修正する．関数 $f \in \mathbb{C}^N$ は，$(\mathcal{F}f)(m) = \overline{(\mathcal{F}f)}(N-m), \forall m \in \mathbb{Z}_N$ であるときかつそのときに限り実数値である．先ほどの例のフィルタ列 $\mathcal{F}f_L$ と $\mathcal{F}f_H$ はそれぞれ，$m = N/4$ のときにこの基準を満たされない．しかしながら，定理 2.5 は実数値フィルタを得るため $\mathcal{F}f_L$ と $\mathcal{F}f_H$ を

修正する方法は述べていない．

もし，f_Lが実数になるためには，$(\mathcal{F}f_L)(N/4) = \overline{(\mathcal{F}f_L)}(3N/4) \Rightarrow \hat{f}_L(e^{-j\pi/2}) = \overline{\hat{f}_L}(e^{-j3\pi/2}) \Rightarrow \hat{f}_L(-j) = \overline{\hat{f}_L}(j)$ が必要である．さらに，定理 2.5 によって，$\mathbb{W}_N$のすべての zに対して構成行列がユニタリであることが要求される．$z = -j$に対して

$$A(-j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{f}_L(-j) & \hat{f}_H(-j) \\ \hat{f}_L(j) & \hat{f}_H(j) \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

$\hat{f}_L(-j) = j$, $\hat{f}_L(j) = -j$そして$\hat{f}_H(-j) = \hat{f}_H(j) = 1$ とすれば，$A(-j)$ はユニタリであり，$A(j)$ もそうである．$\pm j \neq z \in \mathbb{W}_N$に対して，先ほどの例で定義した$\hat{f}_L(z)$ と $\hat{f}_H(z)$ に対して $A(z)$ のユニタリである．それゆえ，次のフィルタの対は，妥当なウェーブレット基底を定義する．

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f_L)(m) &= \hat{f}_L(e^{-j2\pi m/N}) \\ &= \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \le m \le N/4-1 \quad \text{又は} \quad 3N/4+1 \le m \le N-1 \\ j, & m = N/4 \\ -j, & m = 3N/4 \\ 0, & N/4+1 \le m \le 3N/4-1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f_H)(m) &= \hat{f}_H(e^{-j2\pi m/N}) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \le m \le N/4-1 \quad \text{又は} \quad 3N/4+1 \le m \le N-1 \\ 1, & m = N/4 \quad \text{又は} \quad m = 3N/4 \\ \sqrt{2}, & N/4+1 \le m \le 3N/4-1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.75}$$

$\mathrm{supp}(\mathcal{F}f_L) \cap \mathrm{supp}(\mathcal{F}f_H) = \{N/4, 3N/4\}$ は台のオーバーラップが最小のものである．このフィルタの対で定義される基底をシャノンの実数値ウェーブレット基底と呼ぶ．

2.3.2　時間-周波数局在性

ウェーブレットや時間周波数解析のその他の方法は，φ 変換のように（[KFuFJ]）多くの実際的な応用がある．これらの応用のいくつかは，フィルター列または,「分解関数」が時間（または空間）と周波数の両方の領域 ([K]) において，十分に局在していることが必要である．周波数域について十分局在したウェーブレット基底を構成することは簡単であることを我々は見てきた．すなわち，シャノン基底および実シャノン基底である．ここでは，時間-周波数「同時」局在化の問題について議論する．

図 2.2 は，$V = \ell^2(\mathbb{Z})$ または $V = \mathbb{C}^N$の部分空間 V_T と V_Bを示している．部分空間 V_Tは，Vのある適切な部分集合に固定された台を持つすべての列 $x \in V$で構成される．部分空間 V_B は，固定された台 $\mathcal{F}x$ を持つすべての列 $x \in V$で構成される．$P_T : V \to V_T$, $P_B : V \to V_B$ を

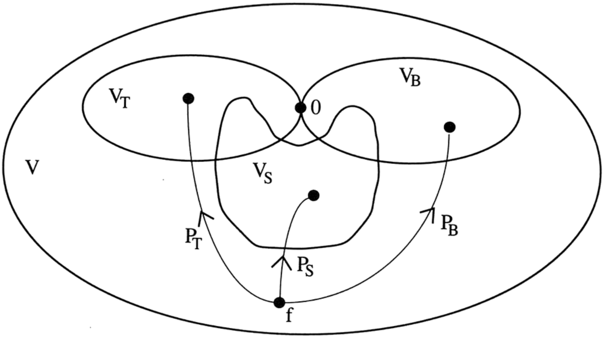


図 2.2 信号空間 V，部分空間 V_Tと V_B，多様体 V_Sそして，V から V_T, V_B, V_Sへの写像

射影作用素とする．

$V_S \subseteq V$ をすべての妥当なウーブレット f_Lと f_Hの集合であるとする．V_Sが Vの部分空間でもアフィン空間でもないことをチェックするのは簡単である．それゆえ，すべての写像 $P_S : V \to V_S$ は射影にはなり得ない．V_Sは実際，$\ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$ の単位球面に埋め込まれた多様体である．$\psi = P_S f \in V_S$を任意の $f \in V$ に対して fと ψの距離 $\|f - \psi\|_V = \langle f - \psi, f - \psi \rangle^{1/2}$ が最小になるような作用素$\psi = P_S f \in V_S$であると定義する．さて，$V = \mathbb{C}^N$に対するこの作用素を構成しよう．

任意の与えられた $f \in \mathbb{C}^N$に対して，fに最も近いウェーブレット ψを見つけよう．もし，ψ が fに最も近いウェーブレットならば，$\|f - \psi\|^2_{\mathbb{C}^N}$ は最小となる．

$$\begin{aligned}
\|f - \psi\|^2_{\mathbb{C}^N} &= \frac{1}{N}\|(\mathcal{F}f) - (\mathcal{F}\psi)\|^2_{\mathbb{C}^N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |(\mathcal{F}f)(m) - (\mathcal{F}\psi)(m)|^2 \qquad (2.76) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} \big(|(\mathcal{F}f)(m) - (\mathcal{F}\psi)(m)|^2 \\
&\qquad + |(\mathcal{F}f)(m+N/2) - (\mathcal{F}\psi)(m+N/2)|^2\big) \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

すべての $m \in \mathbb{Z}_{N/2}$について，次のように定義する．

$$A(m) = |(\mathcal{F}f)(m) - (\mathcal{F}\psi)(m)|^2 + |(\mathcal{F}f)(m+N/2) - (\mathcal{F}\psi)(m+N/2)|^2 \qquad (2.78)$$

(2.76)-(2.78) から

$$\|f - \psi\|^2_{\mathbb{C}^N} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} A(m) \qquad (2.79)$$

$\|f-\psi\|_{\mathbb{C}^N}^2$を最小にするために，各 $m \in \mathbb{Z}_{N/2}$について $A(m)$ を最小化する．

ψ が妥当なウェーブレットフィルタ f_Lまたは f_Hであるためには，次の等式が $m \in \mathbb{Z}_N$について成立しなければならない．

$$(\mathcal{F}\psi)(m) = \sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)}e^{j\rho(e^{-j2\pi m/N})} \tag{2.80}$$

これは，ウェーブレット構成アルゴリズムのステップ **S1** の4番目に設定された条件による．同様に，$m \in \mathbb{Z}_N$について $(\mathcal{F}h)(m+N/2) = -(\mathcal{F}h)(m) \in [-1,1]$ でなければならず，$\rho(e^{-j2\pi m/N})$ は実数でなければならない．

$a(m)$, $b(m)$, $\theta(m)$, $\gamma(m)$ を次のように定義する．

$$(\mathcal{F}f)(m) = a(m)e^{j\theta(m)}, \quad m = 0,\ldots,(N/2-1) \tag{2.81}$$

$$(\mathcal{F}f)(m+N/2) = b(m)e^{j\gamma(m)}, \quad m = 0,\ldots,(N/2-1) \tag{2.82}$$

ここで，$m \in \mathbb{Z}_{N/2}$について， $a(m), b(m) \in \mathbb{R}$, $a(m), b(m) \geq 0$, $\theta(m), \gamma(m) \in [-\pi,\pi]$ (2.78) と (2.80)-(2.82) から $m = 0,\ldots,(N/2-1)$ について，

$$\begin{aligned} A(m) &= \left|a(m)e^{j\theta(m)} - \sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)}e^{j\rho(e^{-j2\pi m/N})}\right|^2 \\ &\quad + \left|b(m)e^{j\gamma(m)} - \sqrt{1-(\mathcal{F}h)(m)}e^{j\rho(-e^{-j2\pi m/N})}\right|^2 \end{aligned} \tag{2.83}$$

もし，ある $m = m_0$ について $a(m) = b(m) = 0$ ならば，(2.83) より $A(m_0) = 2$ である．そして， $(\mathcal{F}h)(m_0) \in [-1,1]$, $\rho(e^{-j2\pi m_0/N}) \in [-\pi,\pi]$ そして $\rho(-e^{-j2\pi m_0/N}) \in [-\pi,\pi]$ の選択の際に欲しかったすべての自由性を得る．したがって，与えられた $f \in V$に最も近いウェーブレットψ は無限に多く存在する．

ここで，$a(m)$ と $b(m)$ が共に0でないと仮定する．(2.83) より， $A(m)$ を最小にするために，$\rho(e^{-j2\pi m/N}) = \theta(m)$ そして，$\rho(-e^{-j2\pi m/N}) = \gamma(m)$ としたい．すると，(2.83) は，

$$A(m) = 2 + a^2(m) + b^2(m) - 2\left(a(m)\sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)} + b(m)\sqrt{1-(\mathcal{F}h)(m)}\right) \tag{2.84}$$

(2.84) において，$a(m)$ と $b(m)$ は固定されており，$A(m)$ を最小化するために $(\mathcal{F}h)(m) \in [-1,1]$ と選びたい．これは，$a(m)\sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)} + b(m)\sqrt{1-(\mathcal{F}h)(m)}$を最小化するために $(\mathcal{F}h)(m)$ を選ぶことで達成できる．

$a, b \geq 0$ が固定されており，共に0でないなら，関数 $f(x) = a\sqrt{1+x} + b\sqrt{1-x}$は， $[-1,1]$ 上 $x = (a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ で最大値に到達する．したがって，$a(m)$ と $b(m)$ が0ではないなら，$a(m)\sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)} + b(m)\sqrt{1-(\mathcal{F}h)(m)}$は次のような $(\mathcal{F}h)(m) \in [-1,1]$, $m \in \mathbb{Z}_{N/2}$を選択することにより最大（そして $A(m)$ は最小）になる．

$$(\mathcal{F}h)(m) = \frac{a^2(m)-b^2(m)}{a^2(m)+b^2(m)} = \frac{|(\mathcal{F}f)(m)|^2 - |(\mathcal{F}f)(m+N/2)|^2}{|(\mathcal{F}f)(m)|^2 + |(\mathcal{F}f)(m+N/2)|^2}, \quad m \in \mathbb{Z}_{N/2} \tag{2.85}$$

こうして，$f \in V$に最も近いウェーブレット ψ の DFT 係数 $(\mathcal{F}\psi)(m)$, $m \in \mathbb{Z}_{N/2}$は，

$$(\mathcal{F}\psi)(m) = \sqrt{1+(\mathcal{F}h)(m)}e^{j\theta(m)} = \frac{\sqrt{2}a(m)e^{j\theta(m)}}{\sqrt{a^2(m)+b^2(m)}} \tag{2.86}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\mathcal{F}f)(m)}{\sqrt{|(\mathcal{F}f)(m)|^2+|(\mathcal{F}f)(m+N/2)|^2}}, \quad m \in \mathbb{Z}_{N/2} \tag{2.87}$$

$N/2 \le m < N$について，ウェーブレット構成アルゴリズムのステップ **S1** に従うと，$(\mathcal{F}h)(m) = -(\mathcal{F}h)(m-N/2)$ である．したがって，(2.85) より，$N/2 \le m < N$については，次のようになる．

$$(\mathcal{F}h)(m) = -(\mathcal{F}h)(m-N/2) = -\frac{|(\mathcal{F}f)(m-N/2)|^2 - |(\mathcal{F}f)(m)|^2}{|(\mathcal{F}f)(m-N/2)|^2 + |(\mathcal{F}f)(m)|^2} \tag{2.88}$$

$\mathbb{Z}_N$におけるインデックスの計算を $(\mathcal{F}f)$ に施すと，$(\mathcal{F}f)(m-N/2) = \mathcal{F}(m+N/2)$ であることにより，(2.85) と (2.88) から，(2.85) と (2.87) は $m \in \mathbb{Z}_{N/2}$だけでなく，$m \in \mathbb{Z}_N$のすべての範囲で成立することに注意しておく．

まとめとして，与えられたベクトル $f \in \mathbb{C}^N, f \ne 0$ に最も近いウェーブレットψを構成するための次の簡単な 3 ステップアルゴリズムを示すことができる．

S1 もし，$(\mathcal{F}f)(m) = (\mathcal{F}f)(m+N/2) = 0$ ならば，$|(\mathcal{F}\psi)(m)|$ を任意の値 $C \in [0, \sqrt{2}]$ とする．$|(\mathcal{F}\psi)(m+N/2)|$ は，$\sqrt{2-C^2}$とする．$(\mathcal{F}\psi)(m)$ と $(\mathcal{F}\psi)(m+N/2)$ のそれぞれの二つの位相項$\rho(e^{-j2\pi m/N})$ と$\rho(-e^{-j2\pi m/N})$ は $[-\pi, \pi]$ の任意の値とする．

S2 もし，$(\mathcal{F}f)(m)$ と $(\mathcal{F}f)(m+N/2)$ が共に 0 でないならば，

$$(\mathcal{F}\psi)(m) = \frac{\sqrt{2}(\mathcal{F}f)(m)}{\sqrt{|(\mathcal{F}f)(m)|^2+|(\mathcal{F}f)(m+N/2)|^2}} \tag{2.89}$$

とする．

S3 $\mathcal{F}\psi$ から，DFT 逆変換によりψを計算する．

このアルゴリズムは，作用素 $P_S : V \to V_S$, $V = \mathbb{C}^N$の操作的な記述である． P_S と同様の記述が，信号空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ でも可能である．

上記のアルゴリズムから，$\mathcal{F}f$が実数値ならば，$\mathcal{F}\psi$ もまた実数値になるような fに最も近いウェーブレット ψを常に見つけることができることを注意しておく．

φ-変換のアナライジング関数の場合（[KFuFJ]），時間-周波数局所化は，二重射影作用素 $(P_B P_T)$ の固有ベクトルの計算を含んでいる．この固有ベクトルは，V_S上にないかも知れないし，妥当なウェーブレットではないかも知れない．局所化されたウェーブレットを構成するひとつのアプローチは，$(P_B P_T)$ の固有ベクトル ϕを P_Sにより V_Sに写像することであろう．ψを P_Sによる ϕの像とする．もし，ϕの台が周波数域についてそれほど厳しく制限されていないなら，すなわちいかなる m についても $(\mathcal{F}\phi)(m)$ と $(\mathcal{F}\phi)(m+N/2)$ の両方が 0 であるというこ

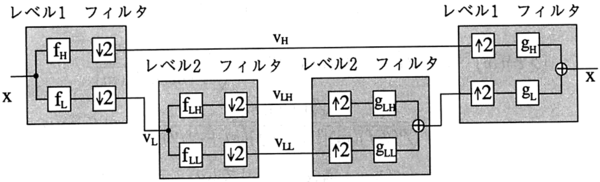


図 **2.3**　下の分枝に対する反復

とがないなら，(2.89) は ψ が，厳密に fの周波数域の局所化を保持することを示している．もし，$\mathcal{F}\phi$ の台が厳しく制限されていたとしても，**S1** における定数 Cをよく考えて選ぶことによりある程度 $\mathcal{F}\psi$の台を制御できる．しかしながら，この節の解析ではψ の時間的局所化について何も言うことはできない．

ϕ を ϕと $\mathcal{F}\phi$が共に実数値となるように選ぶことは可能である．したがって，時間と周波数域の両方について実数値となるような，ϕに最も近いウェーブレットψを導出できる．

$(\mathcal{F}g)(m) = \sqrt{2}\left(|(\mathcal{F}\phi)(m)|^2 + |(\mathcal{F}\phi)(m+N/2)|^2\right)^{-1/2}$と定義する．(2.89) から，$\psi = \phi * g$ である．これによると，ϕと gが時間に関して十分局所化されているならば，ψ もそうである．関数ϕ は十分局所化するよう設計されているが，gの時間的な局所性は明らかでない．この疑問はまだ残されたままである．

2.4　一次元信号に関するウェーブレット反復

図 2.1 において，列 v_Lを x に対して行ったのと同様の扱いを行うと，図 2.3 に示すような状況を得る．

v_Lと v_Hの両方を分解し，再構成すると，図 2.4 の状況になる．レベル 1 フィルタ f_L, f_H, g_L, g_Hと同様に，レベル 2 フィルタ f_{LL}, f_{LH}, f_{HL}, f_{HH}, g_{LL}, g_{LH}, g_{HL}, g_{HH} が，直交分解と完全再構成を与えるためには，定理 2.7 における示した要求に従わねばならない．行列

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_{LL}(z) & \hat{f}_{LH}(z) \\ \hat{f}_{LL}(-z) & \hat{f}_{LH}(-z) \end{pmatrix} \quad と \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_{HL}(z) & \hat{f}_{HH}(z) \\ \hat{f}_{HL}(-z) & \hat{f}_{HH}(-z) \end{pmatrix}$$

はユニタリでなければならない．再構成フィルタ g_{LL}, g_{LH}, g_{HL}そして g_{HH} はそれぞれ $\tilde{f}_{LL}$, $\tilde{f}_{LH}$, $\tilde{f}_{HL}$，そして $\tilde{f}_{HH}$に等しくなければならない．このプロセスは，v_{LL}, v_{LH}, v_{HL}, または v_{HH}についてもくり返すことができる．

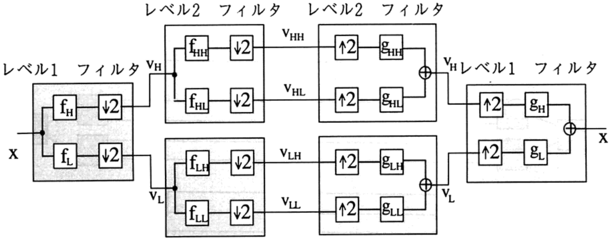


図 **2.4**　両分枝の反復

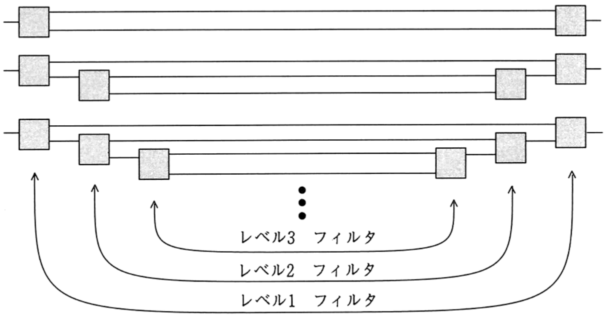


図 **2.5**　古典的ウェーブレット解析における生成されるグラフ列

2.4.1　ウェーブレット，フィルタバンク，ウェーブレットパケット

古典的なウェーブレット解析では，反復は最も下位の分枝についてのみ行われる．すると，ウェーブレット分解によって図 2.5 に示す一連のグラフが生成される．図 2.5 において，各ノードは 2 のアップサンプルまたは 2 のダウンサンプルオペレータに関連する一つのフィルタ対を示している．分析と合成の各レベルにおけるフィルタの数は一定である．

すべてのレベルにおいて全部の反復を行った場合，図 2.6 に示すような一連のグラフの列を得る．フィルタの数は，各分析と合成のレベルにおいて倍になる．これは，フィルタバンク派で採用されている．しかし，反復への第 3 のアプローチ，「最適ウェーブレットパケット」が Coifmann, Mayer, Quake と Wickerhauser ([CoMW] 参照) により開拓されている．この方法は，図 2.7 に示すように上の二つの方法をアレンジするところに特徴がある．最適ウェーブレットパケット法においては，変換ツリーのあるレベルにおいて反復を行うか行わないかは，表現の最適性についてのある基準によって決定される．

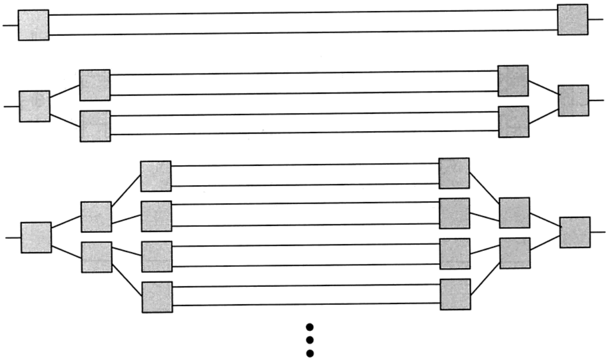


図 **2.6**　古典的フィルタバンク解析において生成されるグラフ列

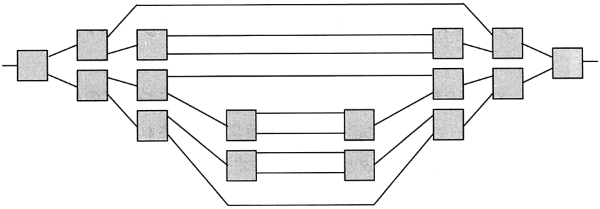


図 **2.7**　不規則な反復がウェーブレットパケット表現の特徴

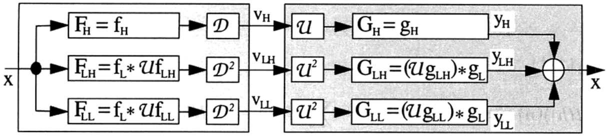


図 **2.8** 三つの直交部分空間への直接分解

2.4.2 非反復構造との等価性

図 2.3 と図 2.4 の反復構造には非反復的な等価物があり，それはこの節で述べ，証明する定理の助けをかりて構築できる．この等価な非反復構造の研究はウェーブレット信号分解の性質の理解を深めてくれる．

「ビッグスター」 $\ast$ を集合の和合記号ビッグカップと同じように，たたみ込みに適用すると定義する．すなわち，

$$\ast_{i=n_1}^{n_2} h_i = h_{n_1} * h_{n_1+1} * \ldots * h_{n_2} \tag{2.90}$$

$\alpha \in \{L, H\}^*$ を文字列とする． $|\alpha| > 0$ に対して，次のように定義する．

$$F_\alpha = \ast_{i=1}^{|\alpha|} \mathcal{U}^{i-1} f_{\text{pfx}(\alpha,i)} \tag{2.91}$$

$$G_\alpha = \ast_{i=1}^{|\alpha|} \mathcal{U}^{i-1} g_{\text{pfx}(\alpha,i)} \tag{2.92}$$

この記法の例を一つあげよう． $F_{HLL} = f_H * (\mathcal{U}f_{HL}) * (\mathcal{U}^2 f_{HLL})$．次の定理は，フィルタ F_α と G_α はフィルタ列のかわりに用いることができることを示している．それは，たとえば，図 2.8 の非反復構造が図 2.3 の反復構造と等価であることを示す．非反復構造における分解フィルタは F_{LL}, F_{LH}, F_H であり，合成フィルタは， G_{LL}, G_{LH}, G_H である．

無限次元の場合，$X_i = \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}^+$ と定義する．有限次元の場合， $X_i = \mathbb{Z}_{N2^{1-i}}$, $i \in \mathbb{Z}^+$ と定義する． このように定義された X_i に対し，次の補題と定理が有限かつ無限次元信号空間において，同時に成立する．

補題 2.8 有限次元の場合， $2^n \mid N$ とする． $i \in \{1, \ldots, n\}$ とすると，

(a) $f \in \ell^2(X_i)$ と $h \in \ell^1(X_{i+1})$ に対して， $(\mathcal{D}f) * h = \mathcal{D}(f * \mathcal{U}h) \in \ell^2(X_{i+1})$

(b) $f \in \ell^2(X_{i+1})$ と $h \in \ell^1(X_{i+1})$ に対して， $\mathcal{U}(f * h) = (\mathcal{U}f) * (\mathcal{U}h) \in \ell^2(X_i)$

証明

(a) $n \in X_{i+1}$に対して，

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}(f * \mathcal{U}h))(n) &= (f * \mathcal{U}h)(2n) = \sum_{m \in X_i} f(2n-m)(\mathcal{U}h)(m) = \sum_{k \in X_{i+1}} f(2n-2k)h(k) \qquad (2.93)\\ &= \sum_{k \in X_{i+1}} (\mathcal{D}f)(n-k)h(k) = ((\mathcal{D}f) * h)(n) \qquad (2.94)\end{aligned}$$

(b) $n \in X_i$とする．ある $m \in X_{i+1}$に対して，$n = 2m$ ならば，

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}(f * h))(n) &= (f * h)(m) = \sum_{k \in X_{i+1}} f(m-k)h(k) = \sum_{k \in X_{i+1}} (\mathcal{U}f)(2m-2k)(\mathcal{U}h)(2k) \qquad (2.95)\\ &= \sum_{\ell \in X_i} (\mathcal{U}f)(n-\ell)(\mathcal{U}h)(\ell) = ((\mathcal{U}f) * (\mathcal{U}h))(n) \qquad (2.96)\end{aligned}$$

等式 (2.96) が (2.95) から導かれるのは，ある $k \in X_{i+1}$に対して，$\ell = 2k$でないなら，$(\mathcal{U}h)(\ell) = 0$ であるからである．

n が $2m$, $m \in X_{i+1}$の形をしていないなら，$(\mathcal{U}(f*h))(n) = 0$ である．しかしながら，この場合 $((\mathcal{U}f) * (\mathcal{U}h))(n) = \sum_{\ell \in X_i} (\mathcal{U}f)(n-\ell)(\mathcal{U}h)(\ell)$ は，ゼロである．なぜなら，$(\mathcal{U}f)(n-\ell) = 0$ の場合，ある $k \in X_{i+1}$について $\ell = 2k$であるときにのみ $(\mathcal{U}h)(\ell) \neq 0$ であるからである．∎

定理 2.9　$\alpha \in \{L, H\}^*$, $|\alpha| = n > 0$ を固定する． $2^n \mid N$とする．$\beta_i = \mathrm{pfx}(\alpha, i)$,$i = 1, \ldots, n$ と定義する．

1.　$x \in \ell^2(X_1)$, $f_{\beta_i} \in \ell^1(X_i)$ とする．

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f_{\beta_n} &* \mathcal{D}(f_{\beta_{n-1}} * \ldots * \mathcal{D}(f_{\beta_2} * \mathcal{D}(f_{\beta_1} * x)) \ldots))\\ &= \mathcal{D}^n \left(x * \left(\mathop{\Large *}_{i=1}^{n} (\mathcal{U}^{i-1} f_{\beta_i})\right)\right) \qquad (2.97)\\ &= \mathcal{D}^n (x * F_\alpha) \qquad (2.98)\end{aligned}$$

2.　$v_\alpha \in \ell^2(X_{n+1})$ かつ $g_{\beta_i} \in \ell^1(X_i)$ とする．

$$\begin{aligned}g_{\beta_1} &* (\mathcal{U}(g_{\beta_2} * \ldots * \mathcal{U}(g_{\beta_{n-1}} * (\mathcal{U}(g_{\beta_n} * \mathcal{U}v_\alpha)) \ldots))\\ &= (\mathcal{U}^n v_\alpha) * \left(\mathop{\Large *}_{i=1}^{n} (\mathcal{U}^{i-1} g_{\beta_i})\right) \qquad (2.99)\\ &= (\mathcal{U}^n v_\alpha) * G_\alpha \qquad (2.100)\end{aligned}$$

定理 2.9 の各々の部分は，補題 2.8 の対応する部分を反復使用することにより簡単に導くことができる．この定理は，反復構造に等価な非反復構造を決める方法を説明している．特に，図

2.3 と図 2.8 の等価性を示している．

2.4.3 ウェーブレット基底

等価な非反復フィルタに関する知識は，信号との内積が信号の変換領域を導き出すような基底ベクトルを決定することを容易にする．

$\alpha \in \{L, H\}^*$ を文字列とする．

$$\tilde{B}_\alpha = \left\{R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\}_{k \in X_{|\alpha|+1}} \tag{2.101}$$

$$V_\alpha = \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left(\tilde{B}_\alpha\right)\right) \tag{2.102}$$

と定義する．(2.101) における $\tilde{B}_\alpha$ の定義は，(2.12) や (2.13) における$\tilde{B}_L$ や $\tilde{B}_H$ の定義と矛盾しない．$\tilde{B}_\alpha$ は共役で時間反転した非反復等価フィルタ $\tilde{F}_\alpha$ を時間移動したものから構成されている．V_α は $\tilde{B}_\alpha$で張られた $V = \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$ の部分空間となるように定義される．2.2 節において $\tilde{B}_L, \tilde{B}_H$ が $V_L, V_H \subseteq V$ の基底を生成することを見てきた．ここでは部分空間 V_α が 反復によって直交する部分空間 $V_{\alpha L}$ と $V_{\alpha H}$の直和に分割されていることを示す．

定理 2.10　反復表現　$\alpha \in \{L, H\}^*$, $|\alpha| > 0$ を固定する．有限次元の場合，$2^{(|\alpha|+1)} \mid N$とする．$\beta \in \{L, H\}$ とする．$\tilde{B}_\alpha$ が V_α, $V_\alpha \subseteq \ell^2(X_1)$ の正規直交基底であるとする．また，$f_{\alpha L}, f_{\alpha H} \in \ell^1(X_{|\alpha|+1})$ は行列

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_{\alpha L}(z) & \hat{f}_{\alpha H}(z) \\ \hat{f}_{\alpha L}(-z) & \hat{f}_{\alpha H}(-z) \end{pmatrix} \tag{2.103}$$

が 任意の $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_{N2^{-|\alpha|}}$ (定理 2.5 で述べたように) についてユニタリであるとする．

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \tilde{F}_\alpha * \mathcal{U}^{|\alpha|}\tilde{f}_{\alpha\beta} \tag{2.104}$$

とし，$\tilde{B}_{\alpha\beta}$ と $V_{\alpha\beta}$ は (2.101) と (2.102) のように定義されているとする．すると，V_α は $\{V_{\alpha\beta}\}_\beta$ の直交する直和，$V_\alpha = V_{\alpha L} \oplus V_{\alpha H}$である．$\tilde{B}_{\alpha\beta}$ もまた $V_{\alpha\beta}$の正規直交基底となる．

定理 2.10 において，$\tilde{F}_\alpha$ はフィルタ $\{f_\gamma\}_\gamma$ により決定されると考えてよい．ここで，γ は αのあるプレフィックスであるが，これは本質的ではない．この定理は定理 2.23 として多次元の場合にも証明される．

別個の文字列 αによりラベル付けされた分解，合成の枝の集合により特徴づけられたいかなる反復構造においても，等価な非反復フィルタ $\{F_\alpha\}_\alpha$は，全部合わせて信号区間 $V = \ell^2(\mathbb{Z})$ ま

たは $\mathbb{C}^N$の次のウェーブレット基底を生成する，と言う．

$$\tilde{B} = \bigcup_\alpha \tilde{B}_\alpha = \bigcup_\alpha \left\{ R^{2^{|\alpha|}k} \tilde{F}_\alpha \right\}_{k \in X_{|\alpha|+1}} \tag{2.105}$$

例えば，図 2.3 と図 2.8 においては，ウェーブレット基底は $\tilde{B} = \tilde{B}_{LL} \cup \tilde{B}_{LH} \cup \tilde{B}_H$である．以下では，数列 v_α は信号 x の $\tilde{B}_\alpha$ のベクトルに対する内積であるウェーブレット変換係数と呼ばれる数により構成されることを示す．$\{v_\alpha\}_\alpha$ の数は完全に信号 x を決定する．y_αは $\tilde{B}_\alpha$の線形結合であり，重みづけされた係数は v_αの要素であることも示す．すると，(2.102) により $y_\alpha \in V_\alpha$である．

x が入力信号であるなら，また，定理 2.9 の用語で，反復過程フィルタが $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_{|\alpha|}}$ であるなら，分解と変換部分は次のような計算により構成される．まず，$x * f_{\beta_1}$，次は $\mathcal{D}(x * f_{\beta_1})$，次は $f_{\beta_2} * (\mathcal{D}(x * f_{\beta_1}))$，次は $\mathcal{D}(f_{\beta 2} * (\mathcal{D}(x * f_{\beta_1})))\cdots$．$|\alpha|$ 回のフィルタリングとダウンサンプリングステップを経て，(2.98) より $\mathcal{D}^{|\alpha|}(x * F_\alpha)$ となる．次に注意する．$k \in X_{|\alpha|+1}$に対して

$$\begin{aligned}
v_\alpha(k) &= \left(\mathcal{D}^{|\alpha|}(x * F_\alpha)\right)(k) = (x * F_\alpha)\left(2^{|\alpha|}k\right) \\
&= \sum_{\ell \in X_1} x(\ell) F_\alpha\left(2^{|\alpha|}k - \ell\right) && (2.106) \\
&= \sum_{\ell \in X_1} x(\ell) \overline{\tilde{F}_\alpha}\left(\ell - 2^{|\alpha|}k\right) = \sum_{\ell \in X_1} x(\ell) \overline{\left(R^{2^{|\alpha|}k} \tilde{F}_\alpha\right)}(\ell) && (2.107) \\
&= \left\langle x, R^{2^{|\alpha|}k} \tilde{F}_\alpha \right\rangle && (2.108)
\end{aligned}$$

分解部の出力 v_α は，まさにウェーブレット基底関数 $\tilde{B}_\alpha = \{R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\}_{k \in X_{|\alpha|+1}}$に対応する x のウェーブレット展開における係数の集合である．

解析段階の出力を $v_\alpha = (\mathcal{D}^{|\alpha|}(x * F_\alpha))$ とする．合成，または再構成段階に対応する出力を考える．この出力は，次のような数列計算の結果である．

$$v_\alpha \to \mathcal{U}v_\alpha \to g_{\beta_{|\alpha|}} * \mathcal{U}v_\alpha \to \mathcal{U}\left(g_{\beta_{|\alpha|}} * \mathcal{U}v_\alpha\right) \to g_{\beta_{|\alpha|-1}} * \mathcal{U}\left(g_{\beta_{|\alpha|}} * \mathcal{U}v_\alpha\right) \to \cdots \tag{2.109}$$

定理 2.9 の B により，$|\alpha|$ の段階のあと，最終的な出力は $(\mathcal{U}^{|\alpha|}v_\alpha) * G_\alpha$である．$n \in X_1$に対して $(\mathcal{U}^{|\alpha|}v_\alpha) * G_\alpha$は

$$\begin{aligned}
\left(\left(\mathcal{U}^{|\alpha|}v_\alpha\right) * G_\alpha\right)(n) &= \sum_{\ell \in X_1} \left(\mathcal{U}^{|\alpha|}v_\alpha\right)(\ell) G_\alpha(n - \ell) \\
&= \sum_{k \in X_{|\alpha|+1}} v_\alpha(k) G_\alpha\left(n - 2^{|\alpha|}k\right) && (2.110) \\
&= \sum_{k \in X_{|\alpha|+1}} v_\alpha(k) \left(R^{2^{|\alpha|}k} G_\alpha\right)(n) && (2.111)
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\left(\left(\mathcal{U}^{|\alpha|}v_\alpha\right)*G_\alpha\right)=\sum_{k\in X_{|\alpha|+1}}v_\alpha(k)\left(R^{2^{|\alpha|}k}G_\alpha\right) \tag{2.112}$$

となる．

$f_{\beta_1},\ldots,f_{\beta_\alpha}$ を正規直交ウェーブレット $\{R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\}_{k\in X_{|\alpha|+1}}$ が得られるように選択し，完全再構成条件にしたがって $G_\alpha=\tilde{F}_\alpha$ となるように $g_{\beta_i}=\tilde{f}_{\beta_i}$ と選択するならば，(2.108) と (2.112) から，枝 α の出力は，次のように書くことができる．

$$y_\alpha=\sum_{k\in X_{|\alpha|+1}}\left\langle x,R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\rangle R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha \tag{2.113}$$

2.4.4　重複フィルタによる反復

レベル 2 のフィルタ $f_{LL}, f_{LH}, f_{HL}, f_{HH}$の選択 を考える．レベル 3 のフィルタ $f_{LLL}, f_{LLH}, f_{LHL}$などを同様に考える．定理 2.5 に従って，フィルタを各レベルごとに単独で，別々に構成できる．また，1 より高いレベルのフィルタを，レベル 1 のフィルタ f_L と f_H から生成することもできる．

フィルタ $f\in\ell^1(\mathbb{Z})$ の場合，明らかに $f_{\alpha L}=f_L$ と $f_{\alpha H}=f_H$を選択できる．ここでα は，アルファベット $\{L,H\}$ 上の文字列である．例えば，f_L が $\mathbb{C}^N$ であるなら $f_{\alpha L}$ は $\mathbb{C}^{N2^{-|\alpha|}}$なので，有限信号の場合これは全く意味がない．$f_L$ と f_H が (2.30) の $A(z)$ のように任意の $z\in\mathbb{W}_N$ に対してユニタリであるならば，$f_{\alpha L}$ と $f_{\alpha H}$を任意の $z\in\mathbb{W}_{N2^{-|\alpha|}}$に対して$\hat{f}_{\alpha L}(z)=\hat{f}_L(z)$, $\hat{f}_{\alpha H}(z)=\hat{f}_H(z)$ と定めることができ，(2.103) は任意の $z\in\mathbb{W}_{N2^{-|\alpha|}}$ に対してユニタリとなる．次の二つの補題は，この方法を述べている．

補題 2.11　**折り畳み補題**　$f\in\mathbb{C}^N, h\in\mathbb{C}^{N/2}$とする．このとき，次は同値である．

P1　任意の $z\in\mathbb{W}_{N/2}$ に対し，$\hat{h}(z)=\hat{f}(z)$ 任意の $z\in\mathbb{W}_{N/2}$

P2　任意の $m\in\mathbb{Z}_{N/2}$ に対し，$(\mathcal{F}h)(m)=(\mathcal{F}f)(2m)$

P3　任意の $n\in\mathbb{Z}_{N/2}$ に対し，$h(n)=f(n)+f(n+N/2)$

折り畳み（folding）補題は，多次元信号のウェーブレット分解について論じるときに，補題 2.24 のように一般的な形式で証明する．この補題は，例えば「折り畳んだ」f_Lによって $f_L\in\mathbb{C}^N$ から $f_{LL}\in\mathbb{C}^{N/2}$ が得られることを示す．ここで f_Lを「折り畳む」とは，f_L を二等分し，一方を他方のはじめから $f_{LL}(n)=f_L(n)+f_L(n+N/2)$ のように合計することをいう．同様に，f_{LH} を得るために $f_H(n)+f_H(n+N/2)$ を計算する．もし $4\mid N$であれば，例えば，$n\in\mathbb{Z}_{N/4}$に対し $f_{HHL}(n)=f_{HL}(n)+f_{HL}(n+N/4)=[f_L(n)+f_L(n+N/2)]+[f_L(n+N/4)+f_L(n+3N/4)]$,

であることから $f_{HHL} \in \mathbb{C}^{N/4}$ と定義して続けることができる．次の補題は，補題 2.11 と直接関係がある．

補題 2.12　$2^{|\alpha|} \mid N$, $f \in \mathbb{C}^N$, $h \in \mathbb{C}^{N2^{-|\alpha|}}$ とする．このとき，次は同値である．

P1　任意の $z \in \mathbb{W}_{N2^{-|\alpha|}}$ に対し，$\hat{h}(z) = \hat{f}(z)$

P2　任意の $m \in \mathbb{Z}_{N2^{-|\alpha|}}$ に対し，$(\mathcal{F}h)(m) = (\mathcal{F}f)(2^{|\alpha|}m)$

P3　任意の $n \in \mathbb{Z}_{N2^{-|\alpha|}}$ に対し，$h(n) = \sum_{i=0}^{[2^{|\alpha|}-1]} f(n + iN2^{-|\alpha|})$

2.4.5　古典的ウェーブレット解析に対する定理

以下の定理は，古典的ウェーブレット解析の場合におけるこの節の結果を要約している．ここで重複フィルタを使うことにより，反復はローパスの枝にのみおこる．この特別な場合において，非反復解析フィルタの数列は $F_H, F_{LH}, F_{LLH}, \ldots, F_{\alpha H}, F_{\alpha L}$ となる．ここで，$\alpha \in \{L\}^*$

定理 2.13　$N \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \{L\}^*$, $2^{(|\alpha|+1)} \mid N$, そして β を α, $0 \leq |\beta| \leq |\alpha|$ のプレフィックス (prefix) とする． (2.30) のシステム行列が，任意の $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$ でユニタリとなるように，$f_L, f_H \in \ell^1(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$ を仮定する． $F_{\alpha L}$ と $F_{\beta H}$ は，次を満足すると仮定する．

$$\hat{F}_{\alpha L}(z) = \prod_{i=1}^{|\alpha|+1} \hat{f}_L\left(z^{2^{(i-1)}}\right) \tag{2.114}$$

$$\hat{F}_{\beta H}(z) = \hat{f}_H\left(z^{2^{|\beta|}}\right) \prod_{i=1}^{|\beta|} \hat{f}_L\left(z^{2^{(i-1)}}\right) \tag{2.115}$$

このとき

$$\tilde{B} = \tilde{B}_{\alpha L} \cup \left(\int \bigcup_{\substack{\beta \\ 0 \leq |\beta| \leq |\alpha|}} \tilde{B}_{\beta H} \right) \tag{2.116}$$

は， $V = \ell^2(\mathbb{Z})$ または $\mathbb{C}^N$ に対する正規直交基底である．

証明　$\hat{f}_{\alpha L}(z) = \hat{f}_L(z)$, $\hat{f}_{\beta H}(z) = \hat{f}_H(z)$ であるような $f_{\alpha L} \in \ell^1(X_{|\alpha|+1})$ と $f_{\beta H} \in \ell^1(X_{|\beta|+1})$ を定義する．このとき， (補題 2.12, (2.37) より) (2.114) と (2.115) は (2.91) と両立する．反復定理に基づく帰納法で部分空間 $V_{\beta L}$ を分解し，結論が得られる．　∎

有限次元の場合， $F_{\alpha L}$ と $F_{\beta H}$ の Fourier 変換に対する次の表現は， (2.114) と (2.115) の等式から，直接導かれる．

$$(\mathcal{F}F_{\alpha L})(m) = \prod_{i=1}^{|\alpha|+1}(\mathcal{F}f_L)(2^{(i-1)}m) \tag{2.117}$$

$$(\mathcal{F}F_{\beta H})(m) = (\mathcal{F}F_H)(2^{|\beta|}m)\prod_{i=1}^{|\beta|}(\mathcal{F}F_L)(2^{(i-1)}m) \tag{2.118}$$

(2.117), (2.118) が，Strichartz[S] による (1.38) と (1.39) と類似していることを注意すること．

2.4.6 シャノンと古典的ウェーブレット解析におけるシャノンの実数値ウェーブレット基底

β を $\alpha \in \{L\}^*$のプレフィックスとする． $F_{\beta H}, F_{\alpha L} \in \mathbb{C}^N$, $2^{(|\alpha|+2)} \mid N$に対して，(2.117) と (2.118) を使用した帰納法は，非反復シャノンフィルタに対する次の値で与えられる．

$$(\mathcal{F}F_{\alpha L})(m) = \begin{cases} 2^{(|\alpha|+1)/2}, & 0 \le m \le \left(N2^{-(|\alpha|+2)}-1\right) \quad \text{または} \\ & \left(1-2^{-(|\alpha|+2)}\right)N \le m \le (N-1) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.119}$$

$$(\mathcal{F}F_{\beta H})(m) = \begin{cases} 2^{(|\beta|+1)/2}, & N2^{-(|\beta|+2)} \le m \le \left(N2^{-(|\beta|+1)}-1\right) \quad \text{または} \\ & \left(1-2^{-(|\beta|+1)}\right)N \le m \\ & \quad \le \left(\left(1-2^{-(|\beta|+2)}\right)N-1\right) \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.120}$$

$\{F_{\alpha L}, F_{\beta H}\}_\beta$ のサポートは，周波数領域において交わらないことを注意すること．

同様に，実シャノンフィルタに対して， $|\beta| \ge 1$ かつ (2.75) により $\mathcal{F}F_H = \mathcal{F}f_H$が定義されるならば

$$(\mathcal{F}F_{\alpha L})(m) = \begin{cases} 2^{(|\alpha|+1)/2}, & 0 \le m \le \left(N2^{-(|\alpha|+2)}-1\right) \quad \text{又は} \\ & \left(\left(1-2^{-(|\alpha|+2)}\right)N+1\right) \le m \le (N-1) \\ j2^{|\alpha|/2}, & m = N2^{-(|\alpha|+2)} \\ -j2^{|\alpha|/2}, & m = \left(1-2^{-(|\alpha|+2)}\right)N \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.121}$$

$$
(\mathcal{F}F_{\beta H})(m) = \begin{cases} 2^{|\beta|/2}, & m = N2^{-(|\beta|+2)} \quad 又は \quad m = \left(1 - 2^{-(|\beta|+2)}\right) N \\ 2^{(|\beta|+1)/2}, & \left(N2^{-(|\beta|+2)} + 1\right) \leq m \leq \left(N2^{-(|\beta|+1)} - 1\right) \quad 又は \\ & \left(\left(1 - 2^{-(|\beta|+1)}\right) N + 1\right) \leq m \\ & \qquad \leq \left(\left(1 - 2^{-(|\beta|+2)}\right) N - 1\right) \\ j2^{|\beta|/2}, & m = N2^{-(|\beta|+1)} \\ -j2^{|\beta|/2}, & m = \left(1 - 2^{-(|\beta|+1)}\right) N \\ 0, & その他 \end{cases} \tag{2.122}
$$

となる．実シャノンフィルタ $\{F_{\alpha L}, F_{\beta H}\}_\beta$ は実数値である．もし周波数領域で二つのフィルタが重なっても，それは端点のみに限られる．

2.4.7　計算の複雑さ

この節において，信号空間 $\mathbb{C}^N$について論じる．古典的ウェーブレット解析の場合が考えられる．ここで反復はローパスの枝においてのみおこる．$(N/2)\log N$ の複素乗法を必要とする高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムを使うことによって，N点の順，逆離散フーリエ変換 (DFT) を行うことができると仮定する．ここで，対数は 2 を底として計算される．M を解析のレベル数とする．例えば，図 2.3 と図 2.8 においては $M = 2$ である．

図 2.8 において使われているような非反復構成とたたみ込みは，周波数領域における内積の計算を通して行われると仮定する．さらに，数列 $\mathcal{F}F_{\alpha H}$ と $\mathcal{F}F_{\alpha L}$をあらかじめ計算し，準備しておくことにする．このとき，全ウェーブレット変換数列 v_β の DFT の計算には，複素乗算

$$
\frac{N}{2}\log N + (M+1)N = \mathbb{O}(MN + N\log N) = \mathbb{O}(N\log N) \tag{2.123}
$$

回必要である．$M \leq \log N$なので，(2.123) における最後の等式が成り立つ．

補題 2.11 と同様に証明される $u \in \mathbb{C}^N$に対する単位元 $(\mathcal{F}(\mathcal{D}u))(m) = 1/2((\mathcal{F}u)(m) + (\mathcal{F}u)(m+N/2))$ を使うことによって，DFT 側からダウンサンプリングを行うことができる．実際のウェーブレット係数を求めるためには，ダウンサンプリングされた数列の逆 DFT を計算する必要がある．これには，複素乗算

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{N}{2^i}\log\frac{N}{2^i}\right) + \frac{N}{2^{M+1}}\log\frac{N}{2^M} = \mathbb{O}(N\log N) \tag{2.124}
$$

回必要である．このとき，図 2.8 のような非反復構成を使うのであれば，ウェーブレット係数の計算には複素乗算が全部で $\mathbb{O}(N\log N)$ 回必要である．

図 2.3 のような反復構成を使うのであれば，数列 v_βの DFT を得るためには，計算では複素

計算

$$\frac{N}{2}\log N + 2\sum_{i=0}^{M-1}\frac{N}{2^i} = \mathbb{O}(N\log N) \tag{2.125}$$

が必要である．このとき，DFT 逆変換は (2.124) と同じ回数の乗算が必要である．それゆえ，ウェーブレット係数の反復計算では複素乗算もやはり，$\mathbb{O}(N\log N)$ 回必要である．

両方の場合において，v_β の変換係数からの信号再構成では $\mathbb{O}(N\log N)$ の複素乗算を行う．

選択されたフィルタが，時間領域において短いならば，例えば時間領域において短いサポートを持つのであれば，演算回数は Nに比例するようにできる．そのようなフィルタペアの例として，4 点の **Daubechies** フィルタペアがある．Daubechies フィルタは，以下の等式 (2.129), (2.130) によって定義される．

$$a = -\sqrt{3};\quad c = \frac{1-a}{1+a} \tag{2.126}$$

$$h_L(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ a, & n=1 \\ -ac, & n=2 \\ c, & n=3 \\ 0, & 4\le n<N \end{cases} \tag{2.127}$$

$$h_H(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ a, & n=1 \\ a/c, & n=2 \\ -1/c, & n=3 \\ 0, & 4\le n<N \end{cases} \tag{2.128}$$

$$f_L = \frac{h_L}{\|h_L\|_{\mathbb{C}^N}} \tag{2.129}$$

$$f_H = \frac{h_H}{\|h_H\|_{\mathbb{C}^N}} \tag{2.130}$$

もし，たたみ込みが時間領域で直接行われるのであれば，短フィルタを使った反復計算は，非反復計算よりさらに効果的である．この場合，数列 v_β の計算に必要な複素乗算の回数は，$TN\sum_{i=0}^{M-1}2^{-i}\le 2TN$ である．ここで Tはフィルタの長さである．反復信号再構成もまた，同様の乗算回数をとる．

2.5　多次元信号に対する正規直交ウェーブレット

P を固定した正の整数とする．$x(n)$ を，$\ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または $\mathbb{C}^{N^P} = \ell^2(\mathbb{Z}_N^P) = \ell^2((\mathbb{Z}_N)^P)$ （N は偶数）における P次元の信号とする．$\mathbb{C}^{N^2}$における信号は，例えば，Nピクセル × Nピクセルの大きさの正方画像の表現として考えることができた．長方形の「多次元ピクチャー」に処理を拡張することは簡単であるが，記述法を簡単にしておくために正方画像を扱うことにしよう．信号の次元数と信号のあるベクトル空間の次元数は，二つの異なった概念である．例えば，$\mathbb{C}^{N^2}$における 2 次元のピクチャーは N^2次元空間にある．

$$\hat{x}(z_1, z_2, \ldots, z_P) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_P} x(n_1, \ldots, n_P) z_1^{-n_1} \cdots z_P^{-n_P} \tag{2.131}$$

ここでは便利な多重指数の記述法を使い，次のように書く．

$$\hat{x}(z) = \sum_n x(n) z^{-n} \tag{2.132}$$

(2.131) において，x が $\ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または $\mathbb{C}^{N^P}$に属するかどうかに依存して，z は $\mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}_N^P$ 上に範囲をとり，n は $\mathbb{Z}^P$ または $\mathbb{Z}_N^P$上に範囲をとる．

次の補題は，広く便利な結果である．

補題 2.14　任意の $n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}_N^P$に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \{0,1\}^P} (-1)^{(k_1 n_1 + \ldots + k_P n_P)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot n} \\ &= \begin{cases} 0, & n_i \text{が奇数である } i \text{ が存在する場合} \\ 2^P, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.133}$$

ここで，$k \cdot n$ は内積 $k \cdot n = k_1 n_1 + \ldots + k_P n_P$を示す．

証明　$m \in \mathbb{Z}^P$ または $m \in \mathbb{Z}_{N/2}^P$に対して，もし $n = 2m = (2m_1, \ldots, 2m_P)$ ならば，和の各項は 1 であり，そして和は 2^Pである．一方，ある ℓに対して n_ℓ が奇数であれば，

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot n} \\ &\quad = \sum_{k_1, \ldots, k_{\ell-1}, k_{\ell+1}, \ldots, k_P \in \mathbb{Z}_2} (-1)^{(k_1 n_1 + \ldots + k_{\ell-1} n_{\ell-1} + k_{\ell+1} n_{\ell+1} + \cdots + k_P n_P)} \left(\sum_{k_\ell = 0}^{1} (-1)^{k_\ell n_\ell} \right) \end{aligned} \tag{2.134}$$

と書くことができる．n_ℓ は奇数なので，最後の和と全体の和は消える．　▮

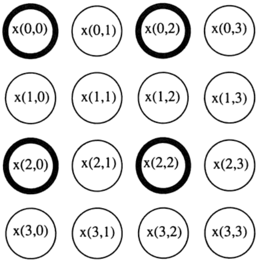


図 **2.9**　ダウンサンプリング作用素は，太線の円の要素に保存される．

$n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}^P_{N/2}$ における $(\mathcal{D}f)(n) = f(2n)$, によって，ダウンサンプリング作用素 $\mathcal{D}$ は定義される．$\mathcal{D} : \ell^2(\mathbb{Z}^P) \to \ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または $\mathcal{D} : \mathbb{C}^{N^P} \to \mathbb{C}^{(N/2)^P}$ である．例の方法によって，$\mathbb{C}^{4^2}$ における信号を図 2.9 に描いた．ダウンサンプリング作用素によって保たれる点は，太線の円である．次の補題は，$\ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または $\mathbb{C}^{N^P}$ のフィルタ数列上でのふるまいに関して，ダウンサンプリング作用素の特性を述べている．

補題 2.15　$z \in \mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}^P_N$ に対して

$$(\mathcal{D}f) \wedge (z) = 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{f}\left((-1)^{k_1} z_1^{1/2}, \ldots, (-1)^{k_P} z_P^{1/2}\right) = 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{f}((-1)^k z^{1/2}) \quad (2.135)$$

である．

証明　$n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}^P_N$ に対して

$$\hat{f}((-1)^k z^{1/2}) = \sum_n f(n)((-1)^k z^{1/2})^{-n} = \sum_n f(n)(-1)^{k \cdot n} z^{-n/2} \quad (2.136)$$

$$= \sum_n f(n)(-1)^{(k_1 n_1 + \ldots + k_P n_P)} z_1^{-n_1/2} \cdots z_P^{-n_P/2} \quad (2.137)$$

それゆえ

$$2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{f}((-1)^k z^{1/2}) = 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \sum_n f(n)(-1)^{k \cdot n} z_1^{-n_1/2} \cdots z_P^{-n_P/2} \quad (2.138)$$

(2.138) の和の部分と補題 2.14 を使って入れ替えることにより，次が求められる．

$$2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{f}((-1)^k z^{1/2}) = \sum_{n=2m} f(n_1, \ldots, n_P) z_1^{-n_1/2} \cdots z_P^{-n_P/2} \quad (2.139)$$

$$= \sum_m f(2m_1, \ldots, 2m_P) z_1^{-m_1} \cdots z_P^{-m_P} \quad (2.140)$$

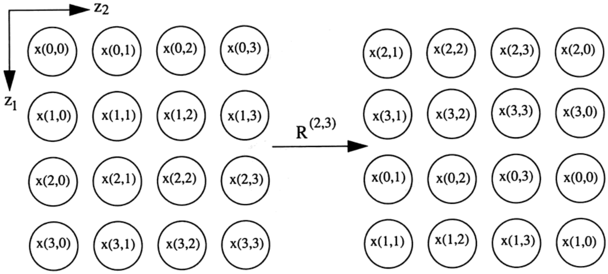


図 **2.10**　シフト作用素の例

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m (\mathcal{D}f)(m_1, \ldots, m_P) z_1^{-m_1} \cdots z_P^{-m_P} \\
&= (\mathcal{D}f) \wedge (z) \qquad (2.141)
\end{aligned}
$$

∎

次式によって，アップサンプリング作用素 $\mathcal{U}: \ell^2(\mathbb{Z}^P) \to \ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または $\mathcal{U}: \mathbb{C}^{N^P} \to \mathbb{C}^{(2N)^P}$ が定義される．

$$
(\mathcal{U}f)(n) = \begin{cases} f(n/2), & m \in \mathbb{Z}^P \quad \text{または} \quad m \in \mathbb{Z}_N^P \quad \text{で} \quad n = 2m \quad \text{の場合} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \qquad (2.142)
$$

$(\mathcal{U}f) \wedge (z) = \hat{f}(z^2)$ であることは，容易にわかる．例えば，$(\mathcal{U}f) \wedge (z_1, \ldots, z_P) = \hat{f}(z_1^2, \ldots, z_P^2)$．

$(R^k f)(n) = f(n-k)$，または

$$
(R^{(k_1, \ldots, k_P)} f)(n_1, \ldots, n_P) = f(n_1 - k_1, \ldots, n_P - k_P) \qquad (2.143)
$$

のように，シフト作用素 Rを定義する．$(R^k f) \wedge (z) = z^{-k} \hat{f}(z) = z_1^{-k_1} \ldots z_P^{-k_P} \hat{f}(z_1, \ldots, z_P)$ であることは，容易にわかる．例えば，図 2.10 は $\mathbb{C}^{4^2}$の数列上での作用素 $R^{(2,3)}$の効果を示す．$R^{(2,3)}$は，入力数列を z_1 (下) の「方向」2 と z_2 (右) の「方向」3 によってシフトする．「方向」の選択は，$x(i,k)$ が $z_1^{-i} z_2^{-k}$の係数になるという事実により決められる．

$\mathrm{coeff}_k \hat{f}(z)$ によって，$k \in \mathbb{Z}^P$ または $k \in \mathbb{Z}_N^P$は，多項式$\hat{f}(z)$ の標準形において $z^{-k} = z_1^{-k_1} \cdots z_P^{-k_P}$ の係数を意味するとする．$f = \{f(n)\}_n$, $g = \{g(n)\}_n$に対して，$\langle f, g \rangle = \sum_n f(n) \bar{g}(n)$．$z \in \mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}_N^P$で $\langle f, R^k g \rangle = \mathrm{coeff}_k(\hat{f}(z) \bar{\hat{g}}(z))$ であることは容易にわかる．

2.5.1　正規直交条件

この節では，定理 2.5 の多次元の場合を導く三つの補題を提示する．

補題 2.16　$f = f(n)$, $n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}_N^P$とする．このとき次は同値である．

P1　$\langle f, R^{2k} f\rangle = \delta(k) = \delta(k_1)\dots\delta(k_P)$

P2　$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} |\hat{f}((-1)^\ell z)|^2 = 2^P$, $\forall z \in \mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}_N^P$

ここで $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_P) \in \mathbb{Z}_2^P$に対して，$\hat{f}((-1)^\ell z) = \hat{f}((-1)^{\ell_1} z_1, \dots, (-1)^{\ell_P} z_P)$ である．

証明　**P1** は

$$\mathrm{coeff}_{2k}\left(|\hat{f}(z)|^2\right) = \delta(k) \tag{2.144}$$

と同値である．ここで

$$\hat{h}(z) = |\hat{f}(z)|^2 \tag{2.145}$$

を定義する．$m \in \mathbb{Z}^P$ または $m \in \mathbb{Z}_{N/2}^P$に対して，(2.144) は

$$\sum_{n=2m} h(n) z^{-n} = 1 \tag{2.146}$$

と同値である．しかし，$\sum_{n=2m} h(n) z^{-n} = (\mathcal{UD}h)\wedge(z) = (\mathcal{D}h)\wedge(z^2)$．それゆえ，補題 2.15 により

$$\sum_{n=2m} h(n) z^{-n} = (\mathcal{D}h)\wedge(z^2) = 2^{-P} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{h}((-1)^\ell z) \tag{2.147}$$

となる．(2.147) から (2.146) は

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{h}((-1)^\ell z) = 2^P \tag{2.148}$$

と同値である．(2.145) から $\hat{h}((-1)^\ell z) = |\hat{f}((-1)^\ell z)|^2$．$\hat{h}((-1)^\ell z)$ を (2.148) に代入することによって，補題が得られる．　∎

補題 2.17　$f = f(n)$, $g = g(n)$, $n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}_N^P$ とする．このとき，次は同値である．

P1　任意の kに対し，$\langle f, R^{2k} g\rangle = 0$

P2　任意の $z \in \mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}_N^P$に対し，$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{f}((-1)^\ell z)\overline{\hat{g}}((-1)^\ell z) = 0$

証明　この証明は，補題 2.16 の証明と同様である．**P1** は

$$\mathrm{coeff}_{2k}\left(\hat{f}(z)\overline{\hat{g}}(z)\right) = 0 \tag{2.149}$$

と同値である．ここで

$$\hat{h}(z) = \hat{f}(z)\overline{\hat{g}}(z) \tag{2.150}$$

を定義する．(2.150) から，$m \in \mathbb{Z}^P$ または $m \in \mathbb{Z}^P_{N/2}$ に対して (2.149) は

$$\sum_{n=2m} h(n) z^{-n} = 0 \tag{2.151}$$

と同値である．補題 2.15 により，

$$\sum_{n=2m} h(n) z^{-n} = (\mathcal{U}\mathcal{D}h) \wedge (z) = (\mathcal{D}h) \wedge (z^2) = 2^{-P} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{h}((-1)^{\ell} z) \tag{2.152}$$

となる．(2.150) を (2.152) に代入することによって，補題が得られる．　∎

次の補題の証明は，補題 2.2 の証明と同様である．

補題 2.18　$i \in \mathbb{Z}_{2^P}$に対して，次が定義される．

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i(n) &= \overline{f_i}(-n) &(2.153)\\
\tilde{B} &= \bigcup_{i=0}^{2^P-1} \{R^{2k}\tilde{f}_i : k \in \mathbb{Z}^P \quad \text{or} \quad k \in \mathbb{Z}^P_{N/2}\} &(2.154)\\
B &= \bigcup_{i=0}^{2^P-1} \{R^{2k} f_i : k \in \mathbb{Z}^P \quad \text{or} \quad k \in \mathbb{Z}^P_{N/2}\} &(2.155)
\end{aligned}$$

もしかならず Bが正規直交であれば，マルチ集合 $\tilde{B}$ は正規直交である．

ここで，図 2.11 における信号 x の正規直交分解を考える．

この節における最も重要な定理を述べるためには，新しい記法が必要である．$j = (j_1, \ldots, j_P) \in \{0,1\}^P = \mathbb{Z}_2^P$とする．$\sharp(\{0,1\}^P) = 2^P$なので，そのようなすべての jを $j^{(0)}, \ldots, j^{(2^P-1)}$ のように列挙することができる．この列挙を $j^{(0)} = (0,0,\ldots,0)$ のように選択する．このとき，すべての kに対して $j_k^{(i)} \in \mathbb{Z}_2$で $j^{(i)} = (j_1^{(i)}, \ldots, j_P^{(i)})$ と記述する．また，$\hat{f}((-1)^{j^{(i)}} z) = \hat{f}((-1)^{j_1^{(i)}} z_1, \ldots, (-1)^{j_P^{(i)}} z_P)$ とも記述する．

定理 2.19　$f_0(n) = f_0(n_1, \ldots, n_P), \ldots, f_{2^P-1}(n) = f_{2^P-1}(n_1, \ldots, n_P)$ を $n \in \mathbb{Z}^P$ または $n \in \mathbb{Z}^P_N$の 2^P 数列とする．$2^P \times 2^P$ 行列を，$A_{k,i}(z) = 2^{-P/2}\hat{f}_i((-1)^{j^{(k)}} z)$ のような $z \in \mathbb{T}^P$

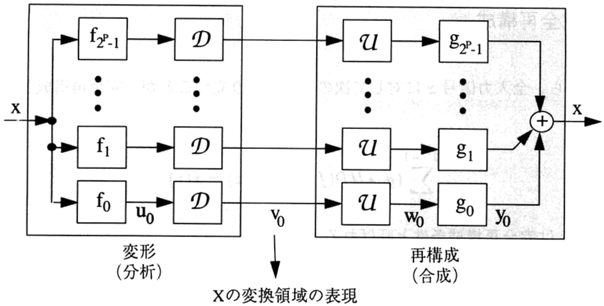


図 **2.11** P次元信号に対する基本的なフィルタバンク

または $\mathbb{W}_N^P$のシステム行列 $A(z) = (A_{k,i}(z))_{k,i\in\mathbb{Z}_{2^P}}$ と定義する．例えば，

$$A(z) = 2^{-P/2}\begin{pmatrix} \hat{f}_0((-1)^{j^{(0)}}z) & \hat{f}_1((-1)^{j^{(0)}}z) & \dots & \hat{f}_{2^P-1}((-1)^{j^{(0)}}z) \\ \hat{f}_0((-1)^{j^{(1)}}z) & \hat{f}_1((-1)^{j^{(1)}}z) & \dots & \hat{f}_{2^P-1}((-1)^{j^{(1)}}z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{f}_0((-1)^{j^{(2^P-1)}}z) & \hat{f}_1((-1)^{j^{(2^P-1)}}z) & \dots & \hat{f}_{2^P-1}((-1)^{j^{(2^P-1)}}z) \end{pmatrix} \tag{2.156}$$

このとき，すべての $z\in\mathbb{T}^P$ または $\mathbb{W}_N^P$に対して $A(z)$ が必ずユニタリであることが，$\tilde{B}$ が正規直交となる必要十分条件である．

証明　補題 2.18 により，$\tilde{B}$の正規直交性は Bの正規直交性と等価である．補題 2.16 により，あらゆる固定された i に対して $\{R^{2k}f_i : k\in\mathbb{Z}^P$または $k\in\mathbb{Z}_{N/2}^P\}$ の正規直交性は，A の i 番目の列が長さ "1" をもつことと同値である．補題 2.17 により，$\{R^{2k}f_{i_1} : k\in\mathbb{Z}^P$または $k\in\mathbb{Z}_{N/2}^P\}$ と $\{R^{2k}f_{i_2} : k\in\mathbb{Z}^P$または $k\in\mathbb{Z}_{N/2}^P\}$ のクロス直交性（cross-orthogonality）は，A の i_1番目と i_2番目の列の直交性と等価である． ∎

例の方法により，信号空間 C^{4^2} に対するシステム行列は次のようになる．

$$A(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{f}_0(z_1,z_2) & \hat{f}_1(z_1,z_2) & \hat{f}_2(z_1,z_2) & \hat{f}_3(z_1,z_2) \\ \hat{f}_0(-z_1,z_2) & \hat{f}_1(-z_1,z_2) & \hat{f}_2(-z_1,z_2) & \hat{f}_3(-z_1,z_2) \\ \hat{f}_0(z_1,-z_2) & \hat{f}_1(z_1,-z_2) & \hat{f}_2(z_1,-z_2) & \hat{f}_3(z_1,-z_2) \\ \hat{f}_0(-z_1,-z_2) & \hat{f}_1(-z_1,-z_2) & \hat{f}_2(-z_1,-z_2) & \hat{f}_3(-z_1,-z_2) \end{pmatrix} \tag{2.157}$$

2.5.2　完全再構成

図 2.11 から，全入力信号 x に対して次の等式が成り立つことが，完全再構成となる必要十分条件である．

$$\sum_{i=0}^{2^P-1}(g_i*\mathcal{UD}(f_i*x))\wedge(z)=\hat{x}(z) \tag{2.158}$$

等式 (2.158) は**完全再構成条件**と呼ばれる．

補題 2.20　完全再構成条件を満足するための必要十分条件は，

$$\sum_{i=0}^{2^P-1}\hat{f}_i((-1)^k z)\hat{g}_i(z)=2^P\delta(k) \tag{2.159}$$

である．

証明　補題 2.15 より，

$$(\mathcal{D}(f_i*x))\wedge(z)=2^{-P}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P}\hat{f}_i((-1)^k z^{1/2})\hat{x}((-1)^k z^{1/2}) \tag{2.160}$$

(2.160) より，

$$(\mathcal{UD}(f_i*x))\wedge(z)=2^{-P}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P}\hat{f}_i((-1)^k z)\hat{x}((-1)^k z) \tag{2.161}$$

となる．(2.161) を使い，完全再構成条件 (2.158) は次のように書くことができる．

$$2^{-P}\sum_{i=0}^{2^P-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P}\hat{f}_i((-1)^k z)\hat{x}((-1)^k z)\hat{g}_i(z)=\hat{x}(z) \tag{2.162}$$

ここで

$$\hat{C}_k(z)=\sum_{i=0}^{2^P-1}\hat{f}_i((-1)^k z)\hat{g}_i(z) \tag{2.163}$$

を定義する．(2.162) における完全再構成条件は，このとき

$$2^{-P}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P}\hat{C}_k(z)\hat{x}((-1)^k z)=\hat{x}(z) \tag{2.164}$$

となる．$\ell \in \mathbb{Z}_2^P$に対して $\hat{x}_\ell(z) = z^\ell$を定義する．完全再構成条件はすべての$\hat{x}(z)$ に対して成り立つので，すべての$\hat{x}_\ell(z), \ell \in \mathbb{Z}_2^P$に対しても成り立つ．このとき，各 ℓ に対して (2.164) から

$$\hat{x}_\ell(z) = z^\ell = 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} ((-1)^k z)^\ell \hat{C}_k(z) = 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot \ell} z^\ell \hat{C}_k(z) \tag{2.165}$$

(2.165) から，すべての $\ell \in \mathbb{Z}_2^P$に対して次のようになる．

$$2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot \ell} \hat{C}_k(z) = 1 \tag{2.166}$$

$K \in \mathbb{Z}_2^P$を P組の任意の固定された 2 進数とする．(2.166) の両辺に $(-1)^{K \cdot \ell}$をかけ，すべての ℓ について和をとると

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{K \cdot \ell} = 2^{-P} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot \ell} (-1)^{K \cdot \ell} \hat{C}_k(z) \tag{2.167}$$

$$= 2^{-P} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{k \cdot \ell} (-1)^{-K \cdot \ell} \hat{C}_k(z) \tag{2.168}$$

$$= 2^{-P} \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{C}_k(z) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{(k-K) \cdot \ell} \tag{2.169}$$

となる．補題 2.14 より，$K \in \mathbb{Z}_2^P$なので

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{K \cdot \ell} = 2^P \delta(K) = 2^P \delta(K_1) \cdots \delta(K_P) \tag{2.170}$$

となる．また，補題 2.14 より

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}_2^P} (-1)^{(k-K) \cdot \ell} = 2^P \delta(k - K) \tag{2.171}$$

ともなる． (2.167)–(2.171) から

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_2^P} \hat{C}_k(z) \delta(k - K) = 2^P \delta(K) \tag{2.172}$$

または

$$\hat{C}_K(z) = 2^P \delta(K) \tag{2.173}$$

となる．(2.163) と (2.173) より補題が得られる． ∎

次の定理は，補題 2.20 より直接得られる．

定理 2.21　$A(z)$ をシステム行列 (2.156) とする．図 2.11 のシステムが完全再構成になる必要十分条件は，任意の $z \in \mathbb{T}^P$ または $\mathbb{C}_N^P$において

$$A(z)\begin{pmatrix} \hat{g}_0(z) \\ \hat{g}_1(z) \\ \vdots \\ \hat{g}_{2^P-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{P/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.174}$$

である．

次の系において，$\ell^2(\mathbb{Z}^P)$ と $\mathbb{C}^{N^P}$ における信号の，正規直交分解と完全再構成の結果をまとめる．

系 **2.22**　次は同値である．

P1　集合 $\tilde{B} = \bigcup_{i=0}^{2^P-1}\{R^{2k}\tilde{f}_i : k \in \mathbb{Z}^P$または $k \in \mathbb{Z}_{N/2}^P\}$ は正規直交であり，図 2.11 において完全再構成になる．

P2　(2.156) におけるシステム行列 $A(z)$ はユニタリであり，任意の $i \in \mathbb{Z}_{2^P}$に対して，$g_i = \tilde{f}_i$ が成り立つ．

証明　(**P1** $\Rightarrow$ **P2**) $A(z)$ のユニタリ性は定理 2.19 から従う．それゆえ，$A^{-1}(z) = \bar{A}^T(z)$．この観察と定理 2.21 から，任意の $i \in \mathbb{Z}_{2^P}$に対し, $\hat{g}_i(z) = \overline{\hat{f}_i}(z)$ あるいは同じことだが $g_i = \tilde{f}_i$となることが分かる．

(**P1** $\Leftarrow$ **P2**) 定理 2.19 より，Bは正規直交である．$\hat{g}_i(z) = \overline{\hat{f}_i}(z)$ のとき，$A(z)$ の列は $A(z)$ がユニタリであることより正規直交なので，等式

$$A(z)\begin{pmatrix} 2^{-P/2}\hat{g}_0(z) \\ 2^{-P/2}\hat{g}_1(z) \\ \vdots \\ 2^{-P/2}\hat{g}_{2^P-1}(z) \end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix} 2^{-P/2}\overline{\hat{f}_0(z)} \\ 2^{-P/2}\overline{\hat{f}_1(z)} \\ \vdots \\ 2^{-P/2}\overline{\hat{f}_{2^P-1}(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.175}$$

が成立する．ゆえに定理 2.21 より完全再構成となることが分かる．　∎

2.5.3　多次元積フィルタ

$\hat{f}_L$ と $\hat{f}_H$ を，すべての $z \in \mathbb{T}$ または $\mathbb{W}_N$に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_L(z) & \hat{f}_H(z) \\ \hat{f}_L(-z) & \hat{f}_H(-z) \end{pmatrix} \tag{2.176}$$

がユニタリであるような，1 次元フィルタとする．

$$f_0(n_1,n_2) = f_L(n_1)f_L(n_2) \tag{2.177}$$

$$f_1(n_1,n_2) = f_H(n_1)f_L(n_2) \tag{2.178}$$

$$f_2(n_1,n_2) = f_L(n_1)f_H(n_2) \tag{2.179}$$

$$f_3(n_1,n_2) = f_H(n_1)f_H(n_2) \tag{2.180}$$

と定義する．この定義で，行列 (2.157) は (2.176) の形式の 2 行列の Kronecker 積になる．すなわち，

$$\begin{aligned} A(z_1,z_2) & \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{f}_0(z_1,z_2) & \hat{f}_1(z_1,z_2) & \hat{f}_2(z_1,z_2) & \hat{f}_3(z_1,z_2) \\ \hat{f}_0(-z_1,z_2) & \hat{f}_1(-z_1,z_2) & \hat{f}_2(-z_1,z_2) & \hat{f}_3(-z_1,z_2) \\ \hat{f}_0(z_1,-z_2) & \hat{f}_1(z_1,-z_2) & \hat{f}_2(z_1,-z_2) & \hat{f}_3(z_1,-z_2) \\ \hat{f}_0(-z_1,-z_2) & \hat{f}_1(-z_1,-z_2) & \hat{f}_2(-z_1,-z_2) & \hat{f}_3(-z_1,-z_2) \end{pmatrix} \quad (2.181) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_L(z_2) & \hat{f}_H(z_2) \\ \hat{f}_L(-z_2) & \hat{f}_H(-z_2) \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \hat{f}_L(z_1) & \hat{f}_H(z_1) \\ \hat{f}_L(-z_1) & \hat{f}_H(-z_1) \end{pmatrix} \quad (2.182) \end{aligned}$$

である．(2.177)–(2.180) により与えられる $f_0,\ldots,f_3$に対して集合 $\{R^{2k}f_L\}_k \cup \{R^{2k}f_H\}_k$ の正規直交性は，(2.154) の集合$\tilde{B}$の正規直交性を意味する．このことは容易に確認できる．これは，1 次元ウェーブレットから 2 次元ウェーブレットを構成する一般的な方法である． $f_0,\ldots,f_3$ を積ウェーブレットと呼ぶ．行列 (2.181) がユニタリ性は (2.182) における Kronecker 積公式の行列がユニタリ性に従うので，これは定理 2.19 と両立する．

それゆえ，2 次元ウェーブレットフィルタは 1 次元フィルタの積として構成することができる．しかしながら，定理 2.19 は積フィルタではない 2 次元ウェーブレットフィルタが存在することを示している．これは，Kronecker 積として表現することのできない，次のユニタリ行列の存在による．

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.183}$$

これらの議論は，一般的な多次元フィルタの構成にまで広げることができる．

2.5.4　反復

$V = \ell^2(\mathbb{Z}^P)$ または C_N^Pとする． $\alpha \in \mathbb{Z}_{2^P}^*$, $|\alpha| = n > 0$ を固定する．$\beta_i = \mathrm{pfx}(\alpha, i)$, $i = 1, \ldots, n$ と定義する．$F_\alpha, G_\alpha \in V$ を (2.91) と (2.92) のように定義する．無限次元の場合は，$k = 1, \ldots, n+1$ に対して $X_k = \mathbb{Z}^P$ とする．$2^n \mid N$と仮定した有限次元の場合は，$k = 1, \ldots, n+1$ に対して $X_k = \mathbb{Z}_{N2^{1-k}}^P$ とする．このとき，定理 2.9 は多次元の場合にも成り立つ．

$\tilde{B}_\alpha$ と V_α を (2.101), (2.102) と全く同様に定義する． ここでわれわれは定理 2.10 に似た次の定理を証明する．

定理 2.23　反復定理　$\alpha \in \mathbb{Z}_{2^P}^*$, $|\alpha| > 0$ を固定する．有限次元の場合，$2^{(|\alpha|+1)} \mid N$とする．$\beta \in \mathbb{Z}_{2^P}$とする．$\tilde{B}_\alpha$は V_α, $V_\alpha \subseteq \ell^2(X_1)$ に対する正規直交基底とする．$\{f_{\alpha\beta} \in \ell^1(X_{|\alpha|+1})\}_\beta = \{f_{\alpha 0}, f_{\alpha 1}, \ldots, f_{\alpha(2^P-1)}\}$ は定理 2.19 を満足するとする．ここで

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \tilde{F}_\alpha * \mathcal{U}^{|\alpha|} \tilde{f}_{\alpha\beta} \tag{2.184}$$

とし，$\tilde{B}_{\alpha\beta}$ と $V_{\alpha\beta}$を (2.101) と (2.102) のように定義する． このとき， V_α は $\{V_{\alpha\beta}\}_\beta$の直和，すなわち

$$V_\alpha = \bigoplus_\beta V_{\alpha\beta} \tag{2.185}$$

である．$\tilde{B}_{\alpha\beta}$もまた $V_{\alpha\beta}$に対する正規直交基底である．

証明　最初に $\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}$の正規直交性を証明する．そのためには， 次を証明すれば十分である．

$$\left\langle \tilde{F}_{\alpha\beta_1}, R^{2^{(|\alpha|+1)}k} \tilde{F}_{\alpha\beta_2} \right\rangle = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ かつ } \beta_1 = \beta_2 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.186}$$

ここで

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{F}_{\alpha\beta_1}, R^{2^{(|\alpha|+1)}k} \tilde{F}_{\alpha\beta_2} \right\rangle &= \mathrm{coeff}_0 \left(\left(\tilde{F}_{\alpha\beta_1} \right) \wedge (z) \overline{\left(R^{2^{(|\alpha|+1)}k} \tilde{F}_{\alpha\beta_2} \right) \wedge (z)} \right) && (2.187) \\ &= \mathrm{coeff}_0 \left(\overline{\hat{F}_{\alpha\beta_1}}(z) z^{2^{(|\alpha|+1)}k} \hat{F}_{\alpha\beta_2}(z) \right) && (2.188) \\ &= \mathrm{coeff}_{2^{(|\alpha|+1)}k} \left(\overline{\hat{F}_{\alpha\beta_1}}(z) \hat{F}_{\alpha\beta_2}(z) \right) && (2.189) \end{aligned}$$

となる． (2.184) から，

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(z) = \hat{F}_\alpha(z) \left(\mathcal{U}^{|\alpha|} f_{\alpha\beta} \right) \wedge (z) = \hat{F}_\alpha(z) \hat{f}_{\alpha\beta} \left(z^{2^{|\alpha|}} \right) \tag{2.190}$$

(2.189) と (2.190) から

$$\left\langle \tilde{F}_{\alpha\beta_1}, R^{2(|\alpha|+1)k}\tilde{F}_{\alpha\beta_2}\right\rangle = \mathrm{coeff}_{2(|\alpha|+1)k}\left(\left|\hat{F}_\alpha\right|^2(z)\overline{\hat{f}_{\alpha\beta_1}}\left(z^{2^{|\alpha|}}\right)\hat{f}_{\alpha\beta_2}\left(z^{2^{|\alpha|}}\right)\right) \tag{2.191}$$

$\tilde{B}_\alpha = \left\{R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\}_{k\in X_{|\alpha|+1}}$ の正規直交性より，

$$\left\langle \tilde{F}_\alpha, R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\rangle = \mathrm{coeff}_{2^{|\alpha|}k}\left(\left|\hat{F}_\alpha\right|^2(z)\right) = \delta(k) \tag{2.192}$$

(2.192) より，ある $a(\ell)$ が存在して

$$\left|\hat{F}_\alpha\right|^2(z) = 1 + \sum_{\substack{\ell\in X_1 \\ 2^{|\alpha|}\not|\ell}} a(\ell)z^{-\ell} \tag{2.193}$$

が従う．ここで "$2^{|\alpha|}\not|\ell$" とは $2^{|\alpha|}\not|\ell_i$ となる i が存在することとする．ここで ℓ_i は，ベクトル $\ell\in X_1 = \mathbb{Z}^P$ または $\mathbb{Z}_N^P$ の i 番目の構成要素である．

同様に，$\{f_{\alpha\beta}\in\ell^2(X_{|\alpha|+1})\}_{\beta\in\mathbb{Z}_{2^P}}$ の正規直交性により

$$\left\langle f_{\alpha\beta_1}, R^{2k}f_{\alpha\beta_2}\right\rangle = \mathrm{coeff}_{2k}\left(\hat{f}_{\alpha\beta_1}(z)\overline{\hat{f}_{\alpha\beta_2}(z)}\right) = \delta(k)\delta(\beta_1-\beta_2) \tag{2.194}$$

(2.194) から，ある $b(\ell)$ が存在して

$$\hat{f}_{\alpha\beta_1}(z)\overline{\hat{f}_{\alpha\beta_2}}(z) = \delta(\beta_1-\beta_2) + \sum_{\substack{\ell\in X_{|\alpha|+1} \\ 2\not|\ell}} b(\ell)z^{-\ell} \tag{2.195}$$

となる．再び，"$2\not|\ell$" とは $2\not|\ell_i$ となる i が存在することである．(2.191), (2.193), そして (2.195) より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tilde{F}_{\alpha\beta_1},\ R^{2(|\alpha|+1)k}\tilde{F}_{\alpha\beta_2}\right\rangle \\
&\quad = \mathrm{coeff}_{2^{|\alpha|+1}k}\Bigg(\delta(\beta_1-\beta_2)\Bigg(1+\sum_{\substack{\ell\in X_1 \\ 2^{|\alpha|}\not|\ell}} a(\ell)z^{-\ell}\Bigg) \\
&\qquad + \sum_{\substack{\ell\in X_{|\alpha|+1} \\ 2\not|\ell}} b(\ell)z^{-\ell 2^{|\alpha|}} + \sum_{\substack{\ell\in X_1 \\ 2^{|\alpha|}\not|\ell}}\ \sum_{\substack{m\in X_{|\alpha|+1} \\ 2\not|m}} a(\ell)b(m)z^{-(\ell+m2^{|\alpha|})}\Bigg)
\end{aligned} \tag{2.196}$$

となる．等式 (2.186) は (2.196) となり，そして$\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}$ は正規直交である．

ここで，$\left(\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}\right)\subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left(\tilde{B}_\alpha\right)\right) = V_\alpha$を示す．$n\in X_1$に対して

$$\tilde{F}_{\alpha\beta}(n) \quad = \quad \left(\tilde{F}_\alpha * \mathcal{U}^{|\alpha|}\tilde{f}_{\alpha\beta}\right)(n) = \sum_{m\in X_1}\tilde{F}_\alpha(n-m)\left(\mathcal{U}^{|\alpha|}\tilde{f}_{\alpha\beta}\right)(m) \tag{2.197}$$

$$= \sum_{k\in X_{|\alpha|+1}} \tilde{F}_\alpha(n-2^{|\alpha|}k)\tilde{f}_{\alpha\beta}(k) = \sum_{k\in X_{|\alpha|+1}} \tilde{f}_{\alpha\beta}(k)\left(R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right)(n) \tag{2.198}$$

(2.198) において，$\tilde{F}_{\alpha\beta}$を$\tilde{B}_\alpha$の要素の線形結合として表現する．それゆえ，$\tilde{F}_{\alpha\beta} \in V_\alpha$．すべての $k \in X_{|\alpha|+1}$に対し，作用素 $R^{2^{|\alpha|}k}$のもとで $\tilde{B}_\alpha$は不変なので，$\left(\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}\right) \subseteq V_\alpha$が得られる．それゆえ，$\mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left(\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}\right)\right) = \bigoplus_\beta V_{\alpha\beta} \subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left(\tilde{B}_\alpha\right)\right)$である．

$\mathrm{span}\left(\tilde{B}_\alpha\right) = \mathrm{span}\left(\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}\right)$のように，正規直交集合$\tilde{B}_\alpha$ と $\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}$の濃度（cardinalities）は等しいので，有限次元の場合，証明は完全である．しかしながら，無限次元の場合に対しては，まだ，$\tilde{B}_\alpha \subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left(\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}\right)\right) = \bigoplus_\beta V_{\alpha\beta}$ の包含関係を示さなければならない．(2.198) を使うことによって，すべての $n, k \in \mathbb{Z}^P$ と $\beta \in \mathbb{Z}_{2^P}$に対して

$$\left(R^{2^{|\alpha|+1}k}\tilde{F}_{\alpha\beta}\right)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^P} \tilde{f}_{\alpha\beta}(m)\tilde{F}_\alpha\left(n-2^{|\alpha|}(m+2k)\right) \tag{2.199}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^P} \tilde{F}_\alpha\left(n-2^{|\alpha|}m\right)\tilde{f}_{\alpha\beta}(m-2k) \tag{2.200}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^P} \left(R^{2k}\tilde{f}_{\alpha\beta}\right)(m)\left(R^{2^{|\alpha|}m}\tilde{F}_\alpha\right)(n) \tag{2.201}$$

と記述する．$p \in \mathbb{Z}^P$ を固定し $n \in \mathbb{Z}^P$に対して，δ_pを $p = n$ の場合$\delta_p(n) = 1$，その他は $\delta_p(n) = 0$ と定義する．基底$\left\{R^{2k}\tilde{f}_{\alpha\beta} : k \in \mathbb{Z}^P, \beta \in \mathbb{Z}_{2^P}\right\}$に関して，拡張された δ_p は

$$\delta_p = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_{2^P}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^P} \overline{\tilde{f}_{\alpha\beta}}(p-2k)R^{2k}\tilde{f}_{\alpha\beta} \tag{2.202}$$

で与えられる．それゆえ，(2.201) を使うことにより各 $p \in \mathbb{Z}^P$ に対して

$$\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_{2^P}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^P} \overline{\tilde{f}_{\alpha\beta}}(p-2k)R^{2^{|\alpha|+1}k}\left(\tilde{F}_\alpha * \mathcal{U}^{|\alpha|}\tilde{f}_{\alpha\beta}\right) \tag{2.203}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}^P}\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_{2^P}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^P} \overline{\tilde{f}_{\alpha\beta}}(p-2k)\left(R^{2k}\tilde{f}_{\alpha\beta}\right)(n)\left(R^{2^{|\alpha|}n}\tilde{F}_\alpha\right) \tag{2.204}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}^P} \delta_p(n)\left(R^{2^{|\alpha|}n}\tilde{F}_\alpha\right) = R^{2^{|\alpha|}p}\tilde{F}_\alpha \tag{2.205}$$

を得る．これは，$\bigcup_\beta \tilde{B}_{\alpha\beta}$の要素の線形結合 ($\tilde{f}_{\alpha\beta} \in \ell^1(\mathbb{Z}^P)$ なので $\ell^2(\mathbb{Z}^P)$ に収束する) として，$\tilde{B}_\alpha$ の要素を表現する．これで証明は完成する．∎

(2.108), (2.113) の方法のように，任意の信号 $x \in X_1$ と $k \in X_{|\alpha|+1}$に対して

$$v_\alpha(k) = \left\langle x, R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\rangle \tag{2.206}$$

$$y_\alpha = \sum_{k\in X_{|\alpha|+1}} \left\langle x, R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha\right\rangle R^{2^{|\alpha|}k}\tilde{F}_\alpha \tag{2.207}$$

となることは簡単にわかる．ウェーブレット基底に関して，別のαに対する y_α の和は x の分解となる．

反復は，2.4.4 節の 1 次元の場合において議論されたように,「重複フィルタ」とともに行うことができる．ここで，前のレベルの「折り畳み」フィルタにより高いレベルのフィルタを構成することを示す，次の折り畳み補題を証明する．この補題は，補題 2.11 に似ている．

補題 2.24 折り畳み補題 $M \in \mathbb{Z}^+$, $f = \{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_{2M}^P}$, $h = \{h(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_M^P}$ とする．このとき，次は同値である．

P1 任意の $z \in \mathbb{W}_M^P$に対し，$\hat{h}(z) = \hat{f}(z)$

P2 任意の $m \in \mathbb{Z}_M^P$に対し，$(\mathcal{F}h)(m) = (\mathcal{F}f)(2m)$

P3 任意の $n \in \mathbb{Z}_M^P$に対し，$h(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P} f(n+Mk)$

証明 ここで

$$(\mathcal{F}h)(n) = \hat{h}(e^{-j2\pi n/M}), \quad n \in \mathbb{Z}_M^P \tag{2.208}$$

$$(\mathcal{F}f)(2n) = \hat{f}\left(e^{-j2\pi 2n/2M}\right) = \hat{f}\left(e^{-j2\pi n/M}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_M^P \tag{2.209}$$

である．それゆえ，**P1** ⇔ **P2**．また

$$\hat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{2M}^P} f(n)z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_M^P}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P} f(n+Mk)z^{-n-Mk} \tag{2.210}$$

である．それゆえ，$z \in \mathbb{W}_M^P$に対して，

$$\hat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_M^P}\sum_{k\in\mathbb{Z}_2^P} f(n+Mk)z^{-n} \tag{2.211}$$

そこで，z変換は $\mathbb{Z}_M^P$において 1 対 1 であるので，**P3** ⇒ **P1** かつ **P1** ⇒ **P3** である． ∎

2.6 結論

本章の結果は，次のようにまとめることができる．定理 2.5 と定理 2.19 は，第一世代のウェーブレット構成に対する必要十分条件を与える．補題 2.11 と補題 2.24 は，反復する段階で必要な，高いレベルの補助フィルタを得る方法を示す．定理 2.10 と定理 2.23 は，この反復について述べており高い世代のウェーブレット基底を得る方法を示している．厳密に数学的な意味では，これらの結果は離散ウェーブレット基底を生成するために必要なものすべてである．しかし，このような基底を直接具体化することによる信号の分解と再構成は，2.4.7 節に論じられているように計算の視点から考えて常に効率的であるとは限らない．短フィルタを反復フィルタ

バンクの構成において用いれば，より速い計算が可能となる．定理 2.9 と (2.206)–(2.207) は，われわれが開発した正規直交基底を用いて，実際に信号の分解と再構成を実行する反復フィルタバンクの構成を確立している．

1 次元信号の分解に対するすべてのウェーブレットフィルタの構成に対して，アルゴリズムが与えられる．高次元の信号空間に対するフィルタは，1 次元フィルタのテンソル積のように実現することができる．しかし，好ましい特性を持つ多次元フィルタを直接設計することは，これからの問題である．

周波数局在性の問題と 1 次元ウェーブレットフィルタの時間-周波数同時局在性の問題を議論した．これはデータの圧縮と符号化において重要な問題である．信号空間のフィルタをそれに近いウェーブレットに写す写像はその周波数局在性を保っても時間局在性を壊してしまう．時間-周波数同時局在性の問題は，ウェーブレットに関する重要な問題であることを注意しておきたい（例えば [D1] 参照）．

謝辞　著者は議論を助けて下さった St.Louis の Washington 大学の Pascal Auscher 教授，Jerry Cox 教授, Dan Fuhrmann 教授，そして St.Louis,Washington 大学 Guido Weiss 教授に謝意を表す．また Frazier は Daniel H.Wagner Associates を訪ねたときに，有益な話し合いをして下さった Jay Epperson 氏にも謝意を表す．

参考文献

[C]　A. Cohen. 1992. “Biorthogonal wavelets,” in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 123–152.

[CDFe]　A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. 1992. “Biorthogonal bases of compactly supported wavelets,” *Commun. Pure Appl. Math.* **45**: 485–560.

[CoMW]　R.R. Coifman, Y. Meyer, and V. Wickerhauser. 1992. “Wavelet analysis and signal processing,” in *Wavelets and Their Applications*, M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, eds., Boston: Jones and Bartlett, pp. 153–178.

[D1]　I. Daubechies. 1990. “The wavelet transform, time-frequency localization, and signal analysis,” *IEEE Trans. Inform. Theory* **36**: 961–1005.

[D2]　I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math.

[FK]　M. Frazier and A. Kumar. 1990. “The discrete orthonormal wavelet transform: An introduction,” Tech. Report No. WUCS-90-30, Dept. of Computer Sci., Washington Univ., St. Louis.

[K]　A. Kumar. 1990. “Time-frequency analysis and transform coding,” Ph.D. Thesis, Dept. of Computer Sci., Washington Univ., St. Louis.

[KFuFJ]　A. Kumar, D.R. Fuhrmann, M. Frazier, and B. Jawerth. 1992. “A new transform for time-frequency analysis,” *IEEE Trans. Signal Process.* **40**: 1697–1707.

[RVe]　O. Raoul and M. Vetterli. 1992. “Wavelets and signal processing,” *IEEE Signal Process. Mag.* **40**: 14–38.

[V] P.P. Vaidyanathan. 1990. "Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial," *Proc. IEEE* **78**: 56–93.

[VeH] M. Vetterli and C. Herley. 1992. "Wavelets and filter banks: Theory and design," *IEEE Trans. Signal Process.* **40**: 2207–2232.

[S] R. Strichartz. 1993. "Construction of orthonormal wavelets," this volume, Chap. 1.

第 3 章　L^2 空間の Gabor フレームとそれに関連した空間

John J. Benedetto and David F. Walnut

【概要】 フレームの基礎理論を復習したあと，Gabor フレームと Gabor 分解に話題を絞って話しを進める．特に L^1 空間と Bessel のポテンシャル空間の Gabor 分解について論ずる．(Sobolev 空間は Bessel のポテンシャル空間となる．) また L^2空間での平行移動のフレームを特徴付けし，L^2空間での Balian-Low 定理を証明する．この特徴付けは Gabor 理論にとって便利であるだけでなく，多重解像度解析のフレームの基礎でもある．Balian-Low 定理は古くから知られている不確定性原理の不等式と関連する．

3.1　導入

フレームの理論は Duffin と Schaeffer [DuSc] によって定式化され，非調和フーリエ級数の理論から生じた難問を議論するための道具となっている．非調和フーリエ級数は古典解析の一分野で，Paley と Wiener (1934) [PWi], Levinson (1940) [Le], Beurling と Malliavin (1960 年代) [BeuMa1], [BeuMa2] が中心になって築きあげた．この主題は明らかに，G.D.Birkhoff の Sturm-Liouville 関数についての仕事 (1917) とそれに続く J.L.Walsh の三角関数の結果 (1921) までさかのぼることができる．非調和フーリエ級数の分野では，また，基底の研究における重要な寄与，例えば，Köthe [Kö] と Bari [Ba] の結果がある．特筆すべきは，この分野全体にわたる Young の仕事 [Y] であり，フレームの概念の有効性を明らかにしている．

フレームの理論は，1986 年に Daubechies, Grossman と Meyer の扇動的な論文 [DGroMe] の中で再登場し,「ウェーブレットの時代」の夜明けが訪れることとなった．このころまでに，Daubechies による，信号処理への応用の可能性を強調した仕事，例えば [D1],[D2, 第 3 章] や，Feichtinger と Göchenig による，フレーム的分解法と群の表現論の物理的立場からの歴史的関係を示した仕事が出ていた．上述したもの以外にも面白い仕事はある．Heil と Walnut による概説 [HW] が 1 例である．

この章の目的は，フレーム理論の特論を話すことである．ここで扱う話題は，上述の研究の主役ではないが，さらなる発展のために基本的な役割をはたすように筆者には思える．この章では， Gabor フレームに的を絞ることにする．一般に，フレームは常にデータが冗長である場合の通信コード開発用の数学的道具を提供する．例えば，ある種の生物学的系や安定性が重要

なシステムがこの場合にあたる．筆者がウェーブレットでなく，Gabor フレームを強調する理由は，ウェーブレットが今では十二分に有名になっているからである．例えば，[D2], [FrJaw], [FrLawWe], [Me] などの論文（集）が出ている．筆者の意見では，平行移動や定数倍の変換に基づく分解，即ち Gabor 分解が，解析学に登場する空間や作用素で最重要なもののいくつかを扱うのに自然な手段である．

かなり数学的に書いたが，結局はその方が役に立つことになると思われるし，話題のいくつかは，より「応用的」側面を持つことをご理解いただけると思う．内容については目次を見て頂きたい．各節の始めに，短く用語の解説や歴史的背景について記述した．例えば，3.5 節では，Balian-Low 現象と，古くから知られている不確定性原理の不等式との関係を指摘し，参考文献をあげている．3.6 節の始めでは，有名な Sobolev 空間がさほど知られていない Bessel ポテンシャル空間の特別な場合であることを注意している．

この章の予備知識は，[Ru，第 1 部] 程度の関数解析の初歩と [StWe，第 1 章] 程度の調和解析の初歩である．記号については，これらの本や Hölmander [Hö], Schwartz [S] にある解析学で通常使うものに付け加えて，3.2 節に書いた略号や記号を使うことにする．

3.2 記号

$\mathbb{R}^d$ 上の積分は「$\int$」で表し，$\hat{\mathbb{R}}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の双対ベクトル空間を表す．これは，$\mathbb{R}^d$ と同型である．この章では，$\mathbb{Z}^d$上の和 $\sum a_n$ は $\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\le N} a_n$ を表す．ここで，$n=(n_1,\dots,n_d)$ であり，$|n|^2=\sum n_i^2$ である．d 次元トーラス $\mathbb{T}^d$は，コンパクト 群 $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$のことである．$f$ の $\mathbb{R}^d$上の フーリエ変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(\gamma)=\int f(t)e^{-2\pi i t\cdot\gamma}\,dt,\quad \gamma\in\hat{\mathbb{R}}^d$$

Fの$\hat{\mathbb{R}}^d$上の逆フーリエ変換を$\check{F}$で表す．$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ のノルムは $\|f\|_p$，もし $f\in X\neq L^p(\mathbb{R}^d)$ なら fのノルムは $\|f\|_X$．$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ はコンパクトな台を持つ無限回微分可能な関数の空間を表す．また，次のような記号を用いる．

- $\tau_a f(t)\equiv f(t-a)$
- $e_b(t)\equiv e^{2\pi i t\cdot b}$
- $|S|$ は集合 $S\subseteq\mathbb{R}^d$の Lebesgue 測度
- $\sharp F$ は集合 $F\subseteq\mathbb{Z}^d$の濃度 (counting measure)
- $\mathbf{1}_S$ は集合 $S\subseteq\mathbb{R}^d$の特性関数
- $S^\sim$ は集合 $S\subseteq\mathbb{R}^d$の補集合
- $B(T)$ は $\mathbb{R}^d$内の半径 T の球体

- $\delta_{m,n} \equiv \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$
- $\mathrm{Span}\, X$ は集合 X の要素によって生成されるベクトル空間
- $\overline{\mathrm{Span}}\, X$ は $\mathrm{Span}\, X$ の閉包
- $\mathrm{supp}(f)$ は f の台
- $Q \equiv [0,1)^d \times [0,1)^d$

3.3　Hilbert 空間のフレーム

この節の基本結果は Duffin and Schaeffer [DuSc] に依るものであり，彼らの非調和 Fourier 級数への深い貢献の一部である．

$\mathcal{H}$ を可分複素 Hilbert 空間とする．そのような二つの Hilbert 空間の間の線形写像 $L: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ が線形位相同型とはその写像が全単射かつ連続のこととする．その場合逆写像 L^{-1} も連続となる．

定義/注意 3.1　**(a)** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 内の列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ がフレームであるとは，ある数 $A, B > 0$ が存在して，

$$\text{全ての } y \in \mathcal{H} \text{に対して，} \quad A\|y\|^2 \leq \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \leq B\|y\|^2$$

が成り立つことである．ここで，$y \in \mathcal{H}$ のノルムは $\|y\| = \langle y, y\rangle^{1/2}$．$A$ と B はフレーム限界と呼ばれ，$A = B$のときはフレームがタイトであるという．フレームが完全であるとは，一つでも元を取り除くとフレームにならなくなってしまうことをいう．

(b) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 内の列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ が **Bessel 列**であるとは，**Bessel 写像**，

$$\begin{aligned} L: \mathcal{H} &\to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n\rangle\} \end{aligned}$$

が矛盾なく定義される線形写像であることをいう．

(c) $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ が Bessel 写像 L を持つ Bessel 列ならば，容易に

$$\text{ある } B > 0 \text{ が存在して，全ての } y \in \mathcal{H} \text{に対して，} \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \leq B\|y\|^2 \tag{3.1}$$

や，

$$\text{任意の } c = \{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \text{ に対して，} y \equiv L^*c = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} c_n x_n \in \mathcal{H} \tag{3.2}$$

を満たす y が存在することが示せる．ここで，$L^*: \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \mathcal{H}$ は L の随伴写像であり，$|n|^2 =$

$\sum n_j^2$, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ である．例えば [Be5，3.5 節] を見よ．Bessel 列は 3.6 節 や [Be5, 3.11 節] に登場する．

(d) 与えられた列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ に対し，S は写像

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ y &\mapsto \sum \langle y, x_n \rangle x_n \end{aligned}$$

を表す．もし $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ が Bessel 写像 L の Bessel 列なら，L^*L は連続で

$$S = L^*L \tag{3.3}$$

となる．[Be5，定理 6.7] 参照．明らかに，S は正値作用素である．即ち，

$$\text{全ての } y \in \mathcal{H} \text{に対し}, \langle Sy, y \rangle = \sum |\langle y, x_n \rangle|^2 \geq 0$$

が成り立つ．これを $S \geq 0$ と書き表す．特に，$S = S^*$.

定理 3.2 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ とする．

(a) 次は同値．

i. $\{x_n\}$ が $\mathcal{H}$ 内のフレーム限界 A, B のフレームである．

ii. $S: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が線形位相同型で，ノルムが $\|S\| \leq B$ かつ $\|S^{-1}\| \leq A^{-1}$.

(b) 上の **(a)** の条件のどちらかが成り立つ時，次の式を得る．

$$AI \leq S \leq BI, \qquad B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

$\left\{S^{-1}x_n\right\}$ は $\mathcal{H}$ のフレームで，フレーム限界は B^{-1} と A^{-1}．また，全ての $y \in \mathcal{H}$ に対して，

$$y = \sum \langle y, S^{-1}x_n \rangle x_n \tag{3.4}$$

と

$$y = \sum \langle y, x_n \rangle S^{-1}x_n \tag{3.5}$$

が成り立つ．$\left\{S^{-1}x_n\right\}$ は $\{x_n\}$ の双対フレームである． 式 (3.4) は y のフレーム分解であり，式 (3.5) は y の双対フレーム分解である．(I は 恒等写像で，$S \leq BI$ とは 各 $y \in \mathcal{H}$ に対して $\langle (BI - S)y, y \rangle \geq 0$ となること．)

証明 **(a)** の証明

まず， ii. を仮定する．$\|S\| \leq B$なので，

$$\langle Sy, y \rangle \leq \|Sy\| \, \|y\| \leq B\|y\|^2 = \langle By, y \rangle$$

を得る．従って，フレームの定義の中の 2 番目の不等式は成り立つ．次に，$S^{-1}\geq 0$ に注意すると

$$\langle S^{-1}y, y\rangle = \langle x, Sx\rangle = \langle Sx, x\rangle \geq 0$$

なので，$S^{-1}\leq A^{-1}I$ の時に限って $AI\leq S$ であることがわかる．(これは，関数解析の基礎的な事実からの帰結であり，正値写像と合成しても作用素の不等式が保たれることを保証する．但し，正値写像については，与えられた不等式の両辺の作用素と可換であるという条件がつく．例えば [He,269 ページ]，[Ru, 324 ページ] を見よ．)

$$\langle S^{-1}y, y\rangle \leq \|S^{-1}y\|\,\|y\| \leq A^{-1}\|y\|^2 = A^{-1}\langle y, y\rangle$$

なので，$S^{-1}\leq A^{-1}I$ が成り立つ．それゆえ $AI\leq S$ となり，その結果フレームの定義の中の 1 番目の不等式が成立する．これで i が証明された．

次に i. を仮定しよう．初めに

$$S_N y = \sum_{|n|\leq N}\langle y, x_n\rangle x_n$$

と置き，$S\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ が矛盾なく定義された連続な線形写像であることを示す．もし $N\geq M$ かつ $y\in\mathcal{H}$ ならば，ノルムの定義と Hölder の不等式と フレームの上限界を使って計算して，

$$\begin{aligned}\|S_N y - S_M y\|^2 &= \sup_{\|x\|=1}\left|\sum_{M<|n|\leq N}\langle y, x_n\rangle\langle x_n, x\rangle\right|^2\\ &\leq \sup_{\|x\|=1} B\|x\|^2\sum_{M<|n|\leq N}|\langle y, x_n\rangle|^2 = B\sum_{M<|n|\leq N}|\langle y, x_n\rangle|^2\end{aligned}$$

再びもう 1 度 2 番目のノルム不等式を利用すると，右辺は $M, N\to\infty$ のとき 0 に行く．それゆえ，$\mathcal{H}$ が完備であることから，

$$\lim_{N\to\infty} S_N y \equiv Sy$$

が $\mathcal{H}$ 内に存在する．S が連続であることを確かめるために，上と同様に計算して

$$\begin{aligned}\|Sy\|^2 &= \sup_{\|x\|=1}\left|\sum\langle y, x_n\rangle\langle x_n, x\rangle\right|^2\\ &\leq \sup_{\|x\|=1} B\|x\|^2 B\|y\|^2 = B^2\|y\|^2\end{aligned}$$

を得る．

フレームの下限界により S は単射である．実際，もし $Sy = 0$ なら，

$$\langle Sy, y\rangle = \sum|\langle y, x_n\rangle|^2 = 0$$

とフレームの条件より $\|y\|=0$ である．ゆえに $y=0$.

最後に，S が全射であることと S^{-1} が連続であることを確かめる．いろいろな証明法があるが，ここでは Neumann 展開を使うことにする．例えば [GoGol, 70 ページ] あるいは [Ru, 231 ページ] を見よ．(これは $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の集合の Banach 代数としての性質を全面に出した手法である)．証明を完了させよう．フレームにつけた仮定から得られる $AI \leq S \leq BI$ を用いると，

$$\frac{1}{B}S \leq I \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{B}S \geq \frac{A}{B}I$$

なので，

$$0 \leq I - \frac{1}{B}S \equiv P_1 \leq I - \frac{A}{B}I = \frac{B-A}{B}I \equiv P_2$$

を得る．$P_1, P_2 \geq 0$ であり，(それゆえ P_1, P_2 は自己随伴作用素) また $P_2 \geq P_1$であることから，$\|P_2\| \geq \|P_1\|$ を得る；これは次の事実からの帰結である．全ての自己随伴な有界作用素 P に対して，

$$\|P\| = \sup\{|\langle Px, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

例えば，[GoGol, 110 ページ] を見よ．それゆえ，

$$\left\| I - \frac{1}{B}S \right\| \leq \left\| \frac{B-A}{B}I \right\| = \frac{B-A}{B} < 1$$

従って，Neumann 展開 (これは Liouville にまでさかのぼる) により，

$$\left(\frac{1}{B}S\right)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

は有界線形作用素．最終的に，

$$S^{-1} = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{B}S\right)^{-1} = \frac{1}{B}\sum_{k=0}^{\infty}\left(I - \frac{1}{B}S\right)^k \tag{3.6}$$

は $\mathcal{H}$上矛盾なく定義された有界線形作用素であり，S と S^{-1} についての主張は正しい．なお式 (3.6) での和の収束は $\mathcal{H}$ の閉球上の一様収束である．

(b) の証明

(b) の最初の三つの主張は **(a)** の証明の中の計算から直ちにでる．フレーム分解に関しては，S の定義と S^{-1} の自己随伴性 ($\because S^{-1} \geq 0$) を用いると 式 (3.4) の右辺にあたる $y = SS^{-1}y$ を導くことができる．双対フレーム分解に関しては，S の定義と S^{-1} の連続性を用いると 式 (3.5) の右辺にあたる $y = S^{-1}Sy$ を導くことができる． ∎

注意 3.3　明らかに，$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ は $A = B = 1$ のタイトフレーム．逆に，もし $\{x_n\}$ が $A = B = 1$ のタイトフレームで各 n に対して $\|x_n\| = 1$ なら，$\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底となる．後半の主張を確かめるために，まずタイト性と $A = 1$ を用いて式

$$\text{全ての } m \text{ に対して}, \|x_m\|^2 = \|x_m\|^4 + \sum_{n \neq m} |\langle x_m, x_n \rangle|^2$$

を出し，次に各 $\|x_n\| = 1$ より $\{x_n\}$ が正規直交であることを得る．最後に良く知られた事実；$\{x_n\}$ が正規直交の時，これが $\mathcal{H}$ の正規直交基底になるための必要十分条件は

$$\text{全ての } y \in \mathcal{H} \text{に対して}, \|y\|^2 = \sum |\langle y, x_n \rangle|^2$$

を利用すれば証明終り．例えば，[Be5，定理 3.1–3.4] を見よ．

正規直交基底であるタイトフレームを特徴づけするこの結果は，実は，Vitali [V] によって 1921 年に証明された小粒だがキラリと光る結果の特別な場合になっている．Vitali は 正規直交列 $\{x_n\} \subseteq L^2[a, b]$ が完全，即ち $\{x_n\}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は

$$\text{全ての } t \in [a, b] \text{ に対して}, \sum \left| \int_a^t x_n(u)\, du \right|^2 = t - a \tag{3.7}$$

であることを証明したのである．これは先に述べた結果より強い．なぜなら 式 (3.7) は関数 $y = \mathbf{1}_{[a,t]}$ に対する $A = 1$ のタイト性を意味している．

定義/注意 3.4　**(a)** Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ が極小とは

$$\text{全ての } n \in \mathbb{Z}^d \text{に対して}, x_n \notin \overline{\operatorname{Span}}\, \{x_k : k \neq n\}$$

二つの列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$，$\left\{y_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ が双正規直交とは

$$\text{全ての } m, n \in \mathbb{Z}^d \text{に対して}, \langle x_m, y_n \rangle = \delta_{m,n}$$

(b) 与えられた列 $\{x_n\} \subseteq \mathcal{H}$ に対して，簡単な Hahn–Banach の議論を使うと，$\{x_n\}, \{y_n\}$ が双正規直交になるような列 $\{y_n\} \subseteq \mathcal{H}$ が存在するための必要十分条件は $\{x_n\}$ が極小，であることがわかる．さらに，$\{x_n\}$ が $\mathcal{H}$ のなかで極小であることに付け加えて $\overline{\operatorname{Span}}\, \{x_n\} = \mathcal{H}$ となる時に限って $\{y_n\}$ は一意に定まる．

(c) 安定フレームの概念は [Be4] で導入された．今からこれについて記すことにする．というのは，安定性の概念は極小列や双正規直交列と組み合わさって使われるからである．例えば，[Be5，節 3.5g] を見よ．また，安定性に関係した確率論的な発想を使った新しいフレームの特徴付け [Hou] もある．

定理 3.5　$\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ のフレーム限界が A と B のフレームとする．

(a) 各 $c \equiv \{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ に対し，$y_c \equiv \sum c_n x_n$ は $\mathcal{H}$ 内で収束し，$\|y_c\|^2 \le B\|c\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}$ となる．

(b) 各 $y \in \mathcal{H}$ に対し，$c_y \equiv \{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ が存在して $y = \sum c_n x_n \in \mathcal{H}$ を満たす．実は，各 n に対し，$c_n = \langle y, S^{-1}x_n\rangle$ とすることができる．

(c) $y \in \mathcal{H}$ が $b_y \equiv \{b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ を用いて $y = \sum b_n x_n \in \mathcal{H}$ と表せ，ある n に対して $b_n \ne \langle y, S^{-1}x_n\rangle$ なる性質を持つとすると，$\{b_n\}$ はどんな $x \in \mathcal{H}$ に対しても $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}$ の形にはならない．また，

$$\sum |b_n|^2 = \sum |\langle y, S^{-1}x_n\rangle|^2 + \sum |\langle y, S^{-1}x_n\rangle - b_n|^2 \tag{3.8}$$

が成り立つ．

(d) m を固定し，$X_m = \{x_n : x_n \ne x_m\}$ とおく．

このとき，もし $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle \ne 1$ なら，X_m はフレームとなる．

また，もし $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle = 1$ なら X_m は完全でない．さらに，$\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle = 1$ なら，すべての $n \ne m$ に対して $\langle x_m, S^{-1}x_n\rangle = 0$．

(e) $\{x_n\}$ が完全フレームなら $\{x_n\}$, $\{S^{-1}x_n\}$ は双正規直交であり，$\{S^{-1}x_n\}$ は $\mathcal{H}$ の中で $\{x_n\}$ に双正規直交なただ一つの列となる．さらに，X_m (**(d)** で定義したもの) は完全でない．

(f) $\{x_n\}$ は極小の時に限って完全フレームとなる．

証明　$y_N = \sum_{|n|\le N} c_n x_n$ とすると，**(a)** はフレーム条件の上からの評価と $\mathcal{H}$ の完備性及び以下の評価から得られる．

$$\begin{aligned}
\|y_N - y_M\|^2 &= \sum_{M<|n|\le N} c_n \langle x_n, y_N - y_M\rangle \\
&\le \left(\sum_{M<|n|\le N} |c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum |\langle y_N - y_M, x_n\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&\le B\|y_N - y_M\| \left(\sum_{M<|n|\le N} |c_n|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

(b) は定理 3.2 の系．

(c) については， 式 (3.8) から明らかに，一般性を失うことなく $b_y \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ と仮定して良い．もし，与えられた $y = Sx$ と全ての n に対して $b_y \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ かつ $c_n \equiv \langle y, S^{-1}x_n\rangle$ なら，$c_n = \langle x, x_n\rangle$ かつ $0 = \sum(b_n - c_n)x_n$ となる．よって，この最後の式に x を内積すると，

$$\sum (b_n - c_n)\overline{c_n} = 0 \tag{3.9}$$

が出る． 式 (3.8) は 式 (3.9) から出る． このことは $\sum b_n \overline{c_n}$ が 式 (3.8) の右辺であることに注意して，この右辺を (再び) 展開して 式 (3.9) を用いるとわかる．最後に，もし，$\{b_n\}$ が，

ある x に対して $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}$ の形をしているなら，$0 = \sum \langle x-y, S^{-1}x_n\rangle S^{-1}x_n$ であり，それゆえ，もし S_{-1} がフレーム $\{S^{-1}x_n\}$ に関して「S-作用素」なら，$S_{-1}(x-y)=0$．これは $x=y$ を意味し，b_y についてのはじめの仮定に反する．(以上で **(c)** の証明完了.)

次に **(d)** を仮定して **(e)** を示す．このとき，$\{x_n\}$ は完全なので，全ての m に対して $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle = 1$ となる．それゆえ，**(d)** の 2 行めより X_m は完全でない．双正規直交性は **(d)** の最後の行から得られる．$\{S^{-1}x_n\}$ の一意性は，定義/注意 3.4**(b)** と同様のやり方で，**(b)** を再び利用する．これで **(e)** が証明された．

(f) は，もし $\{x_n\}$ が完全なら **(e)** と定義/注意 3.4**(b)** から極小性が出る．逆に，もし $\{x_n\}$ が極小なら，各 m に対して $x_n \notin \overline{\mathrm{Span}}\, X_m$．$\{x_n\}$ が完全フレームであることを示すには，各 X_m がフレームでないことを示さなければいけない．もし，すべての X_m がフレームだったとすると定理 3.2**(b)** より $x_m = \sum_{n\neq m} c_n x_n$．これは，極小性により不成立．これで **(f)** が示された．

残すは，**(d)** の証明のみ．m を固定し，$c_n \equiv \langle x_m, S^{-1}x_n\rangle$ と定義する．この時，分解 $x_m = \sum c_n x_n = \sum \delta_{m,n} x_n$ を得る．$b_n = \delta_{m,n}$ に対して 式 (3.8) を適用すると，

$$\sum_{n\neq m} |c_n|^2 = \frac{1-|c_m|^2-|c_m-1|^2}{2} < \infty$$

を得る．

もし $c_m = 1$ なら，各 $n \neq m$ に対して $\sum_{n\neq m}|c_n|^2 = 0$，すなわち，$\langle x_n, S^{-1}x_m\rangle = \langle x_m, S^{-1}x_n\rangle = 0$．これは **(d)** の最終行に他ならない．しかしながら，$c_m = 1$ なので $S^{-1}x_m \neq 0$．零でない元を消してしまっているので，X_m は完全でない．

もし $c_m \neq 1$ なら，x_m のフレーム分解から

$$x_m = \frac{1}{1-c_m}\sum_{n\neq m} c_n x_n$$

がでる．$\langle y, x_m\rangle$ にこの式を代入すると，フレームの仮定を使って，

$$\text{全ての } y\in\mathcal{H} \text{に対して，} \frac{A}{C}\|y\|^2 \leq \frac{1}{C}\sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \leq \sum_{n\neq m} |\langle y, x_n\rangle|^2 \leq B\|y\|^2$$

を得る．ここで，$C \equiv 1 + |1-c_m|^{-2}\sum_{n\neq m}|c_n|^2$ とおいた．以上より，X_m は フレーム限界が A/C と B のフレームとなる．∎

定義 3.6　**(a)** 列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ の **Schauder 基底**あるいは（単に）の**基底**とは，各 $y \in \mathcal{H}$ に対して表示 $y = \sum c_n(y) x_n$ が存在して一意のときをいう．基底 $\{x_n\}$ が**無条件基底**とは，ある $C > 0$ が存在して，全ての有限集合 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$，$\sharp F < \infty$ と $n \in F$ かつ $|b_n| \leq |c_n|$

を満たす全ての b_n，$c_n \in \mathbb{C}$，に対して

$$\left\| \sum_{n \in F} b_n x_n \right\| \le C \left\| \sum_{n \in F} c_n x_n \right\|$$

を満たすものをいう．無条件基底 $\{x_n\}$ が 有界 とは，ある $A, B > 0$ が存在して全ての n に対して，

$$A \le \|x_n\| \le B$$

となることをいう．

(b) 列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ が **Riesz 基底**とは，正規直交基底 $\{u_n\}$ と線形位相同型 $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が存在して，各 n に対して $Lx_n = u_n$ となることをいう．

(c) 完全でないフレームは決して基底になれないことに注意．これを見るために，m を X_m (定理 3.5(**d**) で定義した) が $\mathcal{H}$ のフレームとなるように選ぶ．特に，X_m は $\mathcal{H}$ で完全であり，定理 3.5(**d**) から $\langle x_m, S^{-1}x_m \rangle \neq 1$ となる．ゆえに，フレーム分解と $\mathcal{H}$ での自明な表現 $(x_m = x_m)$ は異なる；つまり，表現が一意でなくなり，基底の定義に反する．

次の定理で (**b**) ならば (**c**) の部分は Köthe (1936) [Kö] が証明した．例えば [Y，32–36 ページ] を見よ．(**c**) ならば (**b**) は明らか．(**a**) と (**c**) の同値性は [Y，188–189 ページ] にある．Nina Bari の貢献 (1951) [Ba] はこの定理の全体に影響を及ぼしているだけでなく，最終的には Riemann の三角級数に関する一意性の仕事につながる繊細な問題にも衝撃を与えた．Young の論説 [Y] があるので，証明は省略する．

定理 3.7 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ は $\mathcal{H}$ に含まれているとする．次の三つは同値．

(a) $\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ の完全フレーム

(b) $\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ の有界無条件基底

(c) $\{x_n\}$ は $\mathcal{H}$ の Riesz 基底

明らかに，正規直交基底は完全フレームであり，ただのフレームでもある．

例 3.8 (**a**) Duffin と Schaeffer の主結果の一つ [DuSc，定理 I] は $\{e_{-t_m}\}$ が $L^2[-\Omega, \Omega]$ のフレームだという事実である．ここで $\{t_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ は一様に稠密で，一様密度は 2Ω 以上．一様密度の概念は [Be5，6 節] で定義されている．無作為抽出の現代理論における Duffin と Schaeffer の定理の説明も [Be5，6 節] にある．

(b) もし $\{e_{-t_m}\}$ が $L^2[-\Omega, \Omega]$ のフレームで $X_m \equiv \{e_{-t_n} : n \neq m\}$ が $L^2[-\Omega, \Omega]$ のフレームでないなら，$\{e_{-t_n}\}$ は $L^2[-\Omega, \Omega]$ の完全フレームである．[DuSc，補題 VII]．この結果は勝手なフレームに対して成り立つわけではない．例えば，定理 3.5(**d**)．

注意 3.9　**(a)** 定理 3.5**(a)**,**(b)** のお蔭で，$\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ がフレームの時，写像

$$\begin{array}{rcl} \ell^2(\mathbb{Z}^d) & \to & \mathcal{H} \\ \{c_n\} & \mapsto & \sum c_n x_n \end{array}$$

が連続かつ全射であることがわかる．

(b) 定理 3.5**(a)**,**(b)** とフレーム分解の重要性を思うと，$\mathcal{H}$ のフレーム $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ と $y = \sum c_n x_n$ なる形の分解との関係を詳細に研究するのは自然である．実際，列 $\left\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathcal{H}$ は，ある $C > 0$ が存在して全ての $y \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\sum |\langle y, x_n\rangle|^2 < \infty \tag{3.10}$$

$$\text{ある } c_y \equiv \{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \text{ が存在して}, \mathcal{H}\text{内で } y = \sum c_n x_n \tag{3.11}$$

かつ

$$\|c_y\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \leq C\|y\| \tag{3.12}$$

が成り立つ時に限ってフレームとなる．例えば 3.6 節での原子の定義と扱い方をみよ．

この結果を証明するために，もし $\{x_n\}$ がフレームだとしたら，フレームの上限界によって 式 (3.10) が得られることに注意しよう．このとき 式 (3.11) はフレーム分解をし，$c_y = \left\{\langle y, S^{-1}x_n\rangle\right\}$ と置くことにより直ちに得られる．式 (3.12) は再びフレームの上限界を用いて出る．式 (3.12) の C は $C = A^{-1/2}$ と置けばよい．

逆に，もし 式 (3.10) ∼ 式 (3.12) を仮定すれば，フレーム上限界は 式 (3.10) と 式 (3.1) からでる．フレーム下限界を得るために，式 (3.11) と 式 (3.12) を用いて次の評価式を作る:

$$\begin{aligned} |\langle y, x\rangle|^2 &= \left|\left\langle y \sum c_n(x) x_n \right\rangle\right|^2 \\ &= \left|\sum \overline{c_n(x)} \langle y, x_n\rangle\right|^2 \leq C^2 \|x\|^2 \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \end{aligned}$$

これによって，

$$\|y\|^2 \equiv \sup_{\|x\|=1} |\langle y, x\rangle|^2 \leq C^2 \sum |\langle y, x_n\rangle|^2$$

そして $A = 1/C^2$ とおけばフレーム下限界が得られる．

3.4 L^2 の Gabor フレーム

この節の観点は Gabor の原初的発想 (1946) [G] にさかのぼる．それは，工学上の問題における時間-周波数解析と関係し，物理の Weyl 作用素 やコーヒーレント状態の解析，例えば [vo, 405–407 ページ]，よりも更に早い．Gabor の方法 および Duffin と Schaeffer の フレームの理論は自然にこの節の主題である Gabor フレームの研究にたどり着く．3.1 節で引用された参考文献に加えて，[H，Chapter 7] も挙げておく．

当然，Fourier 変換がこの主題の主役を勤めることになる．$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ の **Fourier** 変換は

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(t) e^{-2\pi i t\cdot\gamma}\, dt, \qquad \gamma \in \hat{\mathbb{R}}^d$$

ここで，積分は $\mathbb{R}^d$ 上をわたり，$\hat{\mathbb{R}}^d$ は双対ベクトル空間と考えた $\mathbb{R}^d$ である．これによって，「時間」$t \in \mathbb{R}^d$ と 「周波数」$\gamma \in \hat{\mathbb{R}}^d$ が自然に区別できる．F の逆 **Fourier** 変換を $\check{F}$ で表す．

定義 3.10 **(a)** $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，$a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ とする．各 $a_j, b_k > 0$ と仮定し，平行移動とモジュレーションを順に，

$$\tau_{na} f(t) \equiv f(t - na) \text{ と } e_{mb} \equiv e^{2\pi i t\cdot mb}$$

で定義する．ここで $m, n \in \mathbb{Z}^d$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $na = (n_1 a_1, \ldots, n_d a_d)$, $mb = (m_1 b_1, \ldots, m_d b_d)$.

(b) コーヒーレント状態の **Gabor** 系あるいは **Weyl–Heisenberg** 系$\left\{\varphi_{m,n}\colon m, n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ を

$$\varphi_{m,n} = e_{mb}\tau_{na} g$$

で定義する．明らかに，

$$\hat{\varphi}_{m,n} = \tau_{mb}(e_{-na}\hat{g})$$

$\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ のフレームのとき，これを **Gabor** フレームと呼ぶ．明らかに，Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ は，$\{\tau_{na} e_{mb} g\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ のフレームであるときに限って，$L^2(\mathbb{R}^d)$ の Gabor フレームになる．

(c) $f \in L^1_{\text{loc}}$ $(\mathbb{R}^d)$ の **Zak** 変換とは形式的に

$$Zf(x, \omega) = a^{d/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(xa + ka) e^{2\pi i k\cdot\omega}, (x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d$$

と定義される．ここで，積は成分ごとにとる．また，$a^{d/2} = \prod a_j^{1/2}, a_j > 0$．Zak (1967) ([J] を見よ) によるものだけでなく，Weil–Brezin (1964，1970)，Igusa (1972)，Auslander–Tolimieri

(1975), による独自の定式化がある．形式的に，Zf は次の意味で準周期的である．

$$Zf(x+n,\omega) = e^{-2\pi i n\cdot\omega} Zf(x,\omega) \text{ かつ } Zf(x,\omega+n) = Zf(x,\omega) \tag{3.13}$$

ここで $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d$，$n \in \mathbb{Z}^d$．特に，$Zf$ は $Q \equiv [0,1)^d \times [0,1)^d$ 上の値で完全に決まる．

(d) $a, b \in \mathbb{R}^d$ を各成分が $a_j, b_k = 1$ とする．定理 3.16 で見るように，Zak 変換は Gabor 系の閉包の種々の性質を特徴付するのに有用である．これは，定理 3.15 と，$a = b = 1$ で $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のときにおける次の計算の帰結である．

$$Z\varphi_{m,n}(x,\omega) = e_m(x)e_n(\omega)Zg(x,\omega) \equiv e_{m,n}(x,\omega)Zg(x,\omega),\ (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d \tag{3.14}$$

[Be1，2 節] の正規化と [DGroMe]，[Be5，2.8 節] の議論を見よ．

フレームと双対フレームの関係は定理 3.2 で確立されている．次の結果は Gabor フレームの双対フレームは Gabor フレームであることを示している．この定理は，例えば [Be5，定理 4.2] の証明に応用されている．

定理 3.11　$\left\{\varphi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ を $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $a, b \in \mathbb{R}^d$ に関する $L^2(\mathbb{R}^d)$ の Gabor フレームとする．S をそれに随伴する線形位相同型写像とする．例えば 定義/注意 3.1 や 定理 3.2 を見よ．このとき，全ての $m, n \in \mathbb{Z}^d$ と全ての $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$S^{-1}(e_{mb}\tau_{na}f) = e_{mb}\tau_{na}S^{-1}f \tag{3.15}$$

証明　最初に

$$S^{-1}(e_{mb}\tau_{na}f) = S^{-1}(e_{mb}\tau_{na}SS^{-1}f)$$

であることに注意する．これより

$$S(e_{mb}\tau_{na}f) = e_{mb}\tau_{na}Sf \tag{3.16}$$

を確かめれば十分．これを見るため，次を計算する．

$$\begin{aligned} S(e_{mb}f_1) &= \sum_{p,q} \langle e_{mb}f_1, e_{pb}\tau_{qa}g\rangle e_{pb}\tau_{qa}g \\ &= \sum_{p,q} \langle f_1, e_{(p-m)b}\tau_{qa}g\rangle e_{pb}\tau_{qa}g \\ &= e_{mb}\sum_{p,q} \langle f_1, e_{(p-m)b}\tau_{qa}g\rangle e_{(p-m)b}\tau_{qa}g = e_{mb}Sf_1 \end{aligned}$$

また

$$S(\tau_{na}f_2) = \sum_{p,q} \langle \tau_{na}f_2, e_{pb}\tau_{qa}g\rangle e_{pb}\tau_{qa}g$$

$$= \sum_{p,q} \langle f_2, e_{pb}\tau_{(q-n)a}g\rangle e^{-2\pi ina\cdot pb} e_{pb}\tau_{qa}g$$

$$= \tau_{na}\left(\sum_{p,q} \langle f_2, e_{pb}\tau_{(q-n)a}g\rangle e_{pb}\tau_{(q-n)a}g\right) = \tau_{na}Sf_2$$

それゆえ，もし $f_1 = \tau_{na}f$ なら，$S(e_{mb}\tau_{na}f) = e_{mb}S(\tau_{na}f) = e_{mb}\tau_{na}Sf$; これで 式 (3.16) が得られた． ∎

$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$ とする．ここで，各 $a_j > 0$．また

$$G(t) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |g(t-na)|^2 \tag{3.17}$$

とおく．$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ かつ

$$\int_I G(t)\,dt = \int |g(t)|^2\,dt < \infty$$

なので，G はほとんどいたるところ定義される．ここで，$I \subseteq \mathbb{R}^d$ は原点と $a \in \mathbb{R}^d$ で決まる「長方形」．明らかに，G は $\mathbb{R}^d$ 上 a-周期的．次の結果は G の言葉で Gabor フレームとなる必要条件を述べたものである．

定理 3.12 $\left\{\varphi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}^d\right\}$ を $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $a, b \in \mathbb{R}^d$ に関する $L^2(\mathbb{R}^d)$ の Gabor フレームとする．また，A, B をフレーム限界とする．もし G が 式 (3.17) によって定義されるなら，

$$\text{ほとんどいたるところ} \quad A\prod b_j \le G(t) \le B\prod b_j \tag{3.18}$$

そして，特に，$g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

証明 $J \subseteq \mathbb{R}^d$ を原点と $(1/b_1, \ldots, 1/b_d) \in \mathbb{R}^d$で定義される「長方形」とし，$J_n = J + na$ とおく．$\left\{b^{d/2}e_{mb}\right\}$ が $L^2(J_n)$ 内の直交列であることは簡単にわかるし，また，古典的な計算により，$\left\{b^{d/2}e_{mb}\right\}$ が $L^2(J_n)$ の直交列であることも簡単にわかる．

さて，$\text{essinf}G(t) < A\prod b_j$ と仮定しよう．このとき，$A-\epsilon > 0$ を満たす$\epsilon > 0$ に対し，$\Delta \subseteq J$ が存在して $|\Delta| > 0$ かつ，

$$\Delta\text{上ほとんどいたるところ} \quad G(t) \le (A-\epsilon)\prod b_j$$

となる．$f \equiv \mathbf{1}_\Delta$ とし，上述の直交基底を Plancherel の定理に適用して計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{m,n} |\langle f, e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2 &= \sum_n \left(\sum_m |\langle f\tau_{na}\bar{g}, e_{mb}\rangle|^2\right)\\ &= \sum_n \frac{1}{\prod b_j}\int |f(t)|^2 |g(t-na)|^2\,dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\prod b_j}\int |f(t)|^2 G(t)\,dt \le A\|f\|_2^2 - \epsilon\|f\|_2^2$$

それゆえ，フレームであるという仮定に矛盾する．

同様の計算が 式 (3.18) の上界を与える． ∎

定理 3.13　$\left\{\varphi_{m,n}\colon m,n\in\mathbb{Z}^d\right\}$ を $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $a,b\in\mathbb{R}^d$ に関する Gabor 系とする．また，$A,B>0$ が存在して，式 (3.17) で定義された G が以下の条件を満たすとする．

$$\text{ほとんどいたるところ } A\le G(t)\le B$$

もし，$\operatorname{supp} g\subseteq I$，ここで I は原点と $(1/b_1,\ldots,1/b_d)\in\mathbb{R}^d$ で決まる「長方形」，とすると，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の Gabor フレームとなる．フレーム限界は $A\prod b_j^{-1}$ と $B\prod b_j^{-1}$ であり，

$$\text{全ての } f\in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ に対して}, S^{-1}f=\frac{\prod b_j}{G}f \tag{3.19}$$

となる．

証明　$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，ほとんどいたるところ $G\le B$ なので，$\operatorname{supp} f\tau_{na}\bar{g}\subseteq I_n\equiv I+na$ となる．ここで $n\in\mathbb{Z}^d$, $|I_n|=\prod b_j^{-1}$, $f\tau_{na}\bar{g}\in L^2(\mathbb{R}^d)$．正規直交基底 $\left\{b^{d/2}e_{mb}\right\}$ と Plancherel の定理を使って計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{m,n}|\langle f,e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2 &= \prod b_j^{-1}\sum_n\int_{I_n}|f(t)|^2|g(t-na)|^2\,dt\\ &= \prod b_j^{-1}\int|f(t)|^2G(t)\,dt\end{aligned} \tag{3.20}$$

ここで 2 番目の等式は台についての仮定をつかっている．等式 (3.20) と必要条件 $A\le G\le B$ から結論の最初の部分が出る．

$\left\{b^{d/2}e_{mb}\right\}$ が $L^2(I_n)$ の直交基底なので，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 内の Fourier 展開

$$\text{全ての } f\in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ に対して}, \left(\prod b_j^{-1}\right)f\tau_{na}\bar{g}=\sum\langle f\tau_{na}\bar{g},e_{mb}\rangle e_{mb} \tag{3.21}$$

を得る．$\{\varphi_{m,n}\}$ がフレームなので，随伴作用素 S は線形位相同形写像となる．また，式 (3.21) を使うと，

$$Sf=\sum_n\tau_{na}g\left(\prod b_j^{-1}\right)f\tau_{na}\bar{g}=\left(\prod b_j^{-1}\right)Gf \tag{3.22}$$

と書くことができる．式 (3.19) は 式 (3.22) で f を $S^{-1}f$ に置き換えることによって得られる． ∎

注意 3.14　定理 3.13 は Gabor フレームの最も易しい十分条件である．自己相関条件の言

葉で g の台に関する条件を緩めることができる．これは Daubechies によって [D1] のなかで Gabor フレームの研究に用いられてれいる．この一般化のおかげで，著者 Walnut は Gabor フレームを得るのに Wiener 融合空間の判定条件を用いるようになった ([HW，定理 4.1.8，定理 4.2.1，定理 4.2.2]，[W1]，[W2])．

自己相関条件は 3.9 節で Gabor 分解するときに必要となる．自己相関の Fourier 変換 はパワー・スペクトルである；また，Wiener–Plancherel 公式を証明するのに Wiener 融合空間が使われる．これらは，信号エネルギーが無限大のときの Plancherel の定理にあたり，(パワー) スペクトルの評価のときに活躍する．例えば [Be3] を見よ．著者 Benedetto と Benke，Evans による参考書もある．

次の結果では $p<2$ の場合に言及する．$p=1$ の結果は 3.9 節で論じる．最も役に立つのは $p=2$ の場合である．

定理 3.15 もし $1 \leq p \leq 2$ なら，

$$Z\colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(Q)$$

は矛盾なく定義された連続線形作用素で単射，作用素ノルムは $\|Z\| \leq 1$．もし，$p=2$ なら，Z はユニタリ写像となる．

証明 簡単のため，$a=(1,\ldots,1)$ とする．もし $p=2$ なら，$\{f(x+k)e^{2\pi ik\cdot\omega}\colon k\in\mathbb{Z}^d\}$ が Q 上直交していることがわかるので，これを用いて，

$$\|Zf\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_k \int_Q |f(x+k)e^{2\pi ik\cdot\omega}|^2\,dx\,d\omega = \|f\|_2^2$$

それゆえ，全射性を確かめさえすれば，定理は証明されたことになる．

$\{\varphi_{m,n}\}$ を $g=\mathbf{1}_{[0,1)^d}$ かつ $a=b=1$ に対応する Gabor 系とする．$\{\varphi_{m,n}\}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の正規直交基底であり，$(x,\omega)\in Q$ に対して $Z\varphi_{m,n}(x,\omega)=e_m(x)e_n(\omega)$ となる．それゆえ，Z は，正規直交基底 $\{\varphi_{m,n}\}$ を正規直交基底 $\{e_m(x)e_n(\omega)\}$ の上に写す．よって Z は全射となる．[Be1] のユニタリ性の証明を参考にせよ．

もし $p=1$ かつ $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ なら $\|Zf\|_{L^1(Q)} \leq \|f\|_1$ は明らか．凸性の理論より $p\in(1,2)$ の時の結論を得る．例えば，[StWe]． ∎

次の結果はコーヒーレント状態の部分的な定式化を含んでいる．文献は長い間，この節の初めに挙げた von Neumann を参照するほかなかった．証明は初等的であり，そのなかで定理 3.15 を本質的に使う．

定理 3.16 $\left\{\varphi_{m,n}\colon m,n\in\mathbb{Z}^d\right\}$ を $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ かつ $a=b=(1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^d$ に関する Gabor

系とする．

(a) $\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の中で完全であるための必要十分条件は，ほとんど至る所 $Zg \neq 0$．

(b) $\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の中で極小かつ完全であるための必要十分条件は，$1/Zg \in L^2(Q)$．

(c) $\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の中で正規直交基底であるための必要十分条件は，ほとんど至る所 $|Zg| = 1$．

(d) $\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の中でフレーム限界 A, B のフレームであるための必要十分条件は，

$$\text{ほとんど至る所}\quad A \leq |Zg(x,\omega)|^2 \leq B \tag{3.23}$$

この場合，$\{\varphi_{m,n}\}$ は完全フレームとなる．

証明　ユニタリ性と　式 (3.14) により，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内で完全であるための必要十分条件は $\{e_{m,n}Zg\}$ が $L^2(Q)$ 内で完全であることとなる．もし $\{e_{m,n}Zg\}$ が完全で $X \equiv \{(x,\omega)\colon Zg(x,\omega) = 0\}$ なら，$F \equiv \mathbf{1}_X$ とおくと計算により，各 $m, n \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\langle F, e_{m,n}Zg\rangle = \langle 0, e_{m,n}\rangle = 0$ となる．完全性の仮定より，Q 上ほとんど至る所 $F = 0$ であり，また，Q 上ほとんど至る所 $Zg \neq 0$ となる．

逆に，ほとんど至る所 $Zg \neq 0$ のとき，F が $\{e_{m,n}Zg\}$ 上 0 なら，ほとんど至る所 $F = 0$ となることを示さなければならない．明らかに，$F\overline{Zg} \in L^2(Q)$ であり，$\{e_{m,n}\}$ の完全性と仮定より，ほとんどいたるところで $F\overline{Zg} = 0$ となる．ほとんどいたるところ $Zg \neq 0$ より $F = 0$ が得られる．これで **(a)** が証明された．**(c)** が **(d)** と正規直交基底はフレーム限界 $A = B = 1$ の完全フレームになることから出る．定理 3.7 と [Be1，定理 3.5] 内の証明を参照せよ．

(d) に関して．最初に　式 (3.23)　を仮定する．この場合 $\{e_{m,n}Zg\}$ が $L^2(Q)$ のフレームであることさえ示せば良い．$\{e_{m,n}\}$ は $L^2(Q)$ の正規直交基底なので，次式を得る．

$$\text{全ての } F \in L^2(Q) \text{ に対して，} \sum_{m,n} |\langle F, e_{m,n}Zg\rangle|^2 = \|F\overline{Zg}\|^2_{L^2(Q)} \tag{3.24}$$

結論はこの等式と，式 (3.23)，フレームの定義から直ちに出る．

逆に，ユニタリ性より，$\{e_{m,n}Zg\}$ は $L^2(Q)$ のフレームとなる．式 (3.24)　と各 $F \in L^2(Q)$ に対するフレーム不等式を使うことにより，式 (3.23)　が不成立と仮定すると　式 (3.23)　が得られてしまい矛盾となる．

(d) を完成するために 定理 3.5**(e)** の力を借り，$X_{j,k} \equiv \{e_{m,n}Zg\colon (m,n) \neq (j,k)\}$ が完全でないことをたしかめる．一般性を失うことなく，$j = k = 0 \in \mathbb{Z}^d$ として良い．式 (3.23)　により，$F \equiv 1/\overline{Zg} \in L^2(Q) \setminus \{0\}$; さらに もし $(m,n) \neq (0,0)$ なら $\langle F, e_{m,n}Zg\rangle = 0$ 即ち $F \not\equiv 0$ は $X_{0,0}$ と直交する．従って，$X_{0,0}$ は完全でない．

(b) は $1/Zg \in L^2(Q)$ を仮定して極小性を確かめさえすれば **(a)** からでる．上の段落と同様にやればよい．∎

例 3.17 **(a)** $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ とする．ウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ とは，

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$$

のことである．$L^2(\mathbb{R})$ にはウェーブレット・フレームが存在し，ウェーブレット理論の大部分はウェーブレット正規直交基底の構成に関することが中心となっている．例えば，[D2]，[M]，[Me] を見よ．$\{\psi_{m,n}\}$ が正規直交基底のとき，関数 ψ をウェーブレットと呼ぶ．

(b) 定理 3.16**(c)** を用いると，$a = b = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$ の場合に，$\{\varphi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の正規直交基底になるような元 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を容易に特徴付けできる．例えば，[Be1，例 3.7b] を見よ．特に，$g = \varphi_{0,0}$ が $\int g(t)\, dt = 0$ なる性質をもつ必要はない．一方，もしウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ が直交かつ$\psi, \hat{\psi} \in L^1 \cap L^2$ なら，$\int \psi(t)\, dt = 0$ となる．例えば，[Bat2]．モーメントが消えるというこの性質に言及したのは，これがウェーブレットに特有の (critical な) 性質であり，また Gabor 系の Balian–Low 現象とウェーブレット系の Balian–Low 現象とを区別する鍵になるからである．例えば 例 3.25．Gabor 系における Balian–Low 現象 は次節で証明する．

(c) モーメントが消えるという性質は，時々$\psi, \hat{\psi} \in L^1 \cap L^2$ より強い仮定のもとで証明されるので，**(b)** の主張の証明の概略を述べておこう．もし，$\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ なら$\hat{\psi}$ は連続．このとき，$\hat{\psi} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ とすると，L^1 逆 Fourier 変換の公式，例えば [StWe]，によって ψ を連続関数とみなして良い．また $(\hat{\psi})^{\vee} = \psi$ といえる．特に，ある $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ に対して，$\psi(-2^{m_0}n_0) \equiv \psi(-t_0) \neq 0$ となる．ここで，$m_0 < 0$．任意の $m \leq m_0$ に対し，$t_0 = 2^m n$，ここで $n = 2^{m_0 - m}n_0$．直交性の仮定 $\psi \perp \psi_{m,n}$ と $\hat{\psi}$ の連続性，優収束定理により $m \to -\infty$ としたとき，

$$0 = \hat{\psi}(0) \int \overline{\hat{\psi}}(\gamma) e^{2\pi i t_0 \gamma}\, d\gamma \tag{3.25}$$

と書くことができる． 式 (3.25) の右辺は L^1 逆 Fourier 変換公式により，$\hat{\psi}(0)\bar{\psi}(-t_0)$ である．$\psi(-t_0) \neq 0$ なので証明は完了した．

3.5 Gabor フレームの Balian–Low 定理

Balian–Low の定理 (BLT) は Fourier 変換の最も基本的な性質の一つに反映する．また，この定理は一意性や不確定性原理の不等式といった話題と密接に関係する．これらの話題は [Be5] 5 節，例えば例 5.8 や 5.12a で扱われている．この節では Gabor フレームに関する Balian–Low 定理 (定理 3.24) を証明する．

この定理とその証明は Balian の原論文 (1981) [B] にその全貌を現している．参考文献としては，[Bat1]，[D1]，[D2] 108–112 ページ，[DJan]，[DJaJo]，[Lo] 等を見よ．様々な種類の証

明があることに注意しよう．特別な正規直交基底に関してのみ正しい証明; 技術的な欠陥を覆い隠す説得力のある議論; 数学的には正当化できない形式的な計算; 超関数の立場では正しいが古典的な微分ではダメな証明．ここで紹介する証明は超関数を使わない Heil と 筆者達 [BeHW] によるものである．これを定式化し，上述の様々な証明の概略と関係付けることにする．詳しくは [BeHW] を見よ．

超関数的証明であれ，非超関数的証明であれ重要な着想は解析的かつ位相幾何的である; 前者は Coifman と Semmes に依り，後者は Balian と Low に依る．両者を融合させたものとして Daubechies [D1] がある．

$g \in L^2(\mathbb{R})$ について BLT を証明する第一歩は，小さな長方形 $Q(x,\omega;r) \subseteq \mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$上で $G \equiv Zg$ の変分を上からおさえることである．ここで，

$$Q(x,\omega;r) = \Big\{(y,\gamma) \in \mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}\colon y \in [x-r/2, x+r/2),\ \gamma \in [\omega - r/2, \omega + r/2)\Big\}$$

である．この結果，すなわち定理 4.4 を見ると Hardy と Littlewood の一次元有界変分の L^1 ノルムによる特徴付け (1928) を思い出す読者もいるだろう．

補題 3.18　f，$tf(t)$，$\gamma\hat{f}(\gamma)$ を二乗可積分とし，$F = Zf$ とおく．$\epsilon \in \mathbb{R}$ とし，$(x_0,\omega_0) \in [-3/2, 3/2]\times\hat{\mathbb{R}}$ を勝手に一つ与える．このとき，

$$\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |F(x-\epsilon,\omega) - F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2} \le 2\pi|\epsilon|\left(\int |\gamma\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma\right)^{1/2} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}&\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |F(x,\omega-\epsilon) - F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\ &\quad\le\ 2\pi|\epsilon|\left[\left(\int |tf(t)|^2\,dt\right)^{1/2} + 2\left(\int |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\right]\end{aligned} \tag{3.27}$$

証明　式 (3.26) の証明の前に

$$F(x-\epsilon,\omega) = \sum_k f(x-\epsilon+k)e^{2\pi ik\omega} = Z(\tau_\epsilon f)(x,\omega)$$

であることに注意する．このとき，Z のユニタリ性と Plancherel の定理により，

$$\begin{aligned}&\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |F(x-\epsilon,\omega) - F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\ &\quad=\ \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |Z(\tau_\epsilon f - f)(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\ &\quad=\ \left(\int |\tau_\epsilon f(t) - f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int |e^{-2\pi i\epsilon\gamma} - 1|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma\right)^{1/2} \\
&= \left(\int |2\sin(\pi\epsilon\gamma)|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma\right)^{1/2} \\
&\leq 2\pi|\epsilon| \left(\int |\gamma \hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

式 (3.27) を証明する前に次に注意する．

$$
\begin{aligned}
F(x, \omega - \epsilon) &= \sum_k f(x+k) e^{2\pi i k(\omega - \epsilon)} \\
&= e^{2\pi i \epsilon x} \sum_k e^{-2\pi i \epsilon (x+k)} f(x+k) e^{2\pi i k\omega} \\
&= e^{2\pi i \epsilon x} Z(e_{-\epsilon} f)(x, \omega)
\end{aligned}
$$

従って，Z のユニタリ性と Plancherel の定理により以下を得る．

$$
\begin{aligned}
&\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |F(x, \omega - \epsilon) - F(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&= \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |e^{2\pi i \epsilon x} Z(e_{-\epsilon} f)(x, \omega) - Zf(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |Z(e_{-\epsilon} f - f)(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |e^{2\pi i \epsilon x} - 1|^2 |Zf(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&= \left(\int |2\sin \pi\epsilon t|^2 |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} + \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |2\sin \pi\epsilon x|^2 |Zf(x, \omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\leq 2\pi|\epsilon| \left[\left(\int |tf(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} + 2\left(\int |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}\right]
\end{aligned}
$$

∎

次に，上と同様の結果 (補題 3.20) を証明する．これにより，F の振動量を 1 辺の長さ $r < 1$ の正方形上で上から押えることができる．初めに，2, 3 の記号を定め，以下の技術的な補題を証明する．

補題 3.19 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, $r > 0$ を勝手に一つ定める．以下の集合を $E(s, r)$ と書く．

$$
E(s, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [s - \frac{r}{2} + n, s + \frac{r}{2} + n]
$$

このとき，

(a) $Zf(x, \omega) = e^{-2\pi i x\omega} Z\hat{f}(-\omega, x) = e^{-2\pi i x\omega} Z\check{f}(\omega, -x)$,

(b) 全ての $(x,\omega)\in\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$ に対し，$Zf(x,\omega)\cdot\mathbf{1}_{E(s,r)}(x)=Z(f\cdot\mathbf{1}_{E(s,r)})(x,\omega)$

(c) s に関して一様に $\lim_{r\to 0}\|f\cdot\mathbf{1}_{E(s,r)}\|_2=0$.

証明　**(a)** の証明には，$f\in S(\mathbb{R})$ に対する Poisson の和公式を用いる．そして，$L^2(\mathbb{R})$ での $S(\mathbb{R})$ の密度を使えば証明は完成．**(b)** は Zak 変換の定義と $\mathbf{1}_{E(s,r)}$ が 周期 1 を持つことから直ちに出る．**(c)** を示すには，まず勝手な $\epsilon>0$ を固定する．$|f|^2$ は可積分関数なので，ある $N>0$ で$\int_{|t|>N}|f(t)|^2\,dt\le\epsilon/2$ を満たすものがある．また，ある $\delta>0$ で $|A|\le\delta$ なら，いつでも $\int_A|f(t)|^2\,dt\le\epsilon/2$ を満たすものがある．さて，与えられた勝手な $s\in\mathbb{R}$ に対し，$[s-r/2+n,s+r/2+n]\cap[-N,N]\neq\emptyset$ を満たす $n\in\mathbb{Z}$ の個数は高々 $2N+r+1$ 個でこの個数は s に依らない．それゆえ，全ての s に対して $r\le 1$ なら $|E(s,r)\cap[-N,N]|\le(2N+2)r$ 従って，$r_0=\delta/(2N+2)$ とおくと，全ての s と全ての $r\le r_0$．に対し，

$$\|f\cdot\mathbf{1}_{E(s,r)}\|_2^2\le\int_{|t|>N}|f(t)|^2\,dt+\int_{E(s,r)\cap[-N,N]}|f(t)|^2\,dt\le\epsilon$$

となる．　∎

補題 3.20　f, $tf(t)$, $\gamma\hat{f}(\gamma)$ を二乗可積分とし，$F=Zf$ とおく．$\epsilon\in\mathbb{R}$, $(x_0,\omega_0)\in[-3/2,3/2]\times\hat{\mathbb{R}}$, $0<r<1$ を勝手に一つ与える．このとき

$$\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)}|F(x-\epsilon,\omega)-F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\le 2\pi|\epsilon|\|\gamma\hat{f}(\gamma)\cdot\mathbf{1}_{E(1-\omega_0,r)}(\gamma)\|_2 \quad (3.28)$$

$$\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)}|F(x,\omega-\epsilon)-F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}$$
$$\le\quad 2\pi|\epsilon|\big(\|tf(t)\cdot\mathbf{1}_{E(x_0,r)}(t)\|_2+2\|f\cdot\mathbf{1}_{E(x_0,r)}\|_2\big) \quad (3.29)$$

証明　補題 3.18 及び 補題 3.19 の **(a)**，**(b)** と同様の議論を用いる．

$$\begin{aligned}
&\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)}|F(x-\epsilon,\omega)-F(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)}|Z(\tau_\epsilon f-f)(x,\omega)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)}|Z(e_{-\epsilon}\hat{f}-\hat{f})(-\omega,x)|^2\,dx\,d\omega\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{Q(x_0,-\omega_0;r)}|Z(e_{-\epsilon}\hat{f}-\hat{f})(\omega,x)|^2\,d\omega\,dx\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{Q(x_0,1-\omega_0;r)}|Z(e_{-\epsilon}\hat{f}-\hat{f})(\omega,x)|^2\,d\omega\,dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\iint_{Q(x_0,1-\omega_0;r)} |Z(e_{-\epsilon}\hat{f} - \hat{f})(\omega, x) \cdot \mathbf{1}_{E(1-\omega_0,r)}(\omega)|^2 \, d\omega \, dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{Q(x_0,1-\omega_0;1)} \left|Z\Big((e_{-\epsilon}\hat{f} - \hat{f}) \cdot \mathbf{1}_{E(1-\omega_0,r)}\Big)(\omega, x)\right|^2 d\omega \, dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{E(1-\omega_0,r)} |e_{-\epsilon}\hat{f}(\gamma) - \hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma\right)^{1/2} \\
&\leq 2\pi|\epsilon| \|\gamma \hat{f}(\gamma) \cdot \mathbf{1}_{E(1-\omega_0,r)}(\gamma)\|_2
\end{aligned}
$$

これから 式 (3.28) が出る．

式 (3.29) に関しては，

$$
\begin{aligned}
&\left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)} |F(x,\omega-\epsilon) - F(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)} |Z(e_{-\epsilon}f - f)(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)} |e^{2\pi i \epsilon x} - 1|^2 |Zf(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)} |Z(e_{-\epsilon}f - f)(x,\omega) \cdot \mathbf{1}_{E(x_0,r)}(x)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\quad + 2\pi|\epsilon| \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;r)} |xZf(x,\omega) \cdot \mathbf{1}_{E(x_0,r)}(x)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} \left|Z\big((e_{-\epsilon}f - f) \cdot \mathbf{1}_{E(x_0,r)}\big)(x,\omega)\right|^2 dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&\quad + 4\pi|\epsilon| \left(\iint_{Q(x_0,\omega_0;1)} |Z(f \cdot \mathbf{1}_{E(x_0,r)})(x,\omega)|^2 \, dx \, d\omega\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{E(x_0,r)} |e_{-\epsilon}f(t) - f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} + 4\pi|\epsilon| \left(\int_{E(x_0,r)} |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

この最後の項は 式 (3.29) の右辺で押さえられる． ∎

定理 3.21 f, ϵ, r, (x_0, ω_0) を 補題 3.20 で扱ったものと同じとする．さらに $0 < c < 1$ を固定する．このとき，f のみによる関数 $C_1(r)$,$C_2(r)$, があって，$i = 1, 2$ に対し $\lim_{r\to 0} C_i(r) = 0$ かつ

$$
\iint_{Q(x_0,\omega_0;cr)} |F(x-\epsilon,\omega) - F(x,\omega)| \, dx \, d\omega \leq cr|\epsilon| C_1(r) \tag{3.30}
$$

$$
\iint_{Q(x_0,\omega_0;cr)} |F(x,\omega-\epsilon) - F(x,\omega)| \, dx \, d\omega \leq cr|\epsilon| C_2(r) \tag{3.31}
$$

を満たす.

証明　この結果は 補題 3.20 に Hölder の不等式をそのまま適用すると出る．ここで，

$$C_1(r) = 2\pi \sup_{\omega\in\hat{\mathbb{R}}} \|\gamma \hat{f}(\gamma)\cdot \mathbf{1}_{E(\omega,r)}(\gamma)\|_2$$

であり，また

$$C_2(r) = 2\pi \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\|tf(t)\cdot \mathbf{1}_{E(x,r)}(t)\|_2 + 2\|f\cdot \mathbf{1}_{E(x,r)}\|_2\right)$$

$i = 1,2$ に対し C_i が 0 に収束することは補題 3.19(c) から出る．∎

BLT を示すための次の段階は $G = Zg$ の連続関数 G_r による近似の導入である．この着想は Coifman と Semmes による．G_r は BLT を証明するのに十分な準周期条件を満たすことがわかる．これは Zak 変換の連続性を証明することによって先に進むことができたのと同様である．

$\rho = \mathbf{1}_Q$ とし，$r > 0$ に対し $\rho_r(x,\omega) = r^{-2}\rho(x/r,\omega/r)$ とおく．このとき，$r \to 0$ とすると $\{\rho_r\}$ は $\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$ 上恒等写像を近似する．平均値関数を次式で定義する．

$$G_r(x,\omega) = \iint_Q G(x-y,\omega-\alpha)\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha$$

G_r の基本的性質を列挙してみる．[D1] 参照．

定理 3.22　$g \in L^2(\mathbb{R})$，$a = b = 1$ がフレーム限界 A, B の Gabor フレーム $\{\varphi_{m,n}\}$ を生成するとし，$G = Zg$ とおく．このとき

(a) $|G_r(x_1,\omega_1) - G_r(x_2,\omega_2)| \le 2r^{-1}B^{1/2}(|x_1-x_2| + |\omega_1-\omega_2|)$

(b) $\sup_{(x,\omega)\in Q} |G_r(x,\omega)| \le B^{1/2}$

(c) $G_r(x,\omega+1) = G_r(x,\omega)$

(d) $G_r(x+1,\omega) = e^{-2\pi i\omega}G_r(x,\omega) + \psi_r(x,\omega)$, ここで $\sup_{(x,\omega)\in Q}|\psi_r(x,\omega)| \le \pi r B^{1/2}$

(e) (y,α)，$(x,\omega) \in \mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$ を固定したとき，

$$|G(y,\alpha) - G_r(y,\alpha)| \ge A^{1/2} - 2r^{-1}B^{1/2}(|x-y| + |\omega-\alpha|) - |G_r(x,\omega)|$$

また，特に，$(x,\omega)\in Q$ と $c < 1$ を固定すると，

$$\inf_{(y,\alpha)\in Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha) - G_r(y,\alpha)| \ge A^{1/2} - 2cB^{1/2} - |G_r(x,\omega)|$$

証明　**(a)** を示すために，次に注意する．

$$|G_r(x_1,\omega_1) \quad - \quad G_r(x_2,\omega_2)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2}\left|\iint_{Q(z_1,\lambda_1;r)} G(y,\alpha)\,dy\,d\alpha - \iint_{Q(z_2,\lambda_2;r)} G(y,\alpha)\,dy\,d\alpha\right| \\
&= \frac{1}{r^2}\left|\iint_{Q(z_1,\lambda_1;r)\Delta Q(z_2,\lambda_2;r)} G(y,\alpha)\,dy\,d\alpha\right| \\
&\leq \frac{B^{1/2}}{r^2}|Q(z_1,\lambda_1;r)\Delta Q(z_2,\lambda_2;r)|
\end{aligned}
$$

式 (3.23) を用いた．ここで Δ は対称差分作用素で，$j=1,2$ に対して $(z_j,\lambda_j)\equiv(x_j-\frac{r}{2},\omega_j-\frac{r}{2})$．初等的な幾何学的議論により，評価

$$
|Q(z_1,\lambda_1;r)\Delta Q(z_2,\lambda_2;r)| \leq 2r(|x_1-x_2|+|\omega_1-\omega_2|)
$$

を得，**(a)** が証明された．

(b) は 式 (3.23) と恒等写像を近似しているという仮定，G_r の定義より直ちに出る．**(c)** は G が第 2 成分に関して周期的であるという事実から出る．**(d)** を見るために次式に注意する．

$$
\begin{aligned}
G_r(x+1,\omega) &= \iint_Q G(x+1-y,\omega-\alpha)\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha \\
&= \iint_Q e^{-2\pi i(\omega-\alpha)}G(x-y,\omega-\alpha)\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha \\
&= e^{-2\pi i\omega}\iint_Q G(x-y,\omega-\alpha)\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha + \psi_r(t,\omega)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\psi_r(x,\omega) = e^{-2\pi i\omega}\iint_Q (e^{2\pi i\alpha}-1)G(x-y,\omega-\alpha)\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha
$$

である．これを評価すると，

$$
\begin{aligned}
|\psi_r(x,\omega)| &\leq \iint_Q |e^{2\pi i\alpha}-1||G(x-y,\omega-\alpha)|\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha \\
&\leq B^{1/2}\iint_Q |2\pi\alpha|\rho_r(y,\alpha)\,dy\,d\alpha \\
&\leq B^{1/2}\pi r
\end{aligned}
$$

最後に **(e)** を示す．**(a)** から次式がわかる．

$$
\begin{aligned}
|G(y,\alpha)-G_r(y,\alpha)| &\geq |G(y,\alpha)| - |G_r(y,\alpha)-G_r(x,\omega)| - |G_r(x,\omega)| \\
&\geq A^{1/2} - \frac{2}{r}B^{1/2}(|x-y|+|\omega-\alpha|) - |G_r(x,\omega)|
\end{aligned}
$$

$(y,\alpha)\in Q(x,\omega;cr)$ より $|x-y|\leq cr/2$ かつ $|\omega-\alpha|\leq cr/2$ なので，

$$
\inf_{(y,\alpha)\in Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G_r(y,\alpha)| \geq A^{1/2} - 2cB^{1/2} - |G_r(x,\omega)|
$$

を得る． ∎

補題 3.23　g，$tg(t)$,$\gamma\hat{g}(\gamma)$ を 2 乗可積分とする．このとき，任意の $(x,\omega)\in Q$，$c<1$，$r<1$ に対し，

$$\iint_{Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G_r(y,\alpha)|\,dy\,d\alpha \le cr^2C(r)$$

を得る．ここで $C(r)$ は (x,ω) に依存せず，$\lim_{r\to 0} C(r)=0$ を満たす．

証明

$$\begin{aligned}
&\iint_{Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G_r(y,\alpha)|\,dy\,d\alpha \\
&\qquad \le \iint_{Q(x,\omega;cr)}\iint_Q |\rho_r(v,\beta)||G(y,\alpha)-G(y-v,\alpha-\beta)|\,dv\,d\beta\,dy\,d\alpha \\
&\qquad = \iint_Q |\rho_r(v,\beta)|\iint_{Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G(y-v,\alpha-\beta)|\,dy\,d\alpha\,dv\,d\beta \\
&\qquad \le \iint_Q |\rho_r(v,\beta)|\iint_{Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G(y-v,\alpha)|\,dy\,d\alpha\,dv\,d\beta \\
&\qquad\quad +\iint_Q |\rho_r(v,\beta)|\iint_{Q(x-v,\omega;cr)} |G(z,\alpha)-G(z,\alpha-\beta)|\,dz\,d\alpha\,dv\,d\beta
\end{aligned}$$

ここで，三角不等式を適用する．ρ_r の台は正方形 $Q(r/2,r/2;r)$ 内にあり，$r<1$ なので，$x-v\in[-1/2,1]$ となる．それゆえ，定理 3.21 より，上述の値は

$$cr^2(C_1(r)+C_2(r))$$

によって，上から押さえられる．$C(r)=C_1(r)+C_2(r)$ とおけば証明終わり．　■

これで Balian–Low 定理を証明する準備が整った．

定理 3.24 (BLT)　$g\in L^2(\mathbb{R})$, $a=b=1$ とする．もし，対応する Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の (フレーム限界 A，B の) Gabor フレームとすると，$tg(t)\notin L^2(\mathbb{R})$ または$\gamma\hat{g}(\gamma)\notin L^2(\hat{\mathbb{R}})$ のいずれかが成り立つ．

証明　$tg(t)\in L^2(\mathbb{R})$, $\gamma\hat{g}(\gamma)\in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ と仮定し，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の Gabor フレームとする．このとき，矛盾がでることをいう．

最初に，全ての $(x,\omega)\in Q$ と十分小さい全ての r に対して，$|G_r(x,\omega)|\ge A^{1/2}/2$ が成り立つことを主張する．これを見るために，定理 3.22(e) と補題 3.23 より，次が成り立つことに注意する．

$$cr^2C(r)\ge \iint_{Q(x,\omega;cr)} |G(y,\alpha)-G_r(y,\alpha)|\,dy\,d\alpha \ge c^2r^2\Big(A^{1/2}-2cB^{1/2}-|G_r(t,\omega)|\Big)$$

c を $A^{1/2}-2cB^{1/2}>A^{1/2}/2$ が成り立つよう十分小さく固定すると，

$$|G_r(x,\omega)| \geq A^{1/2}-2cB^{1/2}-\frac{C(r)}{c}$$

を得る．$r\to 0$ のとき，(x,ω) とは無関係に $C(r)\to 0$ なので，主張は証明された．

全ての，実あるいは複素数値の零にならない $\overline{Q}$ 上の連続関数 F は $F(x,\omega)=|F(x,\omega)|e^{i\varphi(x,\omega)}$ の形にかけることはよく知られている．ここで，φ は $\overline{Q}$ 上の連続実数値関数．例えば，[RRe, 377–385 ページ] を見よ．それゆえ，上の段落の評価式によって，各 $r>0$ に対して $\overline{Q}$ 上の連続な実数値関数 φ_r で，

$$\text{全ての } (x,\omega)\in\overline{Q} \text{ に対して}, G_r(x,\omega)=|G_r(x,\omega)|e^{i\varphi_r(x,\omega)} \tag{3.32}$$

を満たすものがある．結局定理 3.22**(c)** により，各 $r>0$ と各 $x\in[0,1]$ に対し，$\varphi_r(x,1)=\varphi_r(x,0)+2\pi k_{r,x}$ を満たす $k_{r,x}\in\mathbb{Z}$ が存在する．φ_r は $\overline{Q}$ 上連続なので，$\varphi_r(x,1)-\varphi_r(x,0)$ は $[0,1]$ 上連続となる．よって，$k_{r,x}=k_r$，すなわち，

$$\begin{gathered}\text{全ての } r>0 \text{ に対して}, k_r\in\mathbb{Z} \text{ が存在して，全ての } x\in[0,1] \text{ に対して},\\ \varphi_r(x,1)=\varphi_r(x,0)+2\pi k_r\end{gathered} \tag{3.33}$$

が成り立つ．

次に，関数

$$\delta_r(x,\omega)=1+\frac{\psi_r(x,\omega)}{e^{-2\pi i\omega}G_r(x,\omega)}$$

を考えよう．明らかに δ_r は連続である．また，定理 3.22**(b)**, **(d)** とこの証明の最初に確かめた不等式 $|G_r(x,\omega)|\geq A^{1/2}/2$ を用いると，δ_r が十分小さい r に対して Q 上零にならないことがわかる．よって，式 (3.32) と同様に，連続関数 $\theta_r(x,\omega)$ で

$$\delta_r(x,\omega)=|\delta_r(x,\omega)|e^{i\theta_r(x,\omega)} \tag{3.34}$$

を満たすものがある．定理 3.22**(d)** より，$r\to 0$ とすると δ_r は $\overline{Q}$ 上一様に 1 に収束することに注意する．このことから，θ_r は $\overline{Q}$ 上一様に 2π の倍数に収束する．また，定義により，各 x と ω に対し，

$$G_r(x+1,\omega)=e^{-2\pi i\omega}G_r(x,\omega)\delta_r(x,\omega) \tag{3.35}$$

が成り立つことにも注意する．

式 (3.34) と 式 (3.35) を使って計算すると，

$$\begin{aligned}|G_r(1,\omega)|e^{i\varphi_r(1,\omega)} &= G_r(1,\omega)\\ &= e^{-2\pi i\omega}G_r(0,\omega)\delta_r(0,\omega)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |G_r(0,\omega)\delta_r(0,\omega)|e^{-2\pi i\omega+i\theta_r(0,\omega)+i\varphi_r(0,\omega)} \\
&= |G_r(1,\omega)|e^{-2\pi i\omega+i\theta_r(0,\omega)+i\varphi_r(0,\omega)}
\end{aligned}
$$

よって，式 (3.33) にあるように，各 $r>0$ に対して整数 l_r が存在して全ての $\omega\in[0,1]$ に対して，

$$\varphi_r(1,\omega)=-2\pi\omega+\theta_r(0,\omega)+\varphi_r(0,\omega)+2\pi l_r \tag{3.36}$$

が成り立つ．式 (3.33) と 式 (3.36) を組みあわせて以下を得る．

$$
\begin{aligned}
0 &= (\varphi_r(0,0)-\varphi_r(1,0))+(\varphi_r(1,0)-\varphi_r(1,1)) \\
&\quad +(\varphi_r(1,1)-\varphi_r(0,1))+(\varphi_r(0,1)-\varphi_r(0,0)) \\
&= (-\theta_r(0,0)-2\pi l_r)+(-2\pi k_r)+(-2\pi+\theta_r(0,1)+2\pi l_r)+(2\pi k_r) \\
&= -2\pi+\theta_r(0,1)-\theta_r(0,0)
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

$r\to 0$ とすると，$0=-2\pi$ となり矛盾． ∎

例 3.25 **(a)** 例 3.17 で直交ウェーブレット系に対してモーメントが消える性質を確かめた．また，この性質とウェーブレット系に対する Balian–Low 現象 (Gabor 系に対する Balian–Low 現象と類似する) との関係をほのめかした．定理 3.24 の後半を定量的にとらえたので，定理の前半をもっと詳しく語ることができる．

まず，Meyer の最初のウェーブレットの例 ψ は $\hat{\psi}\in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ なる性質を満たす．例えば，[Me] を見よ．従って，全ての多項式 p，q に対し，

$$\|p(t)\psi(t)\|_2\|q(\gamma)\hat{\psi}(\gamma)\|_2<\infty$$

を満たす．[Be5，定理 5.6，系 5.7] を見よ．よって，ウェーブレット系に対する定理 3.24 の完全な類似は直交基底の場合ですら成立しない．一方，Battle [Bat2] はモーメントが消える性質の精密化を用いて $\{\psi_{m,n}\}$ が直交ウェーブレット系なら，

$$\|e^{|t|}\psi(t)\|_2\|e^{|\gamma|}\hat{\psi}(\gamma)\|_2=\infty$$

となることを示した．この事実，すなわち，もし $\{\psi_{m,n}\}$ が直交ウェーブレット系なら ψ が時間と周波数の両方で「指数的局所化」を持たないこと，が直交ウェーブレット系に対する Balian–Low 現象である．Heil と筆者は，完全フレームの場合にこの事実の初等的な拡張を行った．

(b) 定理 3.24 の証明の「代数的な」部分，例えば 式 (3.37) は，もし $f\in L^2(\mathbb{R})$ かつ Zf が $\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$ 上連続なら Zf が零点を持つことを確かめるのに使うことができる．参考文献 [Be5, (2.5)，(2.6)] では Gaussian の場合が扱われている．

3.6 Bessel ポテンシャル空間の Gabor 分解

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において，フレーム不等式 (定義/注意 3.1(**a**)) から，作用素 S が $\mathcal{H}$ の位相的同形写像であることが出ることを見た．実際，二つの概念は同値である (定理 3.2(**a**))．これから，フレームによる $\mathcal{H}$ の元の安定分解が存在することがわかる (定理 3.2(**b**))．「原子」の集合を一つ定めたとき，それらによる分解を持つという概念も，一般の Banach 空間 $\mathcal{B}$ を研究する非常に強力な道具となる．各場合に，$x \in \mathcal{B}$ のノルムが，分解のときの係数列の大きさにのみに依存するある表現と同値であるという意味の「フレーム不等式」があるとうれしい．Hilbert 空間では，フレーム不等式から原子分解の存在が出る．しかし，Banach 空間では，フレーム不等式だけでは不十分となる．それゆえ，フレームの概念を拡張すると便利である (3.9 節参照)．また，いわゆる「Banach フレーム」と原子分解との関係を考察すると役に立つ．

最近の論文で，Banach 空間の原子分解を研究したものが数多くある．その中では，原子としてウェーブレットや Gabor 関数を用いている．例えば，[FrJaw], [FrJawWe], [F2], [FGr1], [FGr2]．このような空間のうち面白いクラスとしていわゆる Bessel のポテンシャル空間 $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ がある．例えば，[StWe] を見よ．Bessel のポテンシャル空間は興味深いことに，古典的な Sobolev 空間 (定義/注意 3.26(**d**)) を含む．さらに，Gabor 関数だけでなくウェーブレットによる強収束する原子分解も許容する空間の例ともなっている．空間 $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ は Hilbert 空間であり，3.3 節の意味でのフレームがこれらの空間に存在するかもしれない．しかし，3.4 節の結果の直接の一般化は成り立たない．その理由は定義/注意 3.26(**g**)–(**i**) に書いた．従って，$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ の Gabor 分解を研究するためには，Hilbert 空間としての構造を無視して，$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ を単に Banach 空間，すなわち，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に埋め込まれたノルム付き空間として見ることにする．

この節の目的は Bessel ポテンシャル空間を考察し，この空間の Gabor 系による Banach フレームや原子分解の性質を研究することである．最終目標は 定理 3.32 を証明することである．この定理は Gabor 系が Banach フレームや $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ の原子の集合となるための十分条件を与える．3.7 節では，Banach フレームと原子の集合を特徴付けているが，その結果を出すのにここで証明した結果を大いに活用する．[CRo] はフレームや原子の集合の概念を Banach 空間の場合に拡張し，[F2], [FGr1], [FGr2] が一般化している．[Gr] には Banach 空間のフレームと原子の集合の総合的な研究で，ここには載せなかった面白い研究がたくさん書いてある．

定義/注意 3.26 (**a**) $s \in \mathbb{R}$ を与えたとき，Bessel ポテンシャル空間 $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f\colon \int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1 + |\gamma|)^{2s} \, d\gamma < \infty \right\}$$

で定義する．

(b) $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ におけるノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{L}_s^2} = \left(\int |\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2s}\,d\gamma\right)^{1/2} \tag{3.38}$$

で与える．

(c) $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ は

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{L}_s^2} = \int \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}(1+|\gamma|)^{2s}\,d\gamma$$

を内積とする Hilbert 空間となることに注意する．式 (3.38) のノルムは，重みが Fourier 変換側に付いた，重み付き L^2 ノルムと考えることができよう．$s\in\mathbb{R}$ に対する重み $(1+|\gamma|)^s$ は不等式

$$(1+|\gamma_1+\gamma_2|)^s \le (1+|\gamma_1|)^{|s|}(1+|\gamma_2|)^s$$

を満たす．$s>0$ のときは，この不等式から $(1+|\gamma|)^s$ は **Beurling–Domar** ウエイトとみなせる．

(d) もし $s=0$ なら $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)=L^2(\mathbb{R}^d)$．もし $s=k\in\mathbb{Z}_+$ なら 式 (3.38) と同値なノルムの一つとして，

$$\|f\|_{\mathcal{L}_s^2} = \sum_{|\alpha|\le 2k}\|\partial^\alpha f\|_2$$

がある．ここで ∂^α は位数 α の超関数での偏微分を表す．従って，$\mathcal{L}_k^2(\mathbb{R}^d)$ は Sobolev 空間 $L_{2k}^2(\mathbb{R}^d)$ と同一視できる．[St，V 章，定理 3] 参照．

(e) $s\in\mathbb{R}$ を与えたとき，相対空間 $(\mathcal{L}_s^2)'(\mathbb{R}^d)$ は普通の L^2 空間の相対性

$$\langle f,g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

に関して $\mathcal{L}_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ と同一視できる．

(f) $s\in\mathbb{R}$ を与えたとき，ある $B>0$ で，全ての $f\in\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ 対して

$$\sum_n\sum_m |\langle f,\varphi_{m,n}\rangle|^2(1+|m|)^{2s} \le B\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2 \tag{3.39}$$

を満たすものが存在するなら，Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}=\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ は，ある $a,b>0$ と $g\in\mathcal{L}_{|s|}^2$ に対して $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関する **Bessel** 列となる．

(g) **(f)** で定義した **Bessel** 列の概念と定義/注意 3．1**(b)** で定義した **Bessel** 列の概念の違いを議論するのも有用である．$s\ge 0$ に対して，$g\in\mathcal{L}_{|s|}^2$ とし，ある $a>0$ に対し，$\hat{g}$ の台が立方体 $[-1/a,1/a]^d$ の中に含まれると仮定する．$b\le 1/a$ を固定する．このとき $\{\varphi_{m,n}\}=\{e_{mb}\tau_{na}g\}$

は Hilbert 空間 $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関するフレームとなる．すなわち，

$$\text{ほとんど至る所 } c_1 \leq \sum_m |\hat{g}(\gamma - mb)|^2(1+|mb|)^{2s} \leq c_2 \tag{3.40}$$

を満たす定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在するときに限って，全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$A\|f\|_{\mathcal{L}_s^2} \leq \sum_n \sum_m |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle_{\mathcal{L}_s^2}|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}$$

を満たす定数 $A, B > 0$ がある．

(h) 今から，式 (3.40) が **(g)** におけるフレームの仮定から出ることを確かめる．逆向きも同様に示せる．Fourier 級数の議論により次を得る．

$$\begin{aligned}
&\sum_n \sum_m |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle_{\mathcal{L}_s^2}|^2 \\
&\qquad = a^{-d} \sum_m \int_{[-1/a,1/a]^d+mb} |\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{4s}|\hat{g}(\gamma - mb)|^2\, d\gamma \\
&\qquad = a^{-d} \sum_m \int_{[-1/a,1/a]^d} |\hat{f}(\gamma + mb)|^2(1+|\gamma + mb|)^{4s}|\hat{g}(\gamma)|^2\, d\gamma
\end{aligned} \tag{3.41}$$

さて，全ての $s \in \mathbb{R}$ に対して，$\gamma \in [-1/a, 1/a]^d$ のとき，

$$(1+|\gamma+mb|)^{2s} \leq (1+|\gamma|)^{2|s|}(1+|mb|)^{2s} \leq C(1+|mb|)^{2s}$$

であり，式 (3.41) の最後の項は，

$$\begin{aligned}
\leq\ & Ca^{-d} \sum_m (1+|mb|)^{2s} \int_{[-1/a,1/a]^d} |\hat{f}(\gamma + mb)|^2(1+|\gamma+mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma)|^2\, d\gamma \\
=\ & Ca^{-d} \int |\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2s} \sum_m (1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma - mb)|^2\, d\gamma
\end{aligned}$$

それゆえ，全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$A\|f\|_{\mathcal{L}_s^2} \leq Ca^{-d} \int |\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2s} \sum_m (1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma - mb)|^2\, d\gamma$$

を得る．これから，

$$\sum_m (1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma - mb)|^2\, d\gamma \geq a^d A/C$$

がでる．$s \in \mathbb{R}$ に対して，$\gamma \in [-1/a, 1/a]^d$ のとき，

$$(1+|\gamma - mb|)^{2s} \geq (1+|\gamma|)^{-2|s|}(1+|mb|)^{2s} \geq C(1+|mb|)^{2|s|}$$

なので， 式 (3.41) の最後の項は，

$$\begin{aligned}
&\geq Ca^{-d}\sum_m (1+|mb|)^{2s}\int_{[-1/a,1/a]^d}|\hat{f}(\gamma-mb)|^2(1+|\gamma-mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma)|^2\,d\gamma\\
&= Ca^{-d}\int|\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2s}\sum_m(1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma+mb)|^2\,d\gamma
\end{aligned}$$

従って，全ての $f\in\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$B\|f\|_{\mathcal{L}^2_s}\geq Ca^{-d}\int|\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2s}\sum_m(1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma+mb)|^2\,d\gamma$$

を得る．これより，

$$\sum_m(1+|mb|)^{2s}|\hat{g}(\gamma+mb)|^2\,d\gamma\leq a^dB/C$$

が出る．よって， 式 (3.40) が成り立つ．

(i) ここでは， 式 (3.40) が $s\neq 0$ のとき決して成り立たないことを主張する．これを見るため，$s>0$ と仮定し，$g\not\equiv 0$ を一つ与える．このとき，$|E|>0$ かつ E 上 $|\hat{g}(\gamma)|>\alpha\geq 0$ となる集合 $E\subseteq[-1/a,1/a]^d$ が存在する．与えられた $M>0$ に対し，m_0 で $(1+|m_0b|)^{2s}>M$ を満たすものが見つけることができる．従って，$\gamma\in E+m_0b$ に対し，

$$\sum_m|\hat{g}(\gamma-mb)|^2(1+|mb|)^{2s}\geq|\hat{g}(\gamma-m_0b)|^2(1+|m_0b|)^{2s}\geq\alpha M$$

それゆえ，

$$\sum_m|\hat{g}(\gamma-mb)|^2(1+|mb|)^{2s}$$

は非有界．よって矛盾．

$s<0$ に対しては， 式 (3.40) の上からの評価が成り立つなら $\hat{g}$ も必然的に有界となることに注意する．さて，$\epsilon>0$ を与えると，m_0 で，全ての $|m|\geq m_0$ に対して，$(1+|mb|)^{2s}<\epsilon$ を満たすものがある．$\hat{g}$ は台がコンパクトなので，任意のコンパクト集合内の γ に対して和の中で零でない項は高々有限個．$m\in\mathbb{Z}^d$ に対し，$E_m=[-1/a,1/a]^d+mb$ で定義される集合 $E_m\subseteq\hat{\mathbb{R}}^d$ を考え，また，$F_m=\left\{n\in\mathbb{Z}^d\colon E_n\cap E_m\neq\emptyset\right\}$ で定義される集合 $F_m\subseteq\mathbb{Z}^d$ を考える．このとき，任意の $m\in\mathbb{Z}^d$ に対し，

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{\gamma\in E_m}\ \textstyle\sum_n\ &|\hat{g}(\gamma-nb)|^2(1+|nb|)^{2|s|}\\
&\leq \sum_{n\in F_m}\operatorname*{ess\,sup}_{\hat{\mathbb{R}}^d}|\hat{g}(\gamma-nb)|^2(1+|nb|)^{2|s|}\\
&\leq \|g\|^2_\infty\sum_{n\in F_m}(1+|nb|)^{2|s|}
\end{aligned}$$

が成り立つ．さて，$\sharp F_m$ は m と無関係に有界となり，さらに，m が十分大きければ $n \in F_m$ より $|m| \geq m_0$ が出るので，

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n\in F_m} (1+|nb|)^{2|s|} = 0$$

と結論することができる．それゆえ，式 (3.40) の下からの評価式はこの場合不成立となる．よって， 式 (3.40) は $s<0$ のとき決して成り立たない．

(j) 上の注意は，**(g)** で粗筋を述べたように，g に関するごく自然な条件の下で示される．$\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ は $s=0$ の場合を除いて，Hilbert 空間 $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Gabor フレームとなる条件を満たすことはできない．

定義 3.27 $s \in \mathbb{R}$ を与えると，ある $a,b>0$ と $g \in \mathcal{L}_{|s|}^2$ に対する Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ は，ある $A,B>0$ があって，全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$A\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2 \leq \sum_n \sum_m |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s} \leq B\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2$$

が成り立つという仮定のもとで $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関する **Banach** フレームとなる．作用素 S は $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ 上形式的に

$$Sf = \sum_n \sum_m \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \, \varphi_{m,n}$$

で定義される．

定義 3.28 $s \in \mathbb{R}$ を固定する．$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数の集まり $\{\lambda_{nm}\}$ で，以下の 2 性質を満たすものが存在するなら $a,b>0$ と $g \in \mathcal{L}_{|s|}^2$ に関する Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ を，$\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ の原子の集合という．

(a) 全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$f = \sum_n \sum_m \lambda_{nm}(f)\varphi_{m,n}$$

ここで，和は fのノルムに関して収束する．

(b) $A,B>0$ が存在して，全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$A\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2 \leq \sum_n \sum_m |\lambda_{nm}(f)|^2 (1+|m|)^{2s} \leq B\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2$$

定理 3.29 $s \in \mathbb{R}$ とし，$\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ を，ある $a,b>0$ と $g \in \mathcal{L}_{|s|}^2$に関する Gabor 系とする．もし，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ に関する原子の集合であり，かつ $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Bessel 列なら $\{\varphi_{m,n}\}$ は $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Banach フレームとなる．

証明　フレーム下限の存在を言うだけでよい．これを見るために，$f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$，$h \in \mathcal{L}_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} |\langle f, h\rangle|^2 &= \left|\langle f\rangle \sum_{n,m} \lambda_{nm}(h)\varphi_{m,n}\right|^2 \\ &= \left|\sum_{n,m} \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \overline{\lambda_{nm}(h)}\right|^2 \\ &\leq \sum_{n,m} |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s} \sum_{n,m} |\lambda_{nm}(h)|^2 (1+|m|)^{-2s} \\ &\leq B\|h\|^2_{\mathcal{L}^2_{-s}} \sum_{n,m} |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s} \end{aligned}$$

$\|h\|_{\mathcal{L}^2_{-s}} = 1$ を満たしながら $h \in \mathcal{L}^2_{-s}$ を動かしたときの両辺の上限をとると

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2_s} \leq B \sum_{n,m} |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s}$$

を得る． ∎

定理 3.30　$s \in \mathbb{R}$ とし，$\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ をある $a, b > 0$ と $g \in \mathcal{L}^2_{|s|}$ に関する Gabor 系とする．もし $\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ と $\mathcal{L}_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ の Bessel 列なら，各 $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，和

$$\sum_n \sum_m \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \, \varphi_{m,n}$$

は $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムに関し一様に収束する．さらに作用素 S は $\mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ 上連続となる．

証明　$F \subseteq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ をパラメータを表す有限集合とする．このとき，

$$\begin{aligned} \left|\langle \sum_{(n,m)\in F} \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \varphi_{m,n,h}\rangle\right|^2 &= \left|\sum_F \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \overline{\langle h, \varphi_{m,n}\rangle}\right|^2 \\ &\leq \sum_F |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s} \sum_F |\langle h, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{-2s} \\ &\leq B\|h\|_{\mathcal{L}^2_{-s}} \sum_F |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s} \end{aligned}$$

$\|h\|_{\mathcal{L}^2_{-s}} = 1$ を満たす $h \in \mathcal{L}^2_{-s}$ 全体を動かして，両辺の上限を取ることにより

$$\left\|\sum_{(n,m)\in F} \langle f, \varphi_{m,n}\rangle \varphi_{m,n}\right\|^2_{\mathcal{L}^2_s} \leq B \sum_F |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s}$$

を得る．結論は下の級数に対する Cauchy の判定条件から導かれる．

$$\sum_{n,m} |\langle f, \varphi_{m,n}\rangle|^2 (1+|m|)^{2s}$$

これは，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ の Bessel 列なので収束する．これから S が $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ 上連続であることも従う． ▮

定理 3.31 $s \in \mathbb{R}$ とし，$\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ をある $a, b > 0$ と $g \in \mathcal{L}^2_{|s|}$ に関する Gabor 系とする．もし，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ と $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ の Bessel 列で，S が $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ 上の全単射ならば，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ に関する原子の集合となる．

証明 $f \in \mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ と $n, m \in Z^d$に対し，

$$\lambda_{nm}(f) = \langle S^{-1}f, \varphi_{m,n} \rangle$$

とおく．このとき，

$$f = SS^{-1}f = \sum_{n,m} \langle S^{-1}f, \varphi_{m,n} \rangle \varphi_{m,n}$$

和は定理 3.30 により $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ のノルムに関して無条件に収束する．また，S は $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ 上連続なので，開写像定理により，S^{-1} は連続． ▮

定理 3.32 $s \in \mathbb{R}$ とし，$\{\varphi_{m,n}\} = \{e_{mb}\tau_{na}g\}$ をある $a, b > 0$ と $g \in \mathcal{L}^2_{|s|}$ に関する Gabor 系とする．もし，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}^2_s$内や $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ 内の Bessel 列で，S が $\mathcal{L}^2_s$ と $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ 上の全単射であるとすると，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $\mathcal{L}^2_s$ と $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ に関する原子の集合であり，かつ，Banach フレームとなる．

証明 定理 3.31 により，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}^2_s$ と $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ に関する原子の集合であると結論することができる．これと 定理 3.29 を組みあわせると $\{\varphi_{m,n}\}$ が $\mathcal{L}^2_s$ と $\mathcal{L}^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ に関する Banach フレームであることもでる． ▮

3.7 Zak 変換と Bessel ポテンシャル空間

この節の最終目標は Bessel ポテンシャル空間に関するフレームと原子の集合を Zak 変換の言葉で特徴付けすることである (定理 3.41)．初めに，フレームや原子の集合を生成することになる基本的な関数達に対する 2, 3 の結果を集めてみた．この集合，即ちモジュレーション空間 $M^{|s|}_{1,1}$ は Feichtinger と Gröchenig によって広く研究され，多くの論文において，原子分解と関連して使われている．例えば，[FGr1]，[FGr2]，[F2]，[Gr]．$M^{|s|}_{1,1}$ に関する主結果は 定理 3.36 であり，そこでは，$g \in M^{|s|}_{1,1}$ ならば，Zg は Q 上の関数達のある種の重み付き Fourier 代数にはいることを示している．

定義 3.33　$s \in \mathbb{R}$ と $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を与えたとき，空間 $M_{1,1}^{|s|}$ を

$$M_{1,1}^{|s|} = \left\{ f \colon \|f\|_{M_{1,1}^{|s|}} \equiv \iint |\langle f, e_\gamma \tau_x \varphi \rangle| (1 + |\gamma|)^{|s|} \, d\gamma \, dx < \infty \right\} \tag{3.42}$$

で定義する．

注意 3.34　**(a)** 空間 $M_{1,1}^{|s|}$ は，式 (3.42) の右辺によって与えられるノルムで Banach 空間となる．$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の選び方を変えても同値なノルムを与える．[FGr1]，[FGr2]．この同値性の理由について簡単に記述する．詳細については興味を持った読者諸氏の宿題としよう．

Heisenberg 群 $\mathbb{H}^d$ を

$$\mathbb{H}^d = \left\{ (z, x, \gamma) \colon z \in \mathbb{T},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \gamma \in \hat{\mathbb{R}}^d \right\}$$

によって定義する．群の積は以下のように定義する．$h_1 = (z_1, x_1, \gamma_1)$, $h_2 = (z_2, x_2, \gamma_2)$ としたとき，

$$h_1 \cdot h_2 = (z_1 z_2 e^{2\pi i \gamma_1 \cdot x_2}, x_1 + x_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

また，

$$h_1^{-1} = (z_1^{-1} e^{2\pi i x_1 \cdot \gamma_1}, -x_1, -\gamma_1)$$

Lebesgue 測度 $dh = dz\, dx\, d\gamma$ は $\mathbb{H}^d$ 上の右及び左不変 Haar 測度となる．$\mathbb{H}^d$ の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Schrödinger 表現 π は

$$\pi(h) f = z \tau_x e_\gamma f$$

で定義される．ここで $h \equiv (z, x, \gamma) \in \mathbb{H}^d$ かつ $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$．例えば [Be5, 例 5.12b]．π が既約で二乗可積分なユニタリ表現であり，その結果次の公式が成り立つことはよく知られている．[GroMoPa]．$f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\int_{\mathbb{H}^d} \langle f_1, \pi(h) g_1 \rangle \langle \pi(h) g_2, f_2 \rangle \, dh = \langle f_1, f_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle \tag{3.43}$$

$\langle f, \pi(h) g \rangle = V_g f(h)$ と書くことにする (定義 3.58 参照)．この記法を使って，空間 $M_{1,1}^{|s|}$ を以下のようにして定義できる．$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とすると，

$$M_{1,1}^{|s|} = \left\{ f \colon \int_{\mathbb{H}^d} |V_\varphi f(h)| w_{|s|}(h) \, dh < \infty \right\}$$

ここで，もし $h = (z, x, \gamma)$ なら $w_{|s|}(h) \equiv (1 + |\gamma|)^{|s|}$．

式 (3.43) から再生公式

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{H}^d} \langle f, \pi(u)g_1\rangle\langle g_1, \pi(u^{-1}h)g_2\rangle\, du \\
= & \int_{\mathbb{H}^d} \langle f, \pi(u)g_1\rangle\langle \pi(u)g_1, \pi(h)g_2\rangle\, du \\
= & \langle f, \pi(h)g_2\rangle
\end{aligned}$$

を得る．ここで $f, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ かつ $\|g_1\|_2 = \|g_2\|_2 = 1$．群のたたみ込み積の言葉では，この等式は次のように書くことができる．

$$V_{g_1}f * V_{g_2}g_1 = V_{g_2}f$$

さて，別の基本関数 φ に対して，ノルム (3.42) の同値性を示すために，任意の $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に関し

$$\int_{\mathbb{H}^d} |V_\psi \varphi(h)| w_{|s|}(h)\, dh \equiv C < \infty$$

が成り立つことを使う．$w_{|s|}$ は $\mathbb{H}^d$ 上の部分乗法的な重み付けなので，いつもの畳み込み不等式から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^d} |V_\psi f(h)| w_{|s|}(h)\, dh &= \int_{\mathbb{H}^d} |V_\varphi f * V_\psi \varphi(h)| w_{|s|}(h)\, dh \\
&\le \int_{\mathbb{H}^d} |V_\varphi f(h)| w_{|s|}(h)\, dh \int_{\mathbb{H}^d} |V_\psi \varphi(h)| w_{|s|}(h)\, dh \\
&= C \int_{\mathbb{H}^d} |V_\varphi f(h)| w_{|s|}(h)\, dh
\end{aligned}$$

がでる．反対向きの不等式も同様に出る．

(b) $r \in \mathbb{R}$ を与えたとき，**重み付き Fourier 代数** $A_r(\mathbb{R}^d)$ を

$$A_r(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \colon \|f\|_{A_r(\mathbb{R}^d)} \equiv \int |\hat{f}(\gamma)|(1+|\gamma|)^r\, d\gamma < \infty \right\}$$

によって定義する．$r = 0$ なら，$A_0(\mathbb{R}^d) = A(\mathbb{R}^d)$ は **Fourier 代数**と呼ばれる．また，$A_r(\hat{\mathbb{R}^d})$ を

$$A_r(\hat{\mathbb{R}^d}) = \left\{ f \colon \|f\|_{A_r(\hat{\mathbb{R}^d})} \equiv \int |\check{f}(t)|(1+|t|)^r\, dt < \infty \right\}$$

によって定義する．$r = 0$ のときは，$A_0(\hat{\mathbb{R}^d}) = A(\hat{\mathbb{R}^d})$ と書くことにする．

g の $M_{1,1}^{|s|}$ ノルムは 式 (3.42) で定義したが，

$$\|f\|_{M_{1,1}^{|s|}} \equiv \int \|f \tau_x \varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx$$

と書きなおすことができる．これがなぜ正しいかは，次に注意すれば解る．

$$\begin{aligned}\iint |\langle f, e_\gamma \tau_x \varphi\rangle| (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma\, dx &= \iint \left| \int f(t)\tau_x \overline{\varphi(t)} e^{-2\pi i \gamma\cdot t}\, dt\right| (1+||\gamma|)^{|s|}\, d\gamma\, dx \\ &= \iint |(f\tau_x\bar{\varphi})^\wedge(\gamma)|(1+|\gamma j/a)^{|s|}\, d\gamma\, dx = \int \|f\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx\end{aligned}$$

(c) 上の最後の注意より， 式 (3.42) が平行不変なノルムを $M_{1,1}^{|s|}$ 上定義することがわかる．すなわち

$$\|\tau_t f\|_{M_{1,1}^{|s|}} = \int \|\tau_t f \tau_x \varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx = \int \|f\tau_{x-t}\varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx = \int \|f\tau_x\varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx$$

(d) Feichtinger は [F2] で式 (3.42) と同値の離散的ノルムが以下の定義で与えられることを示した．$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ が性質

1. $0 \le \psi \le 1$
2. $\sum_n \tau_n \psi(t) = 1$

を持つとすると，ノルムは

$$\|f\|_{M_{1,1}^{|s|}} \equiv \sum_n \|f\tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}$$

で定義される．これは 式 (3.42) で定義したものと同値である．

これを見るために，$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $\int \varphi = 1$ を満たすとする．ψ はコンパクトな台を持つので，ある $R > 0$ で $|x-n| > R$ なら$\tau_x\bar{\varphi}\tau_n\psi = 0$ となるものが存在する．計算すると，

$$\begin{aligned}\int \|f\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx &= \int \|f\tau_x\bar{\varphi}\sum_n \tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx \\ &\le \sum_n \int \|f\tau_x\bar{\varphi}\tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx \le \sum_n \int_{|x-n|\le R} \|f\tau_x\bar{\varphi}\tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx \\ &\le \|\varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \sum_n \int_{|x-n|\le R} \|f\tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx \\ &= \|\varphi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} |B(R)| \sum_n \|f\tau_n\psi\|_{A_{|s|}\mathbb{R}^d}\end{aligned}$$

反対向きの不等式については，$\int \varphi = 1$ から，全ての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\int \tau_x\bar{\varphi} = 1$ が出ることに気を付ける．また，各 n に対して次が成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned}&\left\| f\tau_n\psi \int \tau_x\bar{\varphi}\, dx\right\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad = \int \left| \iint f(t)\tau_n\psi(t)\tau_x\bar{\varphi}(t)e^{-2\pi i\gamma\cdot t}\, dt\, dx\right| (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma \\ &\quad \le \iint \left| \int f(t)\tau_n\psi(t)\tau_x\bar{\varphi}(t)e^{-2\pi i\gamma\cdot t}\, dt\right| (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma\, dx \\ &\quad = \int \|f\tau_n\psi\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\, dx\end{aligned}$$

それゆえ，計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_n \|f\tau_n\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} &= \sum_n \left\| f\tau_n\psi \int \tau_x\bar{\varphi}\,dx \right\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \int \sum_n \|f\tau_n\psi\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\,dx = \int \sum_{|n-x|\le R} \|f\tau_n\psi\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\,dx \\ &\le \|\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}(R+1)^d \int \|f\tau_x\bar{\varphi}\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)}\,dx\end{aligned}$$

(e) Feichtinger は $M_{1,1}^{|s|}$ が Fourier 変換で次のように特徴付けられることも示した．$\psi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ が性質

1. $0 \le \psi \le 1$
2. $\sum_n \tau_n\psi(\gamma) = 1$

を持つとすると，

$$\|f\|_{M_{1,1}^{|s|}} \equiv \sum_n \|\hat{f}\tau_n\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|n|)^{|s|}$$

で定義されるノルムは 式 (3.42) で定義されたノルムと同値である．目的を達成するのには，以下の不等式があれば十分である．

補題 3.35　$\psi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ が注意 3.34(d) の条件を満たすとする．このとき定数 C で，全ての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\sum_n \|\hat{f}\tau_n\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|n|)^{|s|} \le C\|f\|_{M_{1,1}^{|s|}}$$

を満たすものがある．

証明　一般性を失うことなく

$$\int \psi(\gamma)\,d\gamma = 1$$

と仮定してよい．このとき，各 γ に対して，$\int \tau_\lambda\psi(\gamma)\,d\lambda = 1$ であり，

$$\|\hat{f}\tau_n\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})} = \left\| \int \hat{f}\tau_n\psi\tau_\lambda\psi\,d\lambda \right\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})} \le \int \|\hat{f}\tau_n\psi\tau_\lambda\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}\,d\lambda$$

と書ける．

ψ の台はコンパクトなので，ある定数 $R>0$ で，$|\lambda-n|>R$ ならいつでも $\tau_n\psi\tau_\lambda\psi = 0$ となるものが存在する．また，$|\lambda-n| \le R$ なら

$$(1+|n|)^{|s|} \le (1+|\lambda|)^{|s|}(1+|\lambda-n|)^{|s|} \le (R+1)^{|s|}(1+|\lambda|)^{|s|}$$

となることに注意する．これより，以下を得る．

$$\begin{aligned}
\sum_n &\quad \|\hat{f}\tau_n\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|n|)^{|s|} \\
&\le \sum_n \int \|\hat{f}\tau_n\psi\tau_\lambda\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|n|)^{|s|}\,d\lambda \\
&= \sum_n \int_{|\lambda-n|\le R} \|\hat{f}\tau_n\psi\tau_\lambda\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|n|)^{|s|}\,d\lambda \\
&\le C\sum_n \int_{|\lambda-n|\le R} \|\hat{f}\tau_\lambda\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|\lambda|)^{|s|}\,d\lambda \\
&\le C\int \|\hat{f}\tau_\lambda\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}(1+|\lambda|)^{|s|}\,d\lambda \\
&= C\iint |\langle \hat{f}, e_x\tau_\lambda\bar{\psi}\rangle|(1+|\lambda|)^{|s|}\,dx\,d\lambda \\
&= C\iint |\langle f, \tau_x e_\lambda\check{\bar{\psi}}\rangle|(1+|\lambda|)^{|s|}\,dx\,d\lambda = C\|f\|_{M_{1,1}^{|s|}}
\end{aligned}$$

なぜなら $\check{\bar{\psi}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$．　∎

これで以下の定理を証明する準備ができた．

定理 3.36　$f \in M_{1,1}^{|s|}$ とし，

$$c_{n,m} = \iint_Q |Zf(x,\omega)|^2 e^{2\pi i(m\cdot x+n\cdot\omega)}\,dx\,d\omega$$

と定義する．このとき，

$$\sum_n\sum_m |c_{n,m}|(1+|m|)^{|s|} < \infty$$

証明　定理 3.15 により次が成り立つことに注意．

$$\begin{aligned}
c_{n,m} &= \iint_Q |Zf(x,\omega)|^2 e^{-2\pi i(m\cdot x+n\cdot\omega)}\,dx\,d\omega \\
&= \iint_Q Zf(x,\omega)e^{-2\pi i(m\cdot x+n\cdot\omega)}\overline{Zf(x,\omega)}\,dx\,d\omega \\
&= \iint_Q Z(\tau_n e_{-m}f)(x,\omega)\overline{Zf(x,\omega)}\,dx\,d\omega = \langle \tau_n e_{-m}f, f\rangle
\end{aligned}$$

さて，$\psi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ をある $C>0$ が存在して，$C^{-1} \le \inf_m \sum_k \tau_k\psi(m) \le \sup_m \sum_k \tau_k\psi(m) \le C$ を満たす関数とする．また，$R>0$ を $|m-k|>R$ なら $\tau_k\psi(m)=0$ を満たす定数とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\sum_m &\quad |\langle f, \tau_n e_{-m}f\rangle|(1+|m|)^{|s|} \\
&= \sum_m \left|\int f(x)\tau_n\overline{f(x)}e^{-2\pi imx}\,dx\right|(1+|m|)^{|s|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m |(f\tau_n \bar{f})^\wedge(m)|(1+|m|)^{|s|} \\
&\leq C\sum_m \sum_k |(f\tau_n \bar{f})^\wedge(m)\tau_k\psi(m)|(1+|m|)^{|s|} \\
&\leq C\sum_k \sum_{|m-k|\leq R} |(f\tau_n \bar{f})^\wedge(m)\tau_k\psi(m)|(1+|m|)^{|s|} \\
&\leq C(R+1)^d \sum_k \|(f\tau_n \bar{f})^\wedge \tau_k\psi\|_\infty (1+|k|)^{|s|} \\
&\leq C(R+1)^d \sum_k \|(f\tau_n \bar{f})^\wedge \tau_k\psi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})} (1+|k|)^{|s|} \leq C(R+1)^d \|f\tau_n\bar{f}\|_{M_{1,1}^{|s|}}
\end{aligned}
$$

ここで，補題 3.35 と任意の $f \in A(\hat{\mathbb{R}^d})$ に対して，$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})}$ となるという事実を用いた．さて，注 3.34(**d**) の $M_{1,1}^{|s|}$ の離散ノルムによる特徴付けを用い，$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ をうまく選ぶと以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\sum_n \|f\tau_n\bar{f}\|_{M_{1,1}^{|s|}} &\leq C\sum_n\sum_k \|(f\tau_k\psi)(\tau_n\bar{f}\tau_k\psi)\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C\sum_k \|f\tau_k\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \sum_n \|\tau_n f\tau_k\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C\sum_k \|f\tau_k\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \sum_n \|\tau_{-k} f\tau_{-n}\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C\sum_k \|f\tau_k\psi\|_{A_{|s|}(\mathbb{R}^d)} \|\tau_{-k}f\|_{M_{1,1}^{|s|}} \leq C\|f_{M_{1,1}^{|s|}}\|^2
\end{aligned}
$$

∎

いよいよ，ある格子の大きさに関する Bessel ポテンシャル空間のフレームと原子の集合の特徴付けを Zak 変換の言葉で与える (定理 3.41) 準備ができた．この結果は [GrW] を一般化している．同様の結果が [W3] にある．

補題 3.37　$s \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，定数 c_1, $c_2 > 0$ があって全ての $f \in \mathcal{L}_s^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$
c_1\|f\|_{\mathcal{L}_s^2}^2 \leq \iint |\langle f, e_\gamma\tau_x\psi\rangle|^2(1+|\gamma|)^{2s}\,d\gamma\,dx \leq c_2\|f_{\mathcal{L}_s^2}\|^2
$$

が成り立つ．

証明　最初に，

$$
|\langle f, e_\gamma\tau_x\psi\rangle| = |\langle f, \tau_x e_\gamma\psi\rangle|
$$

と

$$
\langle f, \tau_x e_\gamma\psi\rangle = \langle \hat{f}, e_{-x}\tau_\gamma\hat{\psi}\rangle = (\hat{f}\tau_\gamma\overline{\hat{\psi}})^\wedge(-x)
$$

に注意する．それゆえ，Plancherel の定理によって

$$\int |\langle f, e_\gamma \tau_x \psi\rangle|^2\, dx = \int |\hat{f}(\lambda)|^2 |\hat{\psi}(\lambda-\gamma)|^2\, d\lambda$$

よって，

$$\begin{aligned}
\iint |\langle f, e_\gamma \tau_x \psi\rangle|^2 \ \ (1+|\gamma|)^{2s}\, dx\, d\gamma & \\
&= \iint |\hat{f}(\lambda)|^2 |\hat{\psi}(\lambda-\gamma)|^2 (1+|vv\gamma|)^{2s}\, d\lambda\, d\gamma \\
&= \int |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \int |\hat{f}(\lambda+\gamma)|^2 (1+|\gamma|)^{2s}\, d\gamma\, d\lambda \\
&= \int |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma-\lambda|)^{2s}\, d\gamma\, d\lambda \\
&\le \int |\hat{\psi}(\lambda)|^2 (1+|\lambda|)^{2|s|}\, d\lambda \int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|)^{2s}\, d\gamma \\
&= \|\psi\|^2_{\mathcal{L}^2_{|s|}} \|f\|^2_{\mathcal{L}^2_s} = c_1 \|f\|^2_{\mathcal{L}^2_s}
\end{aligned}$$

さて，もし $\psi \not\equiv 0$ なら 球体 B で B上 $|\hat{\psi}(\lambda)| > \epsilon > 0$ を成り立たせるものがある．さらに，定数 C で，全ての $\lambda \in B$ に対して，

$$(1+|\gamma|)^{2s} \le C(1+|\gamma-\lambda|)^{2s}$$

を満たすものがある．従って，次を得る．

$$\begin{aligned}
\int |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma-\lambda|)^{2s}\, d\gamma\, d\lambda & \\
&\ge \int_B |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma-\lambda|)^{2s}\, d\gamma\, d\lambda \\
&\ge C^{-1} \epsilon^2 |B| \|f\|^2_{\mathcal{L}^2_s} \equiv c_2 \|f\|^2_{\mathcal{L}^2_s}
\end{aligned}$$

また，$c_2 > 0$.　∎

補題 3.38　$\psi, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき $\|f\|_{\mathcal{L}^2_s}$ は

$$\sum_{n,m} \int_Q \left| \int_Q e^{-2\pi i \gamma\cdot x}\, \overline{Z\psi(x-t, \omega-\gamma)}\, Zf(x,\omega) e^{2\pi i (m\cdot x - n\cdot\omega)}\, dx\, d\omega \right|^2 \times (1+|m|)^{2s}\, dt\, d\gamma \tag{3.44}$$

と同値となる．

証明　最初に $Z(e_\gamma \tau_t \psi)(x,\omega) = e^{2\pi i \gamma\cdot x} Z\psi(x-t, \omega-\gamma)$ であることに気を付ける．Z はユニタリ作用素なので，以下を得る．

$$\iint |\langle f, e_\gamma \tau_t \psi\rangle|^2 (1+|\gamma|)^{2s}\, d\gamma\, dt$$

$$= \iint |\langle Zf, Z(e_\gamma \tau_t \psi)\rangle|^2 (1+|\gamma|)^{2s}\, d\gamma\, dt$$
$$= \iint \left| \iint_Q Zf(x,\omega)\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)} e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\, dx\, d\omega \right|^2 (1+|\gamma|)^{2s}\, d\gamma\, dt$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \iint_Q \left| \iint_Q Zf(x,\omega)\overline{Z\psi(x-t+n,\omega-\gamma+m)} e^{-2\pi i(\gamma-m)\cdot x}\, dx\, d\omega \right|^2$$
$$\times (1+|\gamma-m|)^{2s}\, d\gamma\, dt$$

これと 補題 3.37 より $\|f\|_{\mathcal{L}^2_s}$ が

$$\sum_{n,m} \iint_Q \left| \iint_Q Zf(x,\omega) e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)} e^{2\pi i(m\cdot x - n\cdot\omega)}\, dx\, d\omega \right|^2$$
$$\times (1+|m|)^{2s}\, dt\, d\gamma$$

と同値であることが出る． ∎

注意 3.39 **(a)** 式 (3.44) は関数

$$e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)} Zf(x,\omega)$$

の Fourier 係数の重み付き $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ノルムと解釈することができる．

(b) $r \geq 0$ を与える．空間 $A_r(Q)$ を Q 上の可測関数の空間の元 M で

$$M(x,\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \gamma_{n,m} e^{2\pi i(m\cdot x + n\cdot\omega)}$$

と

$$\|M\|_{A_r(Q)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |\gamma_{n,m}|(1+|m|)^r < \infty$$

を満たすもの全体とする．重み $w(n,m) = (1+|m|)^r$ は **Beurling–Domar** ウエイト (定義/注意 3.26d)，すなわち，

$$w(n_1+n_2, m_1+m_2) \leq w(n_1,m_1)w(n_2,m_2)$$

なので $A_r(Q)$ は各点ごとの積により，単位元を持つ Banach 代数となる．[K，Chapter VIII] を見よ．

補題 3.40 $s \in \mathbb{R}$ を与え，$M(x,\omega) \in A_{|s|}(Q)$ とする．任意の $a > 0$ に対し，作用素 $S_M = Z^{-1}MZ$ は $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ 上連続で，

$$\|S_M f\|_{\mathcal{L}^2_s} \leq \|M\|_{A_{|s|}(Q)} \|f\|_{\mathcal{L}^2_s} \tag{3.45}$$

となる．

証明　初めに，$L^2_s(\mathbb{R}^d)$ は相似変換で不変なので，$a=1$ の場合のみを考えれば十分であることに注意する．次に，固定した，$(t,\gamma)\in Q$ と $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の各々に対し，関数

$$e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)}Zf(x,\omega)$$

は変数 (x,ω) について周期的であることに気を付ける．よって，各 (t,γ) に対し，式 (3.44) の内側の積分は $(-n,m)$ における Fourier 変換に他ならない．

最初に，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に関する 式 (3.45) を証明する．$ZS_Mf=MZf$ なので，補題 3.38 から $\|S_M\|_{\mathcal{L}^2_s}$ が以下と同値であることが出る．

$$\sum\nolimits_{n,m}\iint_Q\left|\iint_Q e^{-2\pi i\gamma\cdot x}M(x,\omega)Zf(x,\omega)\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)}e^{2\pi i(m\cdot x-n\cdot\omega)}\,dx\,d\omega\right|^2 \times(1+|m|)^{2s}\,dt\,d\gamma$$

さて，各 $(t,\gamma)\in Q$ に関して，

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}\left|\iint_Q e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega\gamma)}M(x,\omega)Zf(x,\omega)e^{2\pi i(m\cdot x-n\cdot\omega)}\,dx\,d\omega\right|^2\\&\qquad\times(1+|m|)^{2s}\\&\leq\ \|M\|^2_{A_{|s|}(Q)}\sum_{n,m}\left|\iint_Q e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)}Zf(x,\omega)e^{2\pi i(m\cdot x-n\cdot\omega)}\,dx\,d\omega\right|^2\\&\qquad\times(1+|m|)^{2s}\end{aligned}\tag{3.46}$$

左辺は関数

$$M(x,\omega)e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)}Zf(x,\omega)$$

の Fourier 係数の重み付き ℓ^2 ノルムの二乗に他ならないのでこの評価は成り立つ．上の関数は Fourier 係数

$$e^{-2\pi i\gamma\cdot x}\overline{Z\psi(x-t,\omega-\gamma)}Zf(x,\omega)$$

を持つ $\gamma_{n,m}$ の畳み込み積である．畳み込み積の標準的な性質より，不等式 (3.46) が固定した $(t,\gamma)\in Q$ の各々に対して成り立つ．

式 (3.46) の両辺を $(t,\gamma)\in Q$ 上積分すると，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対する 式 (3.45) を与える．$cL^2_s(\mathbb{R}^d)$ 内での $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の密度により，式 (3.45) が出る．∎

定理 3.41　$s\in\mathbb{R}$，$a,b>0$，$ab=1/N$，$N\in\mathbb{Z}_+$，$g\in M^{|s|}_{1,1}$ と仮定する．このとき Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}=\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ が $\mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)$，$|r|\leq|s|$ に関して，フレームでありまた原子の集合となる

ことと，ある定数 $A, B > 0$ があって，ほとんど至るところの $(x,\omega) \in Q$ に対して，

$$A \le \sum_{j=0}^{N-1} |Zg(x, \omega + j/N)|^2 \le B \tag{3.47}$$

が成り立つことは同値である．

証明 初めに，もし $g \in M_{1,1}^{|s|}(\mathbb{R}^d)$ なら，任意の $a > 0$, $b > 0$ に対し，ある $C = C(a,b,g) > 0$ が存在して，$|r| \le |s|$ なる全ての $f \in \mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\sum_n \sum_m |\langle f, e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2 (1+|m|)^{2r} \le C\|f\|_{\mathcal{L}_r^2}^2$$

[W3] と 定理 3.47 参照．これは上の不等式より強い．(注意 3.44c を見よ)．従って $\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ はいつでも $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ 及び $\mathcal{L}_{-r}^2(\mathbb{R}^d)$ の Bessel 列となる．

条件 式 (3.47) が成り立つと仮定する．このとき 定理 3.32 より，定義 3.27 で定義した作用素 S が $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ の位相同形写像であることを示せば十分．定義 3.10，補題 3.40 の記法と Zak 変換の基本的性質を用いると，以下の計算が遂行できる．

$$\begin{aligned}
ZSf(x,\omega) &= \sum_{m,n} \langle Zf, Z\varphi_{m,n}\rangle Z\varphi_{m,n}(x,\omega) \\
&= \sum_{m,n} \langle Zf, e_{m/N}(x)e_{-n}(\omega)Zg(x,\omega - m/N)\rangle \\
&\times \; e_{m/N}(x)e_{-n}(\omega)Zg(x,\omega - m/N) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k,n} \langle Zf\overline{Zg(x,\omega - j/N)}e_{-j/N}(x), e_k(x)e_{-n}(\omega)\rangle \\
&\times \; e_k(x)e_{-n}(\omega)Zg(x,\omega - j/N)e_{j/N}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} Zf(x,\omega)|Zg(x,\omega - j/N)|^2 = Zf(x,\omega)\sum_{j=0}^{N-1}|Zg(x,\omega - j/N)|^2
\end{aligned}$$

これから $S = S_M$ がでる．ここで，

$$M(x,\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} |Zg(x,\omega + j/N)|^2$$

全ての $|r| \le |s|$ に対して，$g \in M_{1,1}^{|s|}$，$M \in A_r(Q)$ なので，これは 定理 3.36 から出る．従って補題 3.40 より，S は $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ 上の連続作用素となる．

さて，式 (3.47) が成り立ち，各点ごとの積で $A_r(Q)$ が単位元を持つ Banach 代数となるので Wiener–Levy の定理 ([K，p．209]) が適用でき，$M^{-1} \in A_r(Q)$ 全ての $|r| \le |s|$ に対して $M^{-1} \in A_r(Q)$ と結論することができる．よって，S は $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ の全単射となり S^{-1} は

$$S^{-1} = Z^{-1}M^{-1}Z$$

で与えられる．さらに 補題 3.12 より，S^{-1} は連続であり，それゆえ S は $\mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)$ の位相同形写像となる．

逆に，もし $\{\varphi_{m,n}\}$ が全ての $|r| \le |s|$ で $\mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)$ に関してフレームなら，特に，これは $\mathcal{L}^2_0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ．よって，Zak 変換と $L^2(\mathbb{R}^d)$ に対する Gabor フレームの標準的な結果 (例えば [HW，定理 4.3.3]) より， 式 (3.47) は成立しなければならない． ▮

注意 3.42　実は，上より一般的な結果が成り立つ．Bessel ポテンシャル空間は上の議論をそのままに，一般のモジュレーション空間 $M^r_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ に置き換えることができる． [W3], [GrW], [FGrW] 参照．また，Sobolev 空間の特別な場合に，定理 3.41 を [M，定理 3] と比べてみるべきである．

定理 3.41 では，格子の密度 ab が $1/N$以下 ($N \in \mathbb{Z}_+$) であったことに気を付けよう．ab の値が任意の場合を考えると面白い．以下で，この状況を記述する 2, 3 の結果を証明する．この場合の基本関数の集まりは以前よりやや大きくなる．しかしながら，結果は精密なものではない．まず初めに，基本関数の集合を定義しよう．

定義 3.43　$s \in \mathbb{R}$ と $\varphi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ を与えたとき，空間 $W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ を

$$W_{|s|}(\mathbb{R}^d) = \{f\colon \int \|\hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_\infty (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma < \infty\}$$

で定義する．この空間のノルムを

$$\|f\|_{W_{|s|}} = \int \|\hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_\infty (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma \tag{3.48}$$

で与える．

注意 3.44　**(a)** $W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ は 式 (3.48) で定義したノルムで Banach 空間になる．$\varphi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ をとり変えても同値なノルムを定める．空間 $W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ は

$$\|\tau_t f\|_{W_{|s|}} = \|f\|_{W_{|s|}}$$

や，次のような性質を持つ．

$$\begin{aligned}\|e_\lambda f\|_{W_{|s|}} &= \int \|\tau_\lambda \hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_\infty (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma = \int \|\hat{f}\tau_{\gamma-\lambda}\varphi\|_\infty (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma \\ &= \int \|\hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_\infty (1+|\gamma+\lambda|)^{|s|}\, d\gamma \le (1+|\lambda|)^{|s|}\|f\|_{W_{|s|}}\end{aligned}$$

また，$\hat{h}$ が有界である任意の関数 h に対して

$$\|hf\|_{W_{|s|}} \le \|\hat{h}\|_\infty \|f\|_{W_{|s|}}$$

となることに注意．

(b) $\psi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ が次の 2 性質を持つとする．

(a) $0 \le \psi \le 1$

(b) $\sum_n \tau_n \psi(t) = 1$

このとき，

$$\|f\|_{W_{|s|}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|\hat{f}\tau_n\psi\|_\infty (1+|n|)^s \tag{3.49}$$

によって定義されるノルムは 式 (3.48) で定義したノルムと同値である．

(c) $M_{1,1}^{|s|} \subseteq W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ であることはすぐわかる．

$$\int \|\hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_\infty (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma \le \int \|\hat{f}\tau_\gamma\varphi\|_{A(\hat{\mathbb{R}^d})} (1+|\gamma|)^{|s|}\, d\gamma$$

なので，包含写像は連続となる．

(d) 空間 $W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ は Feichtinger が [F1] で定義した Wiener 融合空間の一例になっている．この理論は Feichtinger やその他の人の力で随分発展している．ここでは，この空間に関するほんの 2, 3 の基本的な事実が分かれば十分である．空間 $W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ はその中から $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)(|r| \le |s|)$ のフレームの基本関数を選ぶ，関数の集まりである．以下の結果のなかで，関数 $g \in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ にほんのちょっとした条件をつけると，Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ が十分小さい格子に対し，$\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)(|r| \le |s|)$ に関するフレームや原子の集合となることを示す．

以下では，$0 \le \varphi \le 1$ を満たす $\varphi \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}^d})$ を固定し，$B(0,\sqrt{d})$ 上$\varphi = 1$ かつ $B(0,2\sqrt{d})$ の外で $\varphi = 0$ と仮定する．$a > 0$ に対し，$\varphi_a(\gamma) = \varphi(\gamma/a)$ と定義する．このとき，$B(0,a\sqrt{d})$ 上 $\varphi_a = 1$ となる．$B(0,\sqrt{d})$ が原点中心一辺 1 の立方体を含むことに注意．

補題 3.45 $s \in \mathbb{R}$，$a > 0$ を与えると，$\mathrm{supp}(\varphi)$ に依存する定数 C で全ての関数 h に対して以下を満たすものが存在する．

$$\begin{aligned}\sum_n \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma \in \hat{\mathbb{R}^d}} &|\hat{h}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}\tau_{na}\varphi_a(\gamma)| \\ &\le C(1+2\sqrt{d}\max\{1,1/a\})^d \int \|\hat{h}\tau_\lambda\varphi\|_\infty (1+|\lambda|)^{|s|}\, d\lambda\end{aligned}$$

証明 最初に $\int \varphi(\lambda)\, d\lambda = c \ge 1$ であり，従って，各γに対して $\int \tau_\lambda\varphi(\gamma)\, d\lambda = c \ge 1$ であることに注意する．それゆえ，

$$\begin{aligned}\sum_n \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma \in \hat{\mathbb{R}^d}} &|\hat{h}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}\tau_{na}\varphi_a(\gamma)| \\ &\le \sum_n \int \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma \in \hat{\mathbb{R}^d}} |\hat{h}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}|\tau_{na}\varphi_a(\gamma)\tau_\lambda\varphi(\gamma)\, d\lambda\end{aligned}$$

$$= \int \sum_{n\in F_a(\lambda)} \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}}^d} |\hat{h}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}\tau_{na}\varphi_a(\gamma)\tau_\lambda\varphi(\gamma)|\,d\lambda$$

ここで，

$$F_a(\lambda) = \left\{n : |na-\lambda| \le 2\sqrt{d}\max\{1,a\}\right\}$$

なお，$n \notin F_a(\lambda)$ なら$\tau_{na}\varphi_a\tau_\lambda\varphi = 0$ であることを使っている．

$$\max_\lambda \sharp F_a(\lambda) \le (1+2\sqrt{d}\max\{1,1/a\})^d$$

であること，および，$\operatorname{supp}\varphi$ にのみ依存するある C が存在して

$$\sup_{\gamma\in\operatorname{supp}\tau_\lambda\varphi}(1+|\gamma|)^{|s|} \le C(1+|\lambda|)^{|s|}$$

が成り立つことに注意する．これから，

$$\begin{aligned}\int \sum_{n\in F_a(\lambda)} &\operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}}^d} |\hat{h}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}\tau_{na}\varphi_a(\gamma)\tau_\lambda\varphi(\gamma)|\,d\lambda \\ &\le C(1+2\sqrt{d}\max\{1,1/a\})^d \int \|\hat{h}\tau_\lambda\varphi\|_\infty(1+|\lambda|)^{|s|}\,d\lambda\end{aligned}$$

∎

補題 3.46　$s\in\mathbb{R}$，$g\in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$，$a,b>0$ とする．各 $j\in\mathbb{Z}^d$ に対して離散自己相関関数 $\tilde{G}_j$ を

$$\tilde{G}_j \equiv \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}\tau_{j/a}\overline{\hat{g}})$$

で定義する．このとき，

(a) $\sum_j(1+|j/a|)^{|s|}\|\tilde{G}_j\|_\infty < \infty$,

(b) $\eta>0$ を与えると，$a_0>0$ g と η に依存する $a_0>0$ が存在して，任意の $0<a\le a_0$ と $0<b\le 1$ に対して，

$$\sum_{j\ne 0}(1+|j/a|)^{|s|}\|\tilde{G}_j\|_\infty < b^{-d}\eta$$

証明　**(a)** を見るために，$\tilde{G}_j$ が周期 b を持つので $b\le 1/a$ と仮定すると，以下を得ることに注意する．

$$\begin{aligned}&\sum_j(1+|j/a|)^{|s|}\|\tilde{G}_j\|_\infty \\ &\qquad\le \sum_j(1+|j/a|)^{|s|}\|\varphi_b\varphi_{1/a}\sum_m\tau_{mb}(\hat{g}\tau_{j/a}\overline{\hat{g}})\|_\infty\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_j (1+|j/a|)^{|s|} \sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_b(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb)| \\
&\quad \times \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_{1/a}(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb-j/a)| \\
&\leq \sum_j \sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_b(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb)(1+|\gamma-mb|)^{|s|}| \\
&\quad \times \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_{1/a}(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb-j/a)(1+|\gamma-mb-j/a|)^{|s|}| \\
&= \sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{mb}\varphi_b(\gamma)\hat{g}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}| \\
&\quad \times \sum_j \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{j/a}\varphi_{1/a}(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb)(1+|\gamma-mb|)^{|s|}|
\end{aligned}
$$

補題 3.45 を前の方の和に直接適用すると，

$$
\sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{mb}\varphi_b(\gamma)\hat{g}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}| \leq C(1+2\sqrt{d}\max\{1,1/b\})^d \|g\|_{W_{|s|}}
$$

を得る．後ろの方の和に関しては，補題 3.45 において $\hat{h}(\gamma)$ を$\hat{g}(\gamma-mb)$ に $(1+|\gamma|)^{|s|}$ を $(1+|\gamma-mb|)^{|s|}$に置き変えて適用する．この場合，補題 3.45 の 定数 C が m に依らないことに気を付けなければいけない．これより，以下を得る．

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{j/a}\varphi_{1/a}(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb)(1+|\gamma-mb|)^{|s|}| \\
&\quad\leq C(1+2\sqrt{d}\max\{1,a\})^d \int \|\tau_{mb}\hat{g}\tau_\lambda\varphi\|_\infty (1+|\lambda-mb|)^{|s|}\,d\lambda \\
&\quad= C(1+2\sqrt{d}\max\{1,a\})^d \int \|\hat{g}\tau_\lambda\varphi\|_\infty (1+|\lambda|)^{|s|}\,d\lambda \\
&\quad= C(1+2\sqrt{d}\max\{1,a\})^d \|g\|_{W_{|s|}}
\end{aligned}
$$

(b) を見るために，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $M > 0$ に対し，

$$
\operatorname{supp} \hat{g}_1 \subseteq B(0,M)
$$

かつ

$$
\|g_2\|_{W_{|s|}} < \epsilon
$$

を満たす g_1, g_2 を用いて，$g = g_1 + g_2$ と書けることに注意する．これより，以下のように書けることがわかる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_j &= \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}\tau_{j/a}\overline{\hat{g}}) \\
&= \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_1\tau_{j/a}\overline{\hat{g}_1}) + \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_1\tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2}) \\
&+ \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2\tau_{j/a}\overline{\hat{g}_1}) + \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2\tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_1 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2}) + \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_1}) + \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2})$$

なお，$j \neq 0$ かつ $a < (2\sqrt{d}M)^{-1}$ なら，今の場合，$\hat{g}_1$ と $\tau_{j/a}\hat{g}_1$ の台が重ならないことを使っている．$b \leq 1$ であることを思い出すと，**(a)** の議論を用いて以下を得る．

$$\begin{aligned}
&\sum_j (1+|j/a|)^{|s|}\ \|\tilde{G}_j\|_\infty \\
&\quad \leq \sum_j (1+|j/a|)^{|s|} \left\| \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_1 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2}) \right\|_\infty \\
&\qquad + \sum_j (1+|j/a|)^{|s|} \left\| \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_1}) \right\|_\infty \\
&\qquad + \sum_j (1+|j/a|)^{|s|} \left\| \sum_m \tau_{mb}(\hat{g}_2 \tau_{j/a}\overline{\hat{g}_2}) \right\|_\infty \\
&\quad \leq C(1+2\sqrt{d}\max\{1,a\})^d (1+2\sqrt{d}\max\{1,1/b\})^d \\
&\qquad \times (2\|g_1\|_{W_{|s|}}\|g_2\|_{W_{|s|}} + \|g_2\|^2_{W_{|s|}}) \\
&\quad < C(1+2\sqrt{d}\max\{1,a\})^d (1+2\sqrt{d}\max\{1,1/b\})^d (2\epsilon\|g_1\|_{W_{|s|}} + \epsilon^2) \leq b^{-d}\eta
\end{aligned}$$

ϵ は任意だったので，$a < (2\sqrt{d}M)^{-1} < \infty$，かつ $b \leq 1$． ∎

定理 3.47　$s \in \mathbb{R}$，$g \in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$，$a, b > 0$ とする．このとき定数 B で，全ての $f \in \mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)$ $(|r| \leq |s|)$ に対し

$$\sum_n \sum_m |\langle f, e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2 (1+|m|)^{2r} \leq B\|f_{\mathcal{L}^2_r}\|^2$$

を満たすものが存在する．換言すると，全ての $a, b > 0$ に対し，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $\mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)$ や $\mathcal{L}^2_{-r}(\mathbb{R}^d)$ の Bessel 列となる．

証明　標準的な Poisson の和公式の議論 (例えば [HW]) によって

$$\begin{aligned}
&\sum_n \sum_m |\langle f, e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2\ (1+|m|)^{2r} \\
&\qquad = a^{-d} \sum_k \int \overline{\hat{f}(\gamma)} \hat{f}(\gamma - k/a) \sum_m (1+|m|)^{2r} \hat{g}(\gamma - mb) \overline{\hat{g}(\gamma - mb - k/a)}\, d
\end{aligned}$$

が導かれる．さて，ある定数 c と任意の $k \in \mathbb{Z}^d$，$\gamma \in \hat{\mathbb{R}}^d$に対し，

$$\begin{aligned}
(1+|m|)^{2r} &\leq c(1+|mb|)^{2r} \\
&\leq c(1+|\gamma|)^r (1+|\gamma - mb|)^{|r|} (1+|\gamma - k/a|)^r (1+|\gamma - mb - k/a|)^{|r|} \\
&\leq c(1+|\gamma|)^r (1+|\gamma - mb|)^{|s|} (1+|\gamma - k/a|)^r (1+|\gamma - mb - k/a|)^{|s|}
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$
\begin{aligned}
\sum_n \sum_m & |\langle f, e_{mb}\tau_{na}g\rangle|^2(1+|m|)^{2r} \\
\leq\ & ca^{-d}\sum_k \int \overline{\hat{f}(\gamma)}(1+|\gamma|)^r \hat{f}(\gamma-k/a)(1+|\gamma-k/a|)^r \\
& \sum_m \hat{g}(\gamma-mb)(1+|\gamma-mb|)^{|s|}\overline{\hat{g}(\gamma-mb-k/a)}(1+|\gamma-mb-k/a|)^{|s|}\,d\gamma \\
\leq\ & ca^{-d}\int |\hat{f}(\gamma)|^2(1+|\gamma|)^{2r}\,d\gamma \\
& \sum_k \Bigg\| \sum_m |\hat{g}(\gamma-mb)|(1+|\gamma-mb|)^{|s|}|\hat{g}(\gamma-mb-k/a)| \\
& \quad \times(1+|\gamma-mb-k/a|)^{|s|}\Bigg\|_\infty \\
\leq\ & ca^{-d}\|f\|^2_{\mathcal{L}^2_r}\sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_b(\gamma)\tau_{mb}(\hat{g}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|})| \\
& \times\sum_k \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\varphi_{1/a}(\gamma)\tau_{k/a}(\tau_{mb}(\hat{g}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}))| \\
\leq\ & ca^{-d}\|f\|^2_{\mathcal{L}^2_r}\sum_m \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{-mb}\varphi_b(\gamma)\hat{g}(\gamma)(1+|\gamma|)^{|s|}| \\
& \times\sum_k \operatorname*{ess\ sup}_{\gamma\in\hat{\mathbb{R}^d}} |\tau_{-k/a}\varphi_{1/a}(\gamma)\hat{g}(\gamma-mb)(1+|\gamma-mb|)^{|s|}| \leq B\|f\|^2_{\mathcal{L}^2_r}\|g\|^2_{W_{|s|}}
\end{aligned}
$$

なお，補題 3.45 を使った． ∎

定理 3.48 $s\in\mathbb{R}$，$g\in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ とする．ある $b>0$ に対し，定数 $A,B>0$ で

$$
\text{ほとんど至る所 } A\leq\sum_m |\hat{g}(\gamma-mb)|^2\leq B \tag{3.50}
$$

を満たすものが存在すると仮定する．このとき，やはり g と b に依存する定数 $\tilde{C}(a,|s|)$ で各 $a>0$ に対して，

$$
\lim_{a\to 0}\tilde{C}(a,|s|)=0 \tag{3.51}
$$

かつ，各 $f\in\mathcal{L}^2_r(\mathbb{R}^d)(|r|\leq|s|)$ に対して

$$
\left\| f-\frac{2a^d}{B+A}Sf\right\|_{\mathcal{L}^2_r}\leq\frac{B-A+\tilde{C}(a,|s|)}{B+A}\|f\|_{\mathcal{L}^2_r} \tag{3.52}
$$

を満たすものが存在する．

証明 Poisson 和公式の議論 (例えば，[W2]，[HW，定理 4.2.1]) によって $g\in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$，$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$
(Sf)^\wedge(\gamma)=a^{-d}\sum_j \tau_{j/a}\hat{f}(\gamma)\tilde{G}_j(\gamma)
$$

がわかる．この等式と Hölder の不等式および Minkowski の不等式を組みあわせると，以下の計算が遂行できる．

$$
\begin{aligned}
&\left\| f - \frac{2a^d}{B+A} Sf \right\|_{\mathcal{L}_r^2} \\
&\quad = \left(\int \left| \hat{f}(\gamma) - \frac{2a^d}{B+A} (Sf)^\wedge(\gamma) \right|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\quad = \left(\int \left| \hat{f}(\gamma) - \frac{2}{B+A} \sum_j \tau_{j/a} \hat{f}(\gamma) \tilde{G}_j(\gamma) \right|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\quad \le \left(\int \left| \hat{f}(\gamma)(1 - \frac{2}{B+A} \tilde{G}_0(\gamma)) \right|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\qquad + \left(\int \left| \frac{2}{B+A} \sum_{j \ne 0} \tau_{j/a} \hat{f}(\gamma) \tilde{G}_j(\gamma) \right|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\quad \le \frac{B-A}{B+A} \left(\int |\hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\qquad + \frac{2}{B+A} \sum_{j \ne 0} \|\tilde{G}_j\|_\infty \left(\int |\tau_{j/a} \hat{f}(\gamma)|^2 (1+|\gamma|)^{2r} \, d\gamma \right)^{1/2} \\
&\quad \le \frac{B-A}{B+A} \|f\|_{\mathcal{L}_r^2}^2 + \frac{2}{B+A} \sum_{j \ne 0} (1+|j/a|)^{|s|} \|\tilde{G}_j\|_\infty \|f\|_{\mathcal{L}_r^2}^2 \\
&\quad = \frac{B-A+\tilde{C}(a,|s|)}{B+A} \|f\|_{\mathcal{L}_r^2}^2
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\tilde{C}(a,|s|) = 2 \sum_{j \ne 0} (1+|j/a|)^{|s|} \|\tilde{G}_j\|_\infty
$$

実は，2 番目の不等式には次の評価が必要である．

$$
\begin{aligned}
\left\| 1 - \frac{2}{B+A} G_0 \right\|_\infty &= \max\left\{ 1 - \frac{2A}{B+A}, \ \frac{2B}{B+A} - 1 \right\} \\
&= \frac{B-A}{B+A}
\end{aligned}
$$

これは 式 (3.50) から出る．補題 3.46 により，

$$
\lim_{a \to 0} \sum_{j \ne 0} (1+|j/a|)^{|s|} \|\tilde{G}_j\|_\infty = 0
$$

これは 式 (3.51) に他ならない． ∎

さて，これで次の結果が証明できる．

系 3.49　$s \in \mathbb{R}$，$g \in W_{|s|}(\mathbb{R}^d)$ とする．ある $b > 0$ に対して，式 (3.50) が成り立つと仮定する．このとき，十分小さい全ての $a > 0$ に対し，$\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ は，$\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ と $\mathcal{L}_{-r}^2(\mathbb{R}^d)(|r| \le |s|)$ に関する Banach フレームであり原子の集合ともなる．

証明　$|r| \le |s|$ を固定する．定理 3.47 により，集合 $\{e_{mb}\tau_{na}g\}$ は任意の $a, b > 0$ に対して，$\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Bessel 列となる．定理 3.32 より，S が $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ の位相同形写像であることを示せば十分．これは 定理 3.48 と Neumann 級数の議論 (定理 3.2 の証明と 式 (3.9) 参照)．特に，a を十分小さくとって，式 (3.51) により，

$$\frac{B - A + \tilde{C}(a, |s|)}{B + A} < 1$$

が成り立つようにすると，式 (3.52) より

$$\left\| I - \frac{2a^d}{B + A} S \right\| < 1$$

を得る．なお，上式では S を $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素と考えている．従って，

$$S^{-1} = \frac{2a^d}{B + A} \sum_{k=0}^{\infty} \left(I - \frac{2a^d}{B + A} S \right)^k$$

この和は $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ の有界部分集合上一様に収束する．従って，S は $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ の位相同形写像である．また，定理 3.32 より，$\{\varphi_{m,n}\}$ は $\mathcal{L}_r^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Banach フレームであり，また原子の集合となる．∎

3.8　平行移動のフレーム

平行移動は Gabor 系とウェーブレット系の両方に共通の幾何学的な側面である．定理 3.56 では整数成分の平行移動の列がいつフレームを生成するかを，有界性条件の言葉で特徴付ける．これは，定理 3.16 で与えた Zak 変換によるフレームの特徴付けを思い出させる．整数成分平行移動の正規直交基底と完全フレームのより簡単な特徴付けは，順に定理 3.50 と 3.51 で証明されている．

$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に関しては，周期関数

$$\Phi(\gamma) \equiv \sum |\hat{\varphi}(\gamma + m)|^2$$

を考察しようと思う．ここで，和は $\mathbb{Z}^d$ 上をわたる．明らかに，Beppo Levi と Plancherel の定理より $\Phi \in L^1(\mathbb{T}^d)$．

定理 3.50　$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$V \equiv \overline{\mathrm{Span}}\left\{\tau_k\varphi\colon k \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間とする．$\{\tau_k\varphi\}$ が V の正規直交基底であるための必要十分条件は，ほとんど至る所 $\Phi = 1$．

証明　正規直交性が，ほとんど至る所 $\Phi = 1$ なる条件と同値であることを示せば十分．これは，ほとんど至る所 $\Phi = 1$ となるための必要十分条件は Fourier 係数が $k = 0$ の所 (ここでは Fourier 係数は 1) を除いて全て 0 となることであるという事実と，以下の計算からの帰結である．

$$\begin{aligned}\int \varphi(t)\overline{\varphi(t-k)}\,dt &= \int |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 e^{2\pi i k\cdot\gamma}\,d\gamma \\ &= \sum_n \int_{\mathbb{T}^d} |\hat{\varphi}(\gamma+n)|^2 e^{2\pi i k\cdot\gamma}\,d\gamma = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\gamma) e^{2\pi i k\cdot\gamma}\,d\gamma \qquad (3.53)\end{aligned}$$

▮

定理 3.51　$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$V \equiv \overline{\mathrm{Span}}\left\{\tau_k\varphi\colon k \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間とする．$\{\tau_k\varphi\}$ が V の完全フレームであるための必要十分条件は

$$\text{ある } A, B > 0 \text{ が存在して，ほとんど至る所 } A \leq \Phi(\gamma) \leq B \qquad (3.54)$$

が成り立つことである．

証明　3.3 節で $\{\tau_k\varphi\}$ が完全フレームであるための必要十分条件は有界無条件基底であることだった．つまり，ある $A, B > 0$ が存在して全ての$\left\{c_n\colon n \in F \subseteq \mathbb{Z}^d\right\} \subseteq \mathbb{C}$ に対して，

$$A\sum_{n\in F}|c_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in F} c_n\tau_n\varphi\right\|_2^2 \leq B\sum_{n\in F}|c_n|^2 \qquad (3.55)$$

となることであった．ここで F は有限集合．また，式 (3.53) と同様の計算をすると，$L^2(\mathbb{R}^d)$ に関する Plancherel の定理 によって

$$\left\|\sum_{n\in F} c_n\tau_n\varphi\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma \qquad (3.56)$$

と書くことができる．ここで，$\Theta(\gamma) \equiv \sum_{n\in F} c_n e^{-2\pi i n\cdot\gamma}$．もし，式 (3.54) が成り立つなら 式 (3.55) は $L^2(\mathbb{T}^d)$ 上の Plancherel の定理によって 式 (3.56) からでる．

逆に，$\{\tau_k\varphi\}$ が V の完全フレームとする，すなわち，式 (3.55) が成り立つと仮定する．もし，$f=\sum_{n\in F} c_n\tau_n\varphi\in V$ かつ $\Theta(\gamma)=\sum_{n\in F} c_n e^{-2\pi in\cdot\gamma}$ なら，

$$\|f\|_2^2=\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

それゆえ，$\|\Theta\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2=\sum_{n\in F}|c_n|^2$ と 式 (3.55) が成り立つので，ほとんど至る所 $A\le\Phi(\gamma)\le B$ と主張することができる．実際，もし，集合 E ($|E|>0$) 上 $\Phi(\gamma)<A$ なら E 上に「集中した」多項式 Θ が存在して $\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2(\Phi(\gamma)-A)\,d\gamma<0$ となる．これが欲しかった矛盾である． ∎

Φ を用いたフレームの特徴付け定理 3.56 は [BeLi] で進展した一般的なプログラムの一部である．この特徴付けと [BeLi] における証明では，次の補題達も利用されている．このうちの 2, 3 はそれ自身で面白い．

補題 3.52 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$V\equiv\overline{\mathrm{Span}}\left\{\tau_k\varphi\colon k\in\mathbb{Z}^d\right\}$$

が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間とする．フレーム条件を考えると，

$$A\|f\|_2^2\le\sum|\langle f,\tau_k\varphi\rangle|^2\le B\|f\|_2^2 \tag{3.57}$$

が成り立つ．各 $f\in V$ に対して 式 (3.57) が成り立つための必要十分条件は各 $f\in\mathrm{Span}\,\{\tau_k\varphi\}$ に対して 式 (3.57) が成り立つことである．

証明 全ての $f\in V$ に対して，式 (3.57) が成り立つなら，全ての $f\in\mathrm{Span}\,\{\tau_k\varphi\}$ に対しても正しい．逆に，式 (3.57) が $\mathrm{Span}\,\{\tau_k\varphi\}$ に対して正しいと仮定する．$f\in V$ とし，$\{f_n\}\subseteq\mathrm{Span}\,\{\tau_k\varphi\}$ に関して，

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_2=0$$

とする．

(a) 逆向きの証明を始めるにあたって，

$$\lim_{n\to\infty}|\langle f_n,\tau_k\varphi\rangle|^2=|\langle f,\tau_k\varphi\rangle|^2 \tag{3.58}$$

が成り立つことに注意する．なぜなら，

$$\begin{aligned}||\langle f_n,\tau_k\varphi\rangle||^2-|\langle f,\tau_k\varphi\rangle|^2 &\le \|\varphi\|_2(\|f_n\|_2+\|f\|_2)|\langle f_n-f,\tau_k\varphi\rangle|\\ &\le \|\varphi\|_2^2(\|f_n\|_2+\|f\|_2)\|f_n-f\|_2\end{aligned}$$

式 (3.58) と Fatou の補題を上の二つの和に適用すると，Span $\{\tau_k\varphi\}$ に関する 式 (3.57) の右辺によって次を得る．

$$\begin{aligned}\sum |\langle f, \tau_k\varphi\rangle|^2 &\leq \liminf_{n\to\infty} \sum_k |\langle f_n, \tau_k\varphi\rangle|^2 \\ &\leq B \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2 = B\|f\|_2^2\end{aligned}$$

よって，V に関する 式 (3.57) が成り立つ．

(b) f に関する 式 (3.57) の 1 番目の不等式を証明するために，任意の n に対して，三角不等式より，

$$\left(\sum |\langle f, \tau_k\varphi\rangle|^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_k |\langle f_n, \tau_k\varphi\rangle|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_k |\langle f_n - f, \tau_k\varphi\rangle|^2\right)^{1/2}$$

を得る．f_n に関する仮定より 式 (3.57) の下からの評価が成り立ち，**(a)** により全ての f に対して上からの評価が成り立つので，

$$\left(\sum |\langle f, \tau_k\varphi\rangle|^2\right)^{1/2} \geq A^{1/2}\|f_n\|_2 - B^{1/2}\|f_n - f\|_2$$

を得る．右辺で $n \to \infty$ とすると 式 (3.57) の最初の不等号が出る．

∎

補題 3.53　$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，与えられた有限集合 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ に対して，$f \equiv \sum_{k\in F} c_k\tau_k\varphi$, $\Theta_F(\gamma) \equiv \sum_{k\in F} c_k e^{-2\pi ik\cdot\gamma}$ と定義する．この時 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\Theta_F \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ であり，

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta_F(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\, d\gamma < \infty \tag{3.59}$$

証明　直接計算すると，

$$\|f\|_2^2 = \sum_{m\in F}\sum_{n\in F} c_m\overline{c_n} \sum_k \int_{\mathbb{T}^d} |\hat{\varphi}(\gamma + k)|^2 e^{-2\pi i(m-n)\cdot\gamma}\, d\gamma \tag{3.60}$$

を得る．優収束定理と $\Phi \in L^1(\mathbb{T}^d)$ なる事実を用いると， 式 (3.60) で，「$\sum_k \int_{\mathbb{T}^d} = \int_{\mathbb{T}^d} \sum_k$」と書ける．よって， 式 (3.59) が出る．∎

補題 3.54　$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，与えられた有限集合 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ に対し，$f \equiv \sum_{k\in F} c_k\tau_k\varphi$, $\Theta_F(\gamma) \equiv \sum_{k\in F} c_k e^{-2\pi ik\cdot\gamma}$ と定義する．$\Phi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ と仮定する．この時 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，$\Theta_F \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ であり，

$$\sum |\langle f, \tau_k\varphi\rangle|^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta_F(\gamma)|^2\Phi(\gamma)^2\, d\gamma < \infty \tag{3.61}$$

証明

(a) 直接計算することにより，

$$\sum_{k\in K}|\langle f,\tau_k\varphi\rangle|^2 = \sum_{m\in F}\sum_{n\in F}c_m\overline{c_n}\int|\hat{\varphi}(\gamma)|^2e^{-2\pi im\cdot\gamma} \times \left(\int|\hat{\varphi}(\lambda)|^2e^{2\pi in\cdot\lambda}\sum_{k\in K}e^{2\pi ik\cdot(\gamma-\lambda)}\,d\lambda\right)d\gamma \qquad (3.62)$$

ここで，$K\subseteq\mathbb{Z}^d$ は有限集合．さて，

$$K=\prod_{j=1}^{d}[-K_j,K_j]\subseteq\mathbb{Z}^d$$

のとき，d-次元 Dirichlet 核

$$D_K(\gamma)=\prod_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=-K_j}^{K_j}(e^{2\pi i\gamma_j})^k\right)$$

を定義する．このとき，初等的な計算により以下を得る．

$$D_K(\gamma)=\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin\pi(2K_j+1)\gamma_j}{\sin\pi\gamma_j}$$

$D_K(0)=\prod_{j=1}^{d}(2K_j+1)=\|D_K\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}$, $\int_{\mathbb{T}^d}D_K(\gamma)\,d\gamma=1$,

$$D_K(\gamma-\lambda)=\sum_{k\in K}e^{2\pi ik\cdot(\gamma-\lambda)}$$

それゆえ，この K に対して， 式 (3.62) は以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K}|\langle f,\tau_k\varphi\rangle|^2 &= \sum_{m\in F}\sum_{n\in F}c_m\overline{c_n}\int|\hat{\varphi}(\gamma)|^2e^{-2\pi im\cdot\gamma}\\ &\quad\times\left(\int|\hat{\varphi}(\lambda)|^2e^{2\pi in\cdot\lambda}D_K(\gamma-\lambda)\,d\lambda\right)d\gamma\\ &= \sum_{m\in F}\sum_{n\in F}c_m\overline{c_n}\int|\hat{\varphi}(\gamma)|^2e^{-2\pi im\cdot\gamma}\\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(\lambda)e^{2\pi in\cdot\lambda}D_K(\gamma-\lambda)\,d\lambda\right)d\gamma \qquad (3.63)\end{aligned}$$

ここで 2 番目の等号は優収束定理からの帰結である．

(b)

$$\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(\lambda)e^{2\pi in\cdot\lambda}D_K(\gamma-\lambda)\,d\lambda=S_K(\Phi e_n)(\gamma)\equiv\sum_{k\in K}(\Phi e_n)^\wedge[k]e^{-2\pi ik\cdot\gamma}$$

に注意する．ここで，

$$(\Phi e_n)^\wedge[k] \equiv \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\lambda) e^{2\pi i n\cdot\lambda} e^{2\pi i k\cdot\lambda}\, d\lambda$$

よって，式 (3.63) は

$$\sum_{k\in K} |\langle f, \tau_k\varphi\rangle|^2 = \sum_{m\in F}\sum_{n\in F} c_m \overline{c_n} \int |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 e^{-2\pi i m\cdot\gamma} S_K(\Phi e_n)(\gamma)\, d\gamma \tag{3.64}$$

と書き直せる．e_{-m} と $S_K(\Phi e_n)$ の周期性を用いた優級数の議論と，$D_K(0)\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}$ による $S_K(\Phi e_n)$ の有界性，及び $\Phi \in L^1(\mathbb{T}^d)$ なる事実を利用すると，

$$\int |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 e^{-2\pi i m\cdot\gamma} S_K(\Phi e_n)(\gamma)\, d\gamma = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\gamma) e^{-2\pi i m\cdot\gamma} S_K(\Phi e_n)(\gamma)\, d\gamma \tag{3.65}$$

が証明できる．

(c) 簡単のため，$K_1 = \cdots = K_d$ とする．すると，

$$\lim_{K_1\to\infty} \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\gamma) e^{-2\pi i m\cdot\gamma} S_K(\Phi e_n)(\gamma)\, d\gamma = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\gamma)^2 e^{-2\pi i (m-n)\cdot\gamma}\, d\gamma \tag{3.66}$$

が成り立つことに注意．実際，$\Phi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ であり，また，

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{T}^d} \Phi(\gamma) e^{-2\pi i m\cdot\gamma} (S_K(\Phi e_n)(\gamma) - \Phi(\gamma) e_n(\gamma))\, d\gamma \right| \\ &\quad \le \ \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \|S_k(\Phi e_n) - \Phi e_n\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \end{aligned}$$

なので右辺は存在する．Plancherel の定理より $K_1 \to \infty$ とすると不等式の右辺は 0 にいく．

式 (3.61) は 式 (3.64)，式 (3.65)，式 (3.66) を組み合わせた結果出る． ∎

補題 3.55　$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$V \equiv \overline{\mathrm{Span}} \left\{ \tau_k\varphi : k \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

を $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間とする．$\Phi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ と仮定する．列 $\{\tau_k\varphi\}$ が V に関するフレーム限界 A, B のフレームであるための必要十分条件は，正の定数 A と B が存在し，任意の $\mathbb{T}^d$ 上の三角多項式

$$\Theta(\gamma) \equiv \Theta_F(\gamma) \equiv \sum_{k\in F} c_k e^{-2\pi i k\cdot\gamma}$$

に対し，以下の不等式が成り立つことである．

$$A \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2 \Phi(\gamma)\, d\gamma \le \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2 \Phi(\gamma)^2\, d\gamma \le B \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2 \Phi(\gamma)\, d\gamma < \infty \tag{3.67}$$

証明　($\Rightarrow$) 与えられた $\Theta \equiv \Theta_F$ に対して，$f(t) \equiv \sum_{k\in F} c_k \tau_k\varphi \in V$ と定義する．補題 3.53

により，

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2 \Phi(\gamma)\, d\gamma; \tag{3.68}$$

となる．また 補題 3.54 により，

$$\sum |\langle f, \tau_k \varphi\rangle|^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |\Theta(\gamma)|^2 \Phi(\gamma)^2\, d\gamma \tag{3.69}$$

が成り立つ．仮定により，

$$\begin{gathered} \text{すべての } h \in V \text{に対して} \\ A\|h\|_2^2 \le \sum |\langle h, \tau_k \varphi\rangle|^2 \le B\|h\|_2^2 < \infty \\ \text{が成立するような } A, B > 0 \text{ が存在する} \end{gathered} \tag{3.70}$$

式 (3.70) で $h = f$ とした場合に， 式 (3.68) と 式 (3.69) を代入すると 式 (3.67) が出る．

(⇐) 式 (3.67) が任意の三角多項式$\Theta = \Theta_F$ に対して成り立つと仮定する．補題 3.53 と補題 3.54 から，

$$\text{全ての } f \in \operatorname{Span}\{\tau_k\varphi\} \text{ に対して}, A\|f\|_2^2 \le \sum |\langle f, \tau_k \varphi\rangle|^2 \le B\|f\|_2^2$$

が得られる．補題 3.52 から結果が従う． ∎

定理 3.56 (BeLi) $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$V \equiv \overline{\operatorname{Span}} \left\{\tau_k\varphi : k \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

が $L^2(\mathbb{R}^d)$ の閉部分空間とする．列 $\{\tau_k\varphi\}$ が V のフレームであるための必要十分条件は，正定数 A と B が存在して，

$$\mathbb{T}^d \setminus N \text{上，ほとんど至る所 } A \le \Phi(\gamma) \le B \tag{3.71}$$

である．ここで $N \equiv \left\{\gamma \in \mathbb{T}^d : \Phi(\gamma) = 0\right\}$.

集合 N の定義には測度 0 の集合の曖昧さがあり，N によって代表される同値類の要素は，Φ によって代表される $L^2(\mathbb{T}^d)$ 内の同値類の任意の要素の零集合によって与えられることに注意する．

証明 (⇐) 式 (3.71) を仮定し，

$$\Theta(\gamma) \equiv \Theta_F(\gamma) \equiv \sum_{k\in F} c_k e^{-2\pi i k\cdot\gamma}$$

を $\mathbb{T}^d$ 上の三角多項式とする．これから，補題 3.55 の 不等式 (3.67) を証明する．

$$\begin{aligned} A\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma &= A\int_{\mathbb{T}^d\setminus N}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma \\ &\le \int_{\mathbb{T}^d\setminus N}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)^2\,d\gamma = \int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)^2\,d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{T}^d\setminus N}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)^2\,d\gamma \le B\int_{\mathbb{T}^d\setminus N}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma \\ &= B\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma \end{aligned}$$

なお，上の二つの不等号は 式 (3.71) から従う．

(⇒) **a.** $E\subseteq\mathbb{T}^d\setminus N$ 上，$\Phi(\gamma)<A$ と仮定する．ここで $|E|>0$． 式 (3.67) の最初の不等式に対する矛盾を導くことにする．この結果，補題 3.55 によって，$\{\tau_k\varphi\}$ は V のフレームではない．$E\subseteq\mathbb{T}^d\setminus N$　($|E|>0$) 上$\Phi(\gamma)>B$ と仮定すると 式 (3.67) の 2 番目の不等式でも同様の矛盾が起こる．

b. Φ についての仮定より$\Theta\in L^\infty(\mathbb{T}^d)\subseteq L^2(\mathbb{T}^d)$ を E 外で $\Theta=0$, E 上で $|\Theta|>0$，さらに

$$A\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)\,d\gamma > \int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)^2\,d\gamma$$

となるように選べる．例えば，$\Theta\equiv\mathbf{1}_E$ とすればよい．これより，

$$p\equiv\int_{\mathbb{T}^d}|\Theta(\gamma)|^2(A\Phi(\gamma)-\Phi(\gamma)^2)\,d\gamma>0 \tag{3.72}$$

今から，Θ を Ψ に置き変えても 式 (3.72) が成り立つような三角多項式 Ψ を見つける．これは， 式 (3.67) の最初の不等式に反し，欲しかった矛盾が得られたこととなる．仮に，$\Phi\in L^2(\mathbb{T}^d)\setminus L^\infty(\mathbb{T}^d)$ であっても， 式 (3.72) は$\Theta\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ に対して成り立つ; Ψ を選ぶ手続き上，先天的に $\Phi\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ が要求される訳ではない．

c. 任意の $\Psi\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ (ここでも $\Phi\in L^2(\mathbb{T}^d)$ のみ仮定) に対して，

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^d}|\Psi(\gamma)|^2(A\Phi(\gamma)-\Phi(\gamma)^2)\,d\gamma \\ &\quad= \int_{\mathbb{T}^d\setminus E}|\Psi(\gamma)|^2(A\Phi(\gamma)-\Phi(\gamma)^2)\,d\gamma \\ &\quad\quad+\int_E|\Psi(\gamma)-\Theta(\gamma)+\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma \end{aligned} \tag{3.73}$$

を得る．E 上 $A-\Phi>0$ かつ $\mathbb{T}^d\setminus N$ 上ほとんど至るところ $\Phi>0$ なので，E 上ほとんど至るところ $\Phi(A-\Phi)>0$ となる．そこで，$\Phi(A-\Phi)$ を E 上の重み付き L^2 空間の重みとみなすことにする．よって $\Theta,\Psi\in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ のとき以下を得る．

$$\left(\int_E|\Psi(\gamma)-\Theta(\gamma)+\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma\right)^{1/2}$$

$$\geq \left(\int_E |\Psi(\gamma)-\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma\right)^{1/2} - \left(\int_E |\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma\right)^{1/2} \tag{3.74}$$

式 (3.73) と 式 (3.74) を組みあわせて，簡単な計算をすると

$$\int_{\mathbb{T}^d} |\Psi(\gamma)|^2(A\Phi(\gamma)-\Phi(\gamma)^2)\,d\gamma \geq p - 2p^{1/2}\left(\int_E |\Psi(\gamma)-\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma\right)^{1/2} \tag{3.75}$$

を得る．

d. 三角多項式は $L^2(\mathbb{T}^d)$ で稠密なので，三角多項式 Ψ を

$$\|\Psi-\Theta\|_{L^2(E)} \leq \|\Psi-\Theta\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \frac{p^{1/2}}{4\|\Phi(A-\Phi)\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}}$$

となるように選ぶことができる．それゆえ，

$$2p^{1/2}\left(\int_E |\Psi(\gamma)-\Theta(\gamma)|^2\Phi(\gamma)(A-\Phi(\gamma))\,d\gamma\right)^{1/2} < \frac{p}{2};$$

よって 式 (3.75) から

$$\int_{\mathbb{T}^d} |\Psi(\gamma)|^2(A\Phi(\gamma)-\Phi(\gamma)^2)\,d\gamma > \frac{p}{2} > 0$$

∎

注意 3.57　$\mathbb{R}$ 上 $\varphi = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[-1,2)}$ とする; 特に，$\{\tau_k\varphi\}$ は直交していない．容易にわかるとおり

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{9}e^{2\pi i\gamma}[1+2e^{-2\pi i\gamma}+3e^{-2\pi i(2\gamma)}+2e^{-2\pi i(3\gamma)}+e^{-2\pi i(4\gamma)}]$$

は三角多項式で，計算すると重根を二つ持つことがすぐわかる．よって $\{\tau_k\varphi\}$ は $V \equiv \overline{\mathrm{Span}}\,\{\tau_k\varphi\}$ のフレームでない．この関数 φ は多重解像度解析の理論における方形反射フィルター (quadrature mirror filter) $H(\gamma)=\sqrt{2}e^{-\pi i\gamma}\cos 3\pi\gamma$ によって生成される．例えば，[M]，[Me] を見よ．[BeLi] には定理 3.56 に基づいたフィルター設計の発展のようすが書かれている．[L] も参照．

3.9　L^1 の Gabor 分解と Fourier 変換

この節では，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ の Gabor 分解を証明しようと思う．我々の結果，定理 3.61，は有界可測関数 g の自己相関の概念を必要とした．定理 3.61 の離散版が可能であるにもかかわらず，ここでの分解は連続 Gabor 変換の言葉で書かれている．この設定では，Gabor 変換は

$g \equiv 1$ のとき普通の Fourier 変換に還元される．また，この場合定理 3.61 は Fourier 変換のいつもの L^1-逆変換公式になる．

定義 3.58　**(a)** $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とし $c \in \mathbb{R}$ とする．g の (コーヒーレント状態の) **Gabor** あるいは **Weyl–Heisenberg** 系とは，関数の族

$$\varphi_{\gamma,x}(t) \equiv \varphi_g(t; x, \gamma) = e^{-2\pi i c x\cdot\gamma}(e_\gamma \tau_x g)(t),\ (x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d$$

のこととする．Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ の定義 (定義 3.10b) を参照．

(b) 与えられた Gabor コーヒーレント状態φ_g に対して，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の (連続) **Gabor** 変換は形式的に $\mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d$ 上

$$W_g(f)(x,\gamma) = \int f(t)\overline{\varphi_g}(t; x, \gamma)\, dt$$

として定義される．W_g を 注意 3.34 で定義された関数 V_g と比べてみるべきであろう．$V_g(f)$ は

$$\text{全ての } h \in \mathbb{H}^d \text{に対し}, (V_g f)(h) = \int f(t)\bar{z}e^{2\pi i x\cdot\gamma}\overline{(e_\gamma \tau_x g)(t)}\, dt$$

なる形をしている．従って，W_g と向かい合わせると，$c = 1$ でありトーラス成分 $\bar{z}$ があることがわかる．

定義 3.59　$g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし，

$$\text{全ての } T > 0 \text{ に対し}, P_T(t) = \frac{1}{|B(T)|}\int_{B(T)} g(t+x)\overline{g(x)}\, dx$$

と定義する．ここで $B(T) \subseteq \mathbb{R}^d$ は $0 \in \mathbb{R}^d$ を中心とする半径 T の球体．常に正である連続関数 P で，$P(0) > 0$，かつ，各点ごとに $\mathbb{R}^d$ 上 $\lim_{T\to\infty} P_T = P$ となる関数が存在すると仮定する．このとき $P \equiv P_g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ を g の**自己相関**といい，有界な正の測度 $\check{P}$ を g の**パワースペクトル**という．これらの概念は，スペクトル評価や Wiener の「一般調和解析」との関連で，$\mathbb{R}^d$ 上の場合の研究が [Be2],[Be3] においてなされている．

定理 3.60 と 定理 3.61 での我々の目的は $L^1(\mathbb{R}^d)$ の積分表示を Gabor 変換の言葉で与えることである．この目的のために $\{\rho_n\} \subseteq L^1(\hat{\mathbb{R}}^d)$ が次の性質を持つと仮定する．

$\{\check{\rho}_n\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 (identity) を $L^1(\mathbb{R}^d)$ 近似する．即ち，$\int \check{\rho}_n(t)\, dt = 1$ かつ $\sup_n \|\check{\rho}_n\|_1 < \infty$ かつ

$$\text{全ての } T > 0 \text{ に対し}，\lim_{n\to\infty}\int_{B(T)^\sim} |\check{\rho}_n(t)|\, dt = 0$$

定理 3.60 (Be1) $g \in (L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)) \setminus \{0\}$ とし，対応する Gabor 系 $\{\varphi_{\gamma,x}: (x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}^d}\}$ と Gabor 変換 W_g を考える．このとき，各 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，$L^1(\mathbb{R}^d)$ ノルムで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|g\|_2^2} \iint W_g(f)\varphi_g(t;x,\gamma)\rho_n(\gamma)\,dx\,d\gamma = f(t)$$

定理 3.60 の証明は省略する．定理 3.61 の証明と同様に，しかもより簡単にできる．定理 3.61 の証明は与える．

定理 3.61 (Be1) $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ とし，対応する Gabor 系 $\left\{\varphi_{\gamma,x}: (x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}^d}\right\}$ と Gabor 変換 W_g を考える．g は自己相関 P_g を持つと仮定する．このとき，各 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

ここで

$$f_n(t) = \frac{1}{P(0)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{|B(T)|} \iint_{B(T)} W_g(f)(x,\gamma)\varphi_g(t;x,\gamma)\rho_n(\gamma)\,dx\,d\gamma$$

証明 $d = 1$ の場合の結果を証明することにする．$\mathbb{R}^d$への一般化は，球体 $B(T)$ を原点を中心とする立体へ置き換えた場合には，我々の行う置換によって直ちに出る．球体内にある立方体の中への球体の埋め込みは 定理 3.61 の仮定を与えれば正当化され，従って，先程述べた結果が得られる．$\{B(T): T > 0\}$ を直接扱う証明は，[Be2] で開発された手法を用いることにより得られる．

最初に，計算から次式を得る．

$$\frac{1}{2T} \iint_{-T}^{T} W_g(f)(x,\gamma)\varphi_g(t;x,\gamma)\rho_n(\gamma)\,dx\,d\gamma = \int f(t-u)\check{\rho}_n(u)P_T(t,u)\,du \tag{3.76}$$

ここで

$$P_T(t,u) \equiv \frac{1}{2T} \int_{-T+(t-u)}^{T+(t-u)} g(s+u)\overline{g(s)}\,ds$$

また，

$$\frac{1}{2T} \iiint_{-T}^{T} |f(v)|\,|\rho_n(\gamma)|\,|g(v-x)g(t-x)|\,dx\,d\gamma\,dv \le \|g\|_\infty^2 \|f\|_1 \|\rho_n\|_1 < \infty$$

なので， 式 (3.76) を確かめるために Fubini の定理を使うことができる．

次に，以下の評価を行う．

$$\begin{aligned}
&\int \left| P_g(0)f(t) - \int f(t-u)\check{\rho}_n(u)P_T(t,u)\,du \right| dt \\
&\quad \le \int |\check{\rho}_n(u)| \left(\int |P_g(0)f(t) - P_T(t,u)f(t-u)|\,dt \right) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le \int |\breve{\rho}_n(u)|\left(\int |P_T(t,u)|\,|f(t)-f(t-u)\,dt\right)|\,du\\&\quad+\int |\breve{\rho}_n(u)|\left(\int |f(t)|\,|P_g(0)-P_T(t,u)|\,dt\right)du\\&\equiv I_1(n,T)+I_2(n,T)\end{aligned}\tag{3.77}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{T>0} I_1(n,T)=0 \tag{3.78}$$

であることに注意．

実際，

$$I_1(n,T)\le \|g\|_\infty^2\int |\breve{\rho}_n(u)|\,\|f-\tau_u f\|_1\,du$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\int |\breve{\rho}_n(u)|\,\|f-\tau_u f\|_1\,du=0$$

である．ここで，$\{\breve{\rho}_n\}$ が 1(identity) の $L^1(\mathbb{R})$ 近似であり ($\int \breve{\rho}_n(u)\,du=1$ なる性質は使っていない)，また $\|f-\tau_u f\|_1$ が有界連続関数であることを用いた．

$I_2(n,T)$ を評価するために，まず，計算すると次の式を得る．

$$\lim_{T\to\infty}\int |\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_T(t,u)|\,du=\int |\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_g(u)|\,du$$

ここで優収束定理を用いている．この定理が適用できるのは，各 $t,u\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{T\to\infty} P_T(t,u)=P_g(u)$$

かつ

$$|\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_T(t,u)|\le 2\|g\|_\infty^2|\breve{\rho}_n(u)|\in L^1(\mathbb{R})$$

だからである．結局，

$$|f(t)|\int |\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_T(t,u)|\,du\le 2\|g\|_\infty^2(\sup\|\breve{\rho}_n\|_1)|f(t)|\in L^1(\mathbb{R}) \tag{3.79}$$

なので，優収束定理が再び適用でき，計算すると，

$$\lim_{T\to\infty} I_2(n,T)=\int |f(t)|\left(\int |\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_g(u)|\,du\right)dt$$

$\{\breve{\rho}_n\}$ が 1(identity) の $L^1(\mathbb{R})$ 近似であり，また $|P_g(0)-P_g(u)|$ が有界連続関数なので，以上より

$$\lim_{n\to\infty}\int |\breve{\rho}_n(u)|\,|P_g(0)-P_g(u)|\,du=0$$

を得る．従って，もう一度優収束定理を使うことができ， 式 (3.79) で P_g を P_T に置き換えたものを用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty} I_2(n,T) = 0 \tag{3.80}$$

を得る． 式 (3.76) を 式 (3.77) の左辺と置き換え， 式 (3.78) と 式 (3.80) を 式 (3.77) の右辺と置き換えることによって，望むべき結果を得る． ∎

注意 3.62　もし，φ_g の定義の中で $g \equiv 1$，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，$c = 0$ とすると，$(x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \hat{\mathbb{R}}^d$ に対して，$W_1(f)(x,\gamma) = \hat{f}(\gamma)$ となる．この場合，定理 3.61 は $f * \check{\rho}_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ でなく，

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t) - \int \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i t\cdot\gamma}\rho_n(\gamma)\, d\gamma\|_1 = 0$$

を主張している．例えば，[Be1] を見よ．

謝辞　著者 2 名とも，この章の多くの話題に関し Christopher Heil 博士から専門知識を提供していただいたことに対して感謝の意を表したいと思います．

参考文献

[AT] L. Auslander and R. Tolimieri. 1979. "Radar ambiguity functions and group theory," *SIAM J. Math. Anal.* **1**: 847–897.
signal ou en mécanique quantique," *C. R. Acad. Sci., Paris* **292**: 1357–1362.

[Ba] N. Bari. 1951. "Biorthogonal systems and bases in Hilbert space," *Učen Zap. Mosk. Gos. Univ. 148, Mat.* **4**: 69–107.

[Bat1] G. Battle. 1988. "Heisenberg proof of the Balian-Low theorem," *Lett. Math. Phys.* **15**: 175–177.

[Bat2] G. Battle. 1989. "Phase space localization theorem for ondelettes," *J. Math. Phys.* **30**: 2195–2196.

[Be1] J. Benedetto. 1989. "Gabor representations and wavelets," *Amer. Math. Soc. Contemp. Math.* **91**: 9–27.

[Be2] J. Benedetto. 1991. "A multidimensional Wiener–Wintner theorem and spectrum estimation," *Trans. Amer. Math. Soc.* **327**: 833–852.

[Be3] J. Benedetto. 1991. "The spherical Wiener–Plancherel formula and spectral estimation," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 1110–1130.

[Be4] J. Benedetto. 1992. "Stationary frames and spectral estimation," *NATO–ASI–1991, Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis*, J. Byrnes, ed. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp.117–161.

[Be5] J. Benedetto. 1993. "Frame decompositions, sampling, and uncertainty principle inequalities," this volume, Chap. 7.

[BeHW] J. Benedetto, C. Heil, and D. Walnut. "Remarks on the proof of the Balian–Low theorem, " *Ann. Scu. Norm. Sup., Pisa*, to appear.

[BeLi] J. Benedetto and S. Li. "The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter design," Preprint.

[BeuMa1] A. Beurling and P. Malliavin. 1962. "On Fourier transforms of measures with compact support," *Acta Math.* **107**: 291–309.

[BeuMa2] A. Beurling and P. Malliavin. 1967. "On the closure of characters and the zeros of entire functions," *Acta Math.* **118**: 79–93.

[CRo] R. Coifman and R. Rochberg. 1980. "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions," *Astérisque* **77**: 11–65.

[D1] I. Daubechies. 1990. "The wavelet transform, time–frequency localization, and signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory* **36**: 961–1005.

[D2] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[DGroMe] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. 1986. "Painless nonorthogonal expansions," *J. Math. Phys.* **27**: 1271–1283.

[DJaJo] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journé. 1991. A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 554–572.

[DJan] I. Daubechies and A. Janssen. "Two theorems on lattice expansions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, to appear.

[DuSc] R. Duffin and A. Schaeffer. 1952. "A class of nonharmonic Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**: 341–366.

[F1] H. Feichtinger. 1980. "Banach convolution algebras of Wiener type," *Functions, Series, Operators*, Proc. Conf. **38** Budapest: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, pp. 509–524.

[F2] H. Feichtinger. 1989. "Atomic decompositions of modulation spaces," *Rocky Mountain J. Math.* **19**: 113–126.

[FGr1] H. Feichtinger and K. Gröchenig. 1988. "A unified approach to atomic decompositions through integrable group representations," *Function Spaces and Applications*, M. Cwikel et al., eds., Lect. Notes Math. **1302** Berlin: Springer-Verlag, pp. 52–73.

[FGr2] H. Feichtinger and K. Gröchenig. 1989. "Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, I," *J. Funct. Anal.* **86**: 307–340.

[FGr3] H. Feichtinger and K. Gröchenig. 1989. "Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, II," *Monat. fur Mat.* **108**: 129–148.

[FGrW] H. Feichtinger, K. Gröchenig, and D. Walnut. 1992. "Wilson bases in modulation spaces," *Math. Nachr.* **155**: 7–17.

[FrJaw] M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transform and decompositions of distribution spaces," *J. Funct. Anal.* **93**: 34–170.

[FrJawWe] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss. 1991. *Littlewood–Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS-NSF, Providence: Amer. Math. Soc.

[G] D. Gabor. 1946. "Theory of communications," *J. Inst. Elec. Eng. (London)* **93**: 429–457.

[GoGol] I. Gohberg and S. Goldberg. 1981. *Basic Operator Theory*, Boston: Birkhäuser.

[Gr] K. Gröchenig. 1991. "Describing functions: Atomic decompositions vs. frames," *Monat. fur Mat.* **112**: 1–41.

[GrW] K. Gröchenig and D. Walnut. 1992. "A Riesz basis for Bargmann–Fock space related to sampling and interpolation," *Arkiv. fur Mat.* **30**: 283–295.

[GroMoPa] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. 1985. "Transforms associated to square integrable group representations, I, General results," *J. Math. Phys.* **26**: 2473–2479.

[H] C. Heil. "Wiener amalgam spaces in generalized harmonic analysis and wavelet theory," Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, MD, 1990.

[HW] C. Heil and D. Walnut. 1989. "Continuous and discrete wavelet transforms," *SIAM Review* **31**: 628–666.

[He] H. Heuser. 1982. *Functional Analysis*, New York: John Wiley and Sons, Inc.

[Hö] L. Hörmander. 1983. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vols. I, II*, New York: Springer-Verlag.

[Hou] C. Houdré. 1993. "Wavelets, probability, and statistics: some bridges," this volume, Chap. 9.

[J] A. Janssen. 1988. "The Zak transform: a signal transform for sampled time-continuous signals," *Philips J. Res.* **43**: 23–69.

[K] Y. Katznelson. 1976. *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York: Dover Publications, Inc.

[K ö] G. Köthe. 1936. "Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilbertschen Raum," *Math. Zeit.* **41**: 137–152.

[L] W. Lawton. 1990. "Tight frames of compactly supported affine wavelets," *J. Math. Phys.* **31**: 1898–1901.

[Le] N. Levinson. 1940. *Gap and Density Theorems*, Colloq. Publ **26**, Providence: Amer. Math. Soc.

[Lo] F. Low. 1985. "Complete sets of wave packets," *A Passion for Physics—Essays in Honor of Geoffrey Chew*, C. DeTar et al., eds. Singapore: World Scientific, pp. 17–22.

[M] S. Mallat. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–87.

[Me] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et opérateurs*, vols. I, II, and III, Paris: Hermann.

[PWi] R. Paley and N. Wiener. 1940. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Colloq. Publ. **19**, Providence: Amer. Math. Soc.

[RRe] T. Rado and P. Reichelderfer. 1955. *Continuous Transformations in Analysis*, New York: Springer-Verlag.

[Ru] W. Rudin. 1973. *Functional Analysis*, New York: McGraw–Hill, Inc.

[S] L. Schwartz. 1966. *Théorie des distributions*, Paris: Hermann.

[St] E. Stein. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[StWe] E. Stein and G. Weiss. 1971. *An Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[V] G. Vitali. 1921. "Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali," *Atti R. Acad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **30**: 498–501.

[vo] J. von Neumann. 1932, 1949, and 1955. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[W1] D. Walnut. "Weyl–Heisenberg wavelet expansions: existence and stability in weighted spaces," Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, MD, 1989.

[W2] D. Walnut. 1992. "Continuity properties of the Gabor frame operator," *J. Math. Anal. Appl.* **165**: 479–504.

[W3] D. Walnut. 1993. "Lattice size estimates for Gabor decompositions," *Monat. fur Mat.*

[Y]　R. Young. 1980. "*An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*," New York: Academic Press.

第 4 章　伸張方程式とコンパクト台を持つウェーブレットの滑らかさ

Christopher Heil and David Colella

【概要】 与えられた滑らかさを持った，コンパクト台を持つウェーブレットの構成は，ウェーブレット理論の中で重要な問題である．この問題はスケーリング函数，すなわち，伸張 (dilation) 方程式 $f(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k f(2t-k)$ の，与えられた滑らかさを持つ解の構成に帰着される．この論文では，滑らかなコンパクト台を持つ全てのスケーリング函数が，伸張方程式の係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ から作られる二つの $N \times N$ 行列 T_0, T_1 の $\mathbb{C}^N$ の適当な部分空間上の結合スペクトル半径によって特徴付けられることを示す．すなわち，スケーリング函数が何階まで微分できるか，そして最高階の連続導函数の Hölder 指数の範囲が，結合スペクトル半径の値で決定されることを示す．この結果を説明するための数値解析例も述べられる．

4.1　導入

伸張方程式は，多重解像度解析と， $L^2(\mathbb{R})$ （－実軸上の二乗可積分函数の空間－）の直交ウェーブレット基底の構成と性質に対して決定的な役割を果たす． [BW2], [ColHe1], [ColHe3], [ColHe4], [DL1], [DL2], [E], [R1], [R2], [S], [V1], [V2], [W] 参照．これは伸張方程式とその解の研究が最近集中的に行われている理由の一つでもある．伸張方程式の他の分野への重要な応用，特に補間細分スキームへの応用もあるが，本章では扱われない．[CDaMi], [DeDu], [Du], [DyGLe], [DyLe], [MiP1], [MiP2] 参照．

多重解像度解析は本書の他の章で詳しく議論されるので，ここではくり返して述べない（例えば Strichartz による第 1 章あるいは [D1], [D2], [He], [M], [Me] を参照）．多重解像度解析はスケーリング函数 f，すなわち，伸張方程式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(2t-k) \tag{4.1}$$

の二乗可積分解 f を決定する．ここで係数 $\{c_k\}$ は二乗総和可能な実数または複素数である．このスケーリング函数によってウェーブレット

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_{1-k} f(2t-k) \tag{4.2}$$

が定まり，適当に g を正規化すれば $\{g_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$, $g_{n,k}(t)=2^{n/2}g(2^nt-k)$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなすようにできる．このように直交ウェーブレット基底は一つの $L^2(\mathbb{R})$ 函数を伸張，平行移動することによって得られるので，この基底の性質は対応するウェーブレットの性質から完全に決まってしまう．

多くの理由から直交ウェーブレット基底は興味深いが，一つの理由としては時間-周波数空間における局在化のよいウェーブレット g を見付けることができることが挙げられる．例えば本章では，有限個の係数を持つ伸張方程式から作られるウェーブレットのうちで，滑らかでコンパクト台を持つもの（－必然的にそのようなウェーブレットは時間空間でも局在化が良くフーリエ空間では減衰度が良い－）すべてが特徴付けられる．その上，このようなウェーブレットの滑らかさの完全な度合，すなわち何階まで微分できるか，そして最高階の連続導函数の Hölder 指数，が特徴付けられる． Daubechies と Lagarias [DL1]（4.7.1 節においても議論される）によって示されたように，コンパクト台を持つウェーブレットは決して無限回微分可能ではない．実軸 $\mathbb{R}$ 上の函数 h が Hölder 連続 とは，ある定数 α, Kが存在して $|h(x)-h(y)|\le K|x-y|^\alpha$ がすべての実数 $x,y\in\mathbb{R}$ に対して成り立つことである．ここで，α , K はそれぞれ **Hölder 指数**, **Hölder 定数**と呼ばれる．もし h が微分可能ならば $\alpha=1$ とできるが，逆は正しくない．

ウェーブレット g がコンパクト台を持つためには，方程式 (4.1) における係数 c_k のうちで 0 と異なるものの数が有限個であると仮定しなければならない．必要があればスケーリング函数 f を平行移動することにより，本章では以後，伸張方程式の形を

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N}c_kf(2t-k) \tag{4.3}$$

すなわち $k<0$ 又は $k>N$ に対しては $c_k=0$ と仮定してよい．方程式 (4.3) の二乗可積分なコンパクト台を持つ解を見い出すことが問題である．そのような解は必然的に可積分であり，以下で示すように可積分なコンパクト台を持つ解は,（もし存在すれば）定数倍を除いて一意的に定まり，区間 $[0,N]$ に台を持つ．もし fがそのようなコンパクト台を持つスケーリング函数であれば，ウェーブレット g は (4.2) より f から決まる有限和である．したがって g の滑らかさは対応するスケーリング函数 f の滑らかさによって完全に定まるので，以後本章では，ウェーブレットよりもコンパクト台を持つスケーリング函数の性質に焦点をあてよう．

多重解像度解析から導かれる伸張方程式 の形は特殊であり，特に次の二つの条件は満たされなければならない．

$$\sum_k c_{2k}=\sum_k c_{2k+1}=1 \tag{4.4}$$

$$\sum_k c_k \bar{c}_{k+2j} = \begin{cases} 2, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

実際は，この二つの条件は，多重解像度解析が存在するために必要なだけでなく，ほとんど十分な条件でもある．すなわち，係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ が (4.4), (4.5) を満たすならば，伸張方程式は可積分かつ二乗可積分な解 fを持つことが示され，もし，$\int f(t)\overline{f(t-k)}\,dt = 0$, $k \neq 0$ ならば f から多重解像度解析が構成できる（[M] 参照）．Lawton（[La] 参照）は次のことを示した．すなわち，任意の N に対して (4.4), (4.5) を満たす係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ のすべての集合の中で，ある測度 0 の集合を除いた集合に属する係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ に対してはその解 f は 式 (4.4), (4.5) を満たす．

以上の注意を簡単な例で見てみよう．$N = 1$, $c_0 = c_1 = 1$ とすれば，伸張方程式の形は

$$f(t) = f(2t) + f(2t-1)$$

となる．視察により，コンパクト台を持つ一つの解は $f = \chi_{[0,1)}$，つまり区間 $[0, 1)$ 上の特性函数である．この伸張方程式の係数は (4.4), (4.5) を満たし，また f は明らかに直交することに注意せよ．するとウェーブレット gは，

$$g(t) = f(2t) - f(2t-1) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t)$$

が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を生成することが期待され，そしてこの場合は正しい．このウェーブレット基底 $\{g_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ は Haar （[H] 参照）によってはじめて作られ，今日では Haar 系として知られている．Haar ウェーブレット g はコンパクト台を持つが，全く滑らかでない．滑らかなコンパクト台を持つウェーブレットは Daubechies（[D1] 参照）によってはじめて作られた．

等式 (4.4) と (4.5) は多重解像度解析の存在のためには必要である．しかし，これらの等式は伸張方程式の他の分野への応用の多くでは重要な意味をもたない．したがって我々は滑らかな，コンパクト台をもつスケーリング函数の特徴付けにおいて係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ に何らの制限をも課さないことにする．すなわち，多重解像度解析への応用を考慮することなく，伸張方程式の滑らかな，コンパクト台をもつすべての解を得ることにする．そのような解を構成する方法はいくつかあるが，その構成法のたいていは次の三つの方法の一つあるいはそれ以上の組み合わせと言うことができる．そなわち，カスケード・アルゴリズム，フーリエ変換そして二進補間法がそれである．この節の残りでこれらの方法の概略を手短かに述べよう．4.2 節で，フーリエ変換を用いる方法をいくらか詳しく述べ，本章の残り（4.3 節から 4.8 節まで）で二進補間法について詳しく述べたいと思う．4.7.2 節でカスケード・アルゴリズム の方法を若干述べる．

さて，カスケード・アルゴリズムは，スケーリング函数が，

$$Fh(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k h(2t-k)$$

によって定義される線形作用素 F の不動点であるという事実に基づいている．いつものように，不動点は，ある適当な出発点 h_0 （典型的には $h_0 = \chi_{[0,1]}$ ）に作用素 F を繰り返し作用させて，あるいは,「カスケード」することによって得られる．つまり， $h_n = Fh_{n-1}$ によって定義される函数列 h_nがスケーリング函数 f に収束することが期待される．しかし，この収束は望めないか，よくても弱い意味での収束しか起こり得ない．この種のアルゴリズムはフラクタルの研究において用いられる典型的なものである．したがって，スケーリング函数もしくは，その最終階の微分の指数がより本当に小さい Hölder 連続性をもつことが多いことは驚くべきことではない．カスケード・アルゴリズムを扱った論文としては [BW2], [DL1], [DeDu], [DyGLe], [DyLe], [D1], [D2] などがある．

他方，フーリエ変換を用いる方法は，伸張方程式のたたみこみ的な性質によって示唆される．伸張方程式をフーリエ変換すれば，

$$\hat{f}(\gamma) = m_0(\gamma/2)\hat{f}(\gamma/2) \tag{4.6}$$

を得る．ここで， $m_0(\gamma) = \frac{1}{2}\sum c_k e^{2\pi ik\gamma}$ は 係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ のシンボルである．(4.6) をくりかえして

$$\hat{f}(\gamma) = m_0(\gamma/2)\hat{f}(\gamma/2) = m_0(\gamma/2)m_0(\gamma/4)\hat{f}(\gamma/4) = \cdots$$

を得る．これは， $\hat{f}$ の性質が m_0 を含む無限積の収束によって支配されることを示唆する．この方法は，例えば， f の一意性の証明や $\hat{f}$ の減衰度を考察することによって f の滑らかさを研究するのに役立つ．しかし f の Hölder 指数のような，時間領域における f の評価をぎりぎりまで調べるのには適さないのが普通である．この方法については更に詳しく 4.2 節で扱う．フーリエ変換を用いた方法を扱った論文としては [ColHe4], [DL1], [E], [V1], [V2], [D1], [D2], [M] などがある．

最後に二進補間法は，コンパクト台をもつ滑らかなスケーリング函数をすべて構成し特徴付けるのに我々が用いる方法である．それは次の観察に基づいている．すなわち，スケーリング函数 f に値が例えば整数点で分かっていれば，伸張方程式によってただちに半整数点における f の値が分かるという観察である．これを続けて次に整数の四分の一の点での f の値が分かり，どんどん続けていけば結局，二進点すなわち $k/2^n$ の形をしたすべての点での f の値が分かる．もし f がこの形の点の集合上一様連続であれば，連続的に数直線上に延長される．この方法の実際は，本章の大半，特に 4.3 節から 4.8 節を占める．以下で各節のあらましを述べよう．

4.3 節では二進補間法をいかにして行列表示するかを示す．それには，伸張方程式と同等な

行列表示が必要でありそれは以下の通りである．まず，区間 $[0,N]$ に台をもつスケーリング函数 f を区間 $[0,1]$ 上定義されるベクトル値函数 v に変換する．すなわち $x\in[0,1]$ に対して $v(x)$ の第 1 成分 $v_1(x)$ は単に $f(x)$ であり，第 2 成分 $v_2(x)$ は $f(x+1)$ であるといった具合に v を定める．我々はこのベクトル値函数 v のことをスケーリング・ベクトルと呼ぶ．次に，$x\in[0,1]$ に対して， $x, x+1, \ldots, x+N-1$ の各点を伸張方程式に代入することで得られる N 個の方程式が，スケーリング・ベクトル v と，係数 $\{c_0,\ldots,c_N\}$ から定まる行列 T_0, T_1 の適当ないくつかの積を含む行列方程式で表現されることを示す．その積は， x の二進展開のはじめの m 個の数を $d_1,\ldots,d_m$ としたとき， $T_{d_1}\cdots T_{d_m}$ といった形をしている． x の二進展開を $x=.d_1d_2\cdots$ と書く． x が二進点でなければ，この展開は一意だが，二進点では二つの展開をもつ，すなわち，無限個 0 が続く展開，これを $x=.d_1\cdots d_j$ と書く．もしくは，無限個 1 が続く展開である．積 $T_{d_1}\cdots T_{d_m}$ を作るのに，行列 T_0, T_1 はある種の「整合性」をもつので， x が二進点の時はこのどちらの展開をも使うこととする．

4.4 節では，連続なスケーリング・ベクトルが（従ってコンパクト台をもつ連続なスケーリング函数が）構成できる十分条件を求めるために，伸張方程式の行列表示を用いる．これは結局は二進補間によって二進点で一旦定められた f がこの二進点の集合上一様連続になるための条件を求めることに他ならない．十分条件は， $\mathbb{C}^N$ の適当な部分空間 W 上の，行列 T_0 , T_1 のあらゆる積のノルムの増大条件で表現される．更に Hölder 指数の下限が求められる．

4.5 節では，行列 T_0 , T_1 の積の増大条件がどうやって T_0 , T_1 の結合スペクトル半径と見なされるかを述べる．したがってわき道へそれて 4.5.1 節では，結合スペクトル半径の基本的な性質を述べ，4.5.2 節ではその計算方法を述べよう．

4.6 節では，元へ戻って，スケーリング・ベクトルとそれに付随したスケーリング函数の連続性について考える．特に，4.4 節の結果は最良である，つまり，結合スペクトル半径を用いてコンパクト台をもつ連続なすべての伸張方程式を精確に特徴付け， Hölder 指数の範囲を精確に与えることができることを示す．

4.4 節と 4.6 節の結果よりすべての連続なコンパクト台をもつスケーリング函数が完全に決定される．しかし係数 $\{c_0,\ldots,c_N\}$ をもつ伸張方程式のスケーリング函数 f が微分可能ならば，f' は係数 $\{2c_0,\ldots,2c_N\}$ をもつ伸張方程式のスケーリング函数である．後者の伸張方程式が連続な解をもてば，連続な導函数をもつ伸張方程式をすべてはっきりと特徴付けられるので，くり返しにより， n 回連続微分可能な解をもつ伸張方程式をもすべて特徴付けられる．4.7.1 節ではこの特徴付けを適当な結合スペクトル半径を用いてはっきりさせる．4.7.2 節では係数に関する和法則が結合スペクトル半径にどんな影響を与えるかを見よう．

最後に 4.8 節で，特別な伸張方程式に対して今までの結果を適用する．4.8.1 節では滑らかなコンパクト台をもつ伸張方程式を $N=3$ に対してすべて求めよう．4.8.2 節では $N=6$ に対する同様の問題を係数 $\{c_0,\ldots,c_6\}$ が等式 (4.4) と対称性つまり $c_0=c_6$, $c_1=c_5$そして $c_2=c_4$

を満たすという仮定の下で考える．

二進補間法は今まで多くの人々が使っており我々がその方法を発明したわけではない．特に Michelli と Prautzsch [MiP2] が補間 (subdivision) 問題 をきっかけとして，二つの行列の積による二進補間法をはじめて用いた．しかし彼らは結合スペクトル半径を用いずまた Hölder 指数の評価を得てはいない． Daubechies と Lagarias [DL1], [DL2] は独立に同じ道具を発見し滑らかなコンパクト台をもつスケーリング函数の存在する十分条件と対応するスケーリング函数の最終階微分の Hölder 指数の下限を結合スペクトル半径を用いて与えた．[ColHe1], [ColHe3] では我々は彼らの十分条件を改良し，それがまた必要十分条件であることを示した．特に連続な，コンパクト台をもつスケーリング函数の場合には， Daubechies と Lagarias の結果は本質的には 4.4 節の我々の定理 4.3 の制限された形に他ならない．その逆は 4.6 節の定理 4.11 であり，同じような結果は Berger と Wang [BW2], [W] らも得ている．Rioul [R1], [R2] は異なった形の二進展開を用いて結合スペクトル半径では表現されない Hölder 指数の評価を得ている．また，我々は大域的な滑らかさのみ論じるが，我々の行列表示によって詳細な局所的情報，例えば一点あるいはある点の集合における滑らかさをも得ることができる．最後に，我々の方法はスケールが 2 以外の整数である伸張方程式や，高次元のある種の伸張方程式にも使える． Daubechies と Lagarias [DL2] はこのことのいくつかを実行している．

4.2　フーリエ変換

まず， f は可積分なスケーリング函数としよう．もちろん，この時， f は我々の主な関心である滑らかな，コンパクト台をもつ函数のクラスに属している．f のフーリエ変換 $\hat{f}(\gamma) = \int f(t)e^{2\pi i\gamma t}\,dt$ は定義され，連続な函数である．従って伸張方程式とフーリエ変換を用いた等式 (4.6) は同等である．特に$\gamma = 0$ のとき $\hat{f}(0) = \Delta\hat{f}(0)$．ここで

$$\Delta = m_0(0) = \frac{1}{2}\sum c_k$$

であり，従って $\Delta \neq 1$ ならば $\int f(t)\,dt = \hat{f}(0) = 0$ である．

等式 (4.6) をくりかえして， $n > 0$ に対して，

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma/2^n)\prod_{j=1}^{n} m_0(\gamma/2^j) \tag{4.7}$$

を得る． $n \to \infty$ としたとき $\Delta \neq 1$ ならば無限積の所で収束性の問題が起こる．従ってしばらくは $\Delta = 1$ なる仮定を設けよう．m_0 は三角多項式なので無限積

$$P(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\gamma/2^j) \tag{4.8}$$

は（コンパクト集合上一様に）連続函数に収束し，従って，

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(0)P(\gamma)$$

を得る．特に，f が恒等的に 0 でなければ $\hat{f}(0) \neq 0$ であることに注意せよ．更に，P は fとは無関係なので，$\Delta = 1$ のときは可積分解はスケールを除いて一意に定まる．次にそのような解は必然的にコンパクト台をもつことを示そう．また同様に，$\Delta \neq 1$ のときコンパクト台をもつ可積分スケーリング函数は，スケールを除いて一意に定まることを示そう．ただし $\Delta \neq 1$ のときはコンパクト台をもたない可積分スケーリング函数も存在しうる．

f の台を計算するために時間の側に戻って考えよう．$\nu = \frac{1}{2}\sum c_k\delta_k$ ，ここで，δ_k は点 k におけるデルタ函数とする．すると $\hat{\nu} = m_0$ かつ $\mathrm{supp}(\nu) = \{0, \ldots, N\} \subset [0, N]$ である．ν_nを ν の圧縮された形，すなわち $\nu_n = \frac{1}{2}\sum c_k\delta_{2^{-n}k}$ とし，測度 μ_n を $\mu_n = \nu_1 * \cdots * \nu_n$ で定める．ここでアスタリスク (*) はたたみ込みを表す．その時，$\hat{\mu}_n(\gamma) = \prod_{j=1}^{n} m_0(\gamma/2^j)$ であり $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset [0, N/2] + \cdots + [0, N/2^n] \subset [0, N]$ である．$n \to \infty$ としたとき $\hat{f}(0)\hat{\mu}_n(\gamma) \to \hat{f}(\gamma)$ なので，弱* 位相で $\hat{f}(0)\mu_n \to f$ を得，従って $\mathrm{supp}(f) \subset [0, N]$ が証明された．

次に $\Delta \neq 1$ の時を考えよう．この場合収束性を得るために等式 (4.8) の無限積の項を調整しよう．特に等式 (4.7) を

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma/2^n)\Delta^n \prod_{j=1}^{n} \frac{m_0(\gamma/2^j)}{\Delta} \tag{4.9}$$

と書きかえて，

$$P_\Delta(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{m_0(\gamma/2^j)}{\Delta}$$

が連続函数に収束することに注意しよう．$\hat{f}(0) = 0$ より等式 (4.9) で $n \to \infty$ とすることにより $\hat{f} \equiv 0$ かつ $|\Delta| \leq 1$ のときは $\Delta \neq 1$ ，従ってこの場合は $f \equiv 0$ （自明解）しかない．

$|\Delta| > 1$ としよう．$\int f(t)\,dt = \hat{f}(0) = 0$ より，もし f がコンパクト台をもつならば，その原始函数

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

はコンパクト台をもつ非自明な可積分函数である．更に f_1 は係数 $\{c_0/2, \ldots, c_N/2\}$ をもつ伸張方程式の解であり，従って $|\Delta/2| > 1$ または $\Delta/2 = 1$ である．もし $|\Delta/2| > 1$ ならこのプロセスを，f_1の原始函数 f_2 を作ることによって，$|\Delta/4| > 1$ または $\Delta/4 = 1$ を得る．このプロセスは無限には続け得ない，すなわち，ある $n > 0$ に対して $\Delta = 2^n$ でなければならない．このとき f_n は係数 $\{2^{-n}c_0, \ldots, 2^{-n}c_N\}$ の伸張方程式に対する可積分解であり，従って（ $\Delta = 1$

の時のように)(スケールを除いて) f_n は一意に定まり, $[0.N]$ に台が含まれている. そして f は f_n の n 階微分なので, $\mathrm{supp}(f) \subset [0,N]$ であり結局 f は(スケールを除いて)ただ一つのコンパクト台をもつ可積分函数である. 他方もし f がコンパクト台をもたなければ, 原始函数 f_1 は可積分であるとは限らず, 先ほどの解析は破綻する. つまり $|\Delta| > 1$ のときは可積分だがコンパクト台をもたないスケーリング函数の一意性は証明できない. 実際, $|\Delta| > 1$ なる伸張方程式で無限に多くの可積分解が存在し, その反対に一つも可積分解をもたないようなものがある [DL1]. ともあれ, 上述の解析によって高々一つの可積分解しかコンパクト台をもたないことがわかった.

上述の, コンパクト台をもつ可積分スケーリング函数の特徴付けは Daubechies と Lagarias [DL1] によってはじめて行われた.(我々の議論は Berger によるすぐれたノート [B] にも刺激された.) 要約すると,

定理 4.1 係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ をもつ伸張方程式の可積分でコンパクト台をもつ解 f が存在すれば, 整数 $n \geq 0$ が存在し, 次のようなことが成り立つ.(ここでも一意性は「スケールを除いて」ということ)

(a) $\sum c_k = 2^{n+1}$

(b) $\{2^{-n}c_0, \ldots, 2^{-n}c_N\}$ を係数にもつ伸張方程式は一意的な可積分解 f_n をもち $\mathrm{supp}(f_n) \subset [0,N]$

(c) fは伸張方程式のただ一つのコンパクト台をもつ可積分函数で, スケールをうまくとれば f は f_n の n 階微分である.

特に $\sum c_k = 2$ (つまり $\Delta = 1$) なる伸張方程式はある意味で「基本的」である(等式 (4.4) はその特別な場合であることに注意). しかし, この条件は可積分解の存在を保証するには十分ではない. 例えば, $N = 0$, $c_0 = 2$ という最も簡単な伸張方程式は可積分解をもたない. 我々は可積分解の存在のための必要条件と十分条件を与えた [ColHe4]. そして [W] は, 結合スペクトル半径のタイプのことばで必要十分条件を予想している.(これは, 以後の節で述べる結合スペクトル半径と似ているものである.) 他方 $\sum c_k = 2$ を満たす伸張方程式に対する distribution 解はいつでも構成できる. 実際, 無限に多くの異なった distribution 解が存在する. しかし(スケールを除いて)コンパクト台をもつものに限ればそれはただ一つである([ColHe4], [DL1]). コンパクト台をもたない解のいくつかは函数として実現できる. 実際, 伸張方程式が滑らかでコンパクト台をもつ解と滑らかでコンパクト台をもたない解の両方をもつことがありうる.

この節では一意性を得るためにのみフーリエ変換を用いたが, 他の多くの結果にも用いられる. 例えば, Daubechies [D1] は (4.8) の等式の無限積を考えることで $\hat{f}$ の減衰度を調べている. Strichartz による第1章を見よ. f の滑らかさの評価が, 例えば Hölder 指数でさえ, こ

の方法で得られる．もっとも Hölder 指数は本質的には周波数空間におけるよりむしろ時間空間における性質だから， Hölder 指数の評価は最良でない．他方 [E] と Villemoes [V1], [V2] はフーリエ変換を用いて Sobolev 指数の良い評価を得ている．それは，Sobolev 指数が本質的には周波数空間の性質だからである．

4.3　スケーリング函数とスケーリング・ベクトルの同等性

本章の残りではコンパクト台をもつ滑らかなスケーリング函数すべてを特徴付けるために二進補間法を使う．この方向での第一段階は伸張方程式を同等の行列表現に変換することである．それゆえ $\{c_0, \ldots, c_N\}$ が与えられているとし伸張方程式の連続な，コンパクト台をもった解 f が存在するとせよ．この時 $\mathrm{supp}(f) \subset [0, N]$ であり，ベクトル値函数

$$v(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(x+1) \\ \vdots \\ f(x+N-1) \end{pmatrix}, \qquad x \in [0,1] \tag{4.10}$$

は f のすべての情報をとらえている．まず f は連続なので $v_1(0) = v_N(1) = 0$ ．そして構成法より $v_i(x)$ を $v(x)$ の i 成分とすれば， $v_{i+1}(0) = v_i(1)$, $i = 1, \ldots, N-1$ となる．

今もし $0 \leq x \leq 1/2$ ならば伸張方程式と $\mathrm{supp}(f) \subset [0, N]$ かつ $f(0) = f(N) = 0$ という事実から，$v(x) = {}^t(f(x), \ldots, f(x+N-1))$ は $v(2x) = {}^t(f(2x), \ldots, f(2x+N-1))$ から線形的に決まってしまう．それゆえ，$0 \leq x \leq 1/2$ のとき $v(x) = T_0 v(2x)$ を満たすような $N \times N$ 行列 T_0 が存在する．同じく $1/2 \leq x \leq 1$ の時 $v(x)$ は $v(2x-1)$ から線形的に決まってしまう．従って $1/2 \leq x \leq 1$ の時ある行列 T_1 が存在して， $v(x) = T_1 v(2x-1)$ が成立する．実際，$(T_0)_{ij} = c_{2i-j-1}$, $(T_1)_{ij} = c_{2i-j}$，すなわち

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N & c_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_N \end{pmatrix}$$

$x = 1/2$ において「整合性」がある，つまり，

$$v(1/2) = T_0 v(1) = T_1 v(0) \tag{4.11}$$

以上より，連続な，コンパクト台をもつスケーリング函数 f は連続なベクトル値函数 $v : [0,1] \to \mathbb{C}^N$ を定め，以下の条件を満たすことがわかった

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_N(1) = 0 && (4.12) \\ v_{i+1}(0) &= v_i(1), \quad i = 1, \ldots, N-1 && (4.13) \\ v(x) &= T_{d_1} v(\tau x) && (4.14) \end{aligned}$$

ここで $x = .d_1 d_2 \cdots$ を x の二進展開とした時

$$\tau x = 2x \bmod 1 = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

(よって $\tau x = .d_2 d_3 \cdots$). そして等式 (4.14) で $x = 1/2$ の時は (4.11) のこととする．もし f が Hölder 連続でその指数が α ならば， v もまた Hölder 連続でその指数も α であることは容易に分かる．ここでベクトル値函数に対する Hölder 連続性は $\|v(x) - v(y)\| \leq K|x-y|^\alpha$ なる不等式で定義され， $\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}^N$ 上の任意のノルムのことである．

もし今 f がコンパクト台をもつ任意のスケーリング函数であり（つまり，必ずしも連続ではないとしても） v が等式 (4.10) によって定められるならば等式 (4.11)-(4.14) が $f(0) = f(N) = 0$ なる仮定の下で成立する．これは $c_0, c_N \neq 1$ ならば成り立つ．もし $|c_0| \geq 1$ あるいは $|c_N| \geq 1$ ならば f は 0 または Nで不連続でなければならないことを伸張方程式から直接示すことは困難でない．

今までの議論に照らして，ベクトル値函数 $v : [0,1] \to \mathbb{C}^N$ で等式 (4.11)-(4.14) をすべての $x \in [0,1]$ で満たすものをスケーリング・ベクトルと呼ぶ．

今までの手続きは可逆である．すなわちスケーリング・ベクトル v が与えられれば，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \quad \text{又は} \quad x \geq N \\ v_i(x), & i-1 \leq x \leq i, \quad i = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{4.15}$$

と定義すれば，明らかに f はコンパクト台をもつ解で v が連続ならば f も連続であり Hölder 指数 vも相等しい．

まとめると「(Hölder) 連続な」コンパクト台をもつスケーリング函数と「(Hölder) 連続な」スケーリング・ベクトルは，一方が存在すれば他方も存在するという意味で同等である．さらに， $c_0, c_N \neq 1$ であるならば，今の文章から「(Hölder) 連続な」を削ることができる．それゆえ，次のいくつかの節ではスケーリング函数よりもむしろスケーリング・ベクトルの存

在と性質に焦点を当ててゆこう．

4.4　連続なスケーリング・ベクトルが存在するための十分条件

この節では，スケーリング・ベクトル v が存在して連続になるための係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ に関する十分条件を求めよう．まず等式 (4.12) からスケーリング・ベクトル vが存在するならば，$v_1(0) = 0$ である． $T_0 v(0) = v(0)$ であり T_0 の第一行では最初の成分だけが 0 でないので，$(N-1) \times (N-1)$ 行列 M を $M_{ij} = c_{2i-j}$ つまり

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N & c_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

とすれば， ${}^t(v_2(0), \ldots, v_N(0))$ は行列 M の固有値 1 に対する右固有ベクトルである．ここで M は T_0 , T_1 の部分行列である．従ってスケーリング・ベクトルは 1 が M のスペクトルである場合にのみ存在しうる．例えば，等式 (4.4) が満たされていれば， $(1, \ldots, 1)$ が M の固有値 1 に対する左固有ベクトルになっている．

従って 1 は M の固有値と仮定して，スケーリング・ベクトル v を構成しよう． M の固有値 1 に対する右固有ベクトルを $a = {}^t(a_1, \ldots, a_{N-1})$ とおき $v(0) = {}^t(0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ そして，$v(1) = {}^t(a_1, \ldots, a_{N-1}, 0)$ とおく．スケーリング函数の観点からは，これは整数点における fの値を与えていることになる．すると等式 (4.11)-(4.13) が成立している．次に各二進点 $x = .d_1 \cdots d_m$ に対して，

$$v(x) = T_{d_1} \cdots T_{d_m} v(0) \tag{4.17}$$

と定義する．スケーリング函数の観点からは，これは結局，整数点における f の値を伸張方程式に代入して半整数における f の値を得，そして，これらの値を再び伸張方程式に代入して整数の四分の一の所における f の値を得，逐次この操作を実行することで二進点における f の値を得る．

等式 (4.17) よりただちに等式 (4.14) がすべての二進点 $x \in [0,1]$ で成り立ち，v の定義域をすべての $x \in [0,1]$ に拡張して等式 (4.14) が成立するようにしたい．このためには v が $[0,1]$ 内のすべての二進点からなる集合上一様連続であることを示せば十分である．なぜなら，そうすれば， v が $[0,1]$ 上連続になるような一意的な拡張が存在し，極限をとることによって等式 (4.14) がすべての $x \in [0,1]$ で成り立つからである．さらに，もし v が各二進点 $x, y \in [0,1]$ に対して Hölder 指数 α であるならば任意の $x, y \in [0,1]$ に対して， Hölder 指数 α であることもわかる．

それ故 $[0,1]$ 内の二つの二進点 $x<y$ を考えよう．もし x と y が十分近ければ二進展開において，はじめのいくつかの数は一致する，すなわち，$x=.d_1\cdots d_k$ かつ $2^{-m-1}\le y-x<2^{-m}$ $(m>k)$ ならば $x=.d_1\cdots d_m$（$i=k+1,\ldots,m$ に対して $d_i=0$）そしてある jがあって $y=.d_1\cdots d_m d_{m+1}\cdots d_{m+j}$と書ける．それゆえ

$$v(y)-v(x)=T_{d_1}\cdots T_{d_m}(v(\tau^m y)-v(0)) \tag{4.18}$$

を得る．$[0,1]$ 内の二進点全体の集合上で vが右連続であることを言うためには，任意の二進点 $z\in[0,1]$ に対して $v(z)-v(0)$ に作用する $T_{d_1}\cdots T_{d_m}$ の可能なあらゆるふるまいについて考えなければならない．それゆえ

$$W=W(a)=\operatorname{span}\{v(z)-v(0)\colon z\in[0,1]\ \text{かつ二進点}\} \tag{4.19}$$

と定義すると，W は T_0，T_1 の作用の下で不変な $\mathbb{C}^N$ の部分空間である．一般に W は a に依存する．しかしながら，殆どの係数の選び方に対しては，M の固有値 1 は単純であり，この場合 W は a に依存しない．記号を若干乱用して W のことをあたかも一意的に存在するかのように扱い，a の依存は黙認する．

もし等式 (4.4) が成立すれば W は

$$V=\left\{u\in\mathbb{C}^N : u_1+\cdots+u_N=0\right\}$$

の部分空間であり，Vもまた T_0，T_1 の作用の下で不変である．一般には，W を明確に定めるのは困難なことではない．例えば，次が成立する [ColHe3]．

命題 4.2　W は T_0，T_1 の作用の下で不変な $\mathbb{C}^N$ の部分空間でベクトル $v(1)-v(0)$ を含む最小のものである．

我々は [ColHe3] で (4.4) をみたす伸張方程式に対して係数 $\{c_0,\ldots,c_N\}$ の集合で測度 0 を除いた所に属する係数に対しては $W=V$ だと予想した．しかしながら，W と V の差異は，伸張方程式が連続な解をもつか否かを決定するに際して重要な役割を果たす．その例は 4.8.2 節で与えられる．

式 (4.18) に戻ろう．$v(y)-v(x)$ の「大きさ」を知りたい．$\mathbb{C}^N$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を一つ固定して $N\times N$ 行列 Aの作用素ノルム $\|A\|$ を

$$\|A\|=\sup_{u\neq 0}\frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

で定める．式 (4.18) より

$$\|v(y)-v(x)\|\le C_1\,\|(T_{d_1}\cdots T_{d_m})|_W\| \tag{4.20}$$

が得られる．ここで

$$C_1 = 2\sup\{\|v(z)\| : z \in [0,1] \text{ かつ二進点 }\}$$

のこと．(もちろん $C_1 < \infty$ とは前もっては分からないが，当座はこれを認めよう．) (4.20) の右辺は m に関して幾何学的にふるまう．$C, \theta > 0$ を，すべての $m > 0$ に対して

$$\max_{d_j=0,1} \|(T_{d_1} \cdots T_{d_m})|_W\| \leq C\theta^m \tag{4.21}$$

を満たすものとする．例えば$\theta = \max\{\|T_0|_W\|, \|T_1|_W\|\}$ が一つの候補であるが θ をもっと小さくとることはしばしば可能である．(4.20) と (4.21) をあわせて

$$\|v(y) - v(x)\| \leq C_1 C\theta^{-1}\theta^{m+1} = C_1 C\theta^{-1}(2^{-m-1})^{\alpha} \leq K|x-y|^{\alpha}$$

が得られる．ここで，$K = C_1 C\theta^{-1}$, $\alpha = -\log_2 \theta$ のこと．全く同じ議論で，$2^{-m-1} \leq x-y < 2^{-m}$ をみたす二進点 $y < x$ に対する不等式も成立する． K , α は m に無関係なので，ほとんど次の結果を証明したことになる．

定理 4.3　$C, \theta > 0$ を (4.21) が成立するような数とする．もし $\theta < 1$ ならば v は連続なコンパクト台をもつスケーリング函数 f を定め， f は Hölder 連続 でその指数α は $\alpha = -\log_2 \theta$ である．

式 (4.4) を仮定に必要とする，定理 4.3 の特別な場合は Daubechies と Lagarias [DL2] によってはじめて示された．

定理 4.3 は$\theta < 1$ の下で式 (4.21) が成立しているという仮定の下で $C_1 < \infty$ を示せば証明が終わる．

$$\begin{aligned}
&\|T_{d_1} \cdots T_{d_m} v(0) - v(0)\| \\
&\quad \leq \left\|T_{d_1} \cdots T_{d_m} v(0) - T_{d_1} \cdots T_{d_{m-1}} v(0)\right\| + \cdots + \|T_{d_1} v(0) - v(0)\| \\
&\quad \leq \left\|(T_{d_1} \cdots T_{d_{m-1}})|_W\right\| \|T_{d_m} v(0) - v(0)\| + \cdots + \|T_{d_1} v(0) - v(0)\| \\
&\quad \leq (C\theta^{m-1} + \cdots + C)C_2 \\
&\quad \leq \frac{CC_2}{1-\theta}
\end{aligned}$$

ここで $C_2 = \max_{j=0,1} \left\|T_{d_j} v(0) - v(0)\right\|$のこと．

4.5　結合スペクトル半径

定理 4.3 における仮定つまり式 (4.21) が $\theta < 1$ で成立するという仮定は本質的には二つの作用素 $T_0|_W, T_1|_W$に関するスペクトルの条件である．この節ではこの条件が $T_0|_W$, $T_1|_W$の「結

合スペクトル半径」のことばでいかに定式化されるかを述べることに専念しよう．

4.5.1　定義と特質

一つの行列 A の通常のスペクトル半径は

$$\rho(A) = \limsup_{m\to\infty} \|A^m\|^{1/m} \tag{4.22}$$

で定義されることを思い出しておこう．これはノルム $\|\cdot\|$ の取り方によらない．スペクトル半径はまた固有値を用いても計算できる，つまり，

$$\sigma(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ は } B\text{固有値}\}$$

とすると

$$\rho(A) = \limsup_{m\to\infty} \sigma(A^m)^{1/m} \tag{4.23}$$

と計算できる．もちろん (4.23) より明らかに

$$\rho(A) = \sigma(A) \tag{4.24}$$

となる．なぜなら $\sigma(A^m) = \sigma(A)^m$ であり，実際は (4.24) がスペクトル半径の定義として用いられることがしばしばである．

一つの行列の通常のスペクトル半径をノルム代数の元の集合の場合にはじめて一般化したのは Rota と Strang である [RoS]．二つの行列という特別な場合の定義は次の通りである．

定義 4.4　二つの $N \times N$ 行列 A_0, A_1 の結合スペクトル半径 $\hat\rho(A_0, A_1)$ は

$$\hat\rho(A_0, A_1) = \limsup_{m\to\infty} \hat\rho_m$$

ここで，

$$\hat\rho_m = \hat\rho_m(A_0, A_1) = \max_{d_j=0,1} \|A_{d_1} \cdots A_{d_m}\|^{1/m}$$

のこと．

もっと多くの個数の行列に対する，あるいは部分空間上に制約された行列に対する結合スペクトル半径の定義は明らかであろう．$\hat\rho(T_0|_W, T_1|_W)$ の値はノルムのとり方によらない．Berger と Wang [BW1] は (4.23) の自明でないアナロジーを，つまり，

$$\hat\rho(A_0, A_1) = \limsup_{m\to\infty} \hat\sigma_m$$

ここで

$$\hat{\sigma}_m = \hat{\sigma}_m(A_0, A_1) = \max_{d_j=0,1} \rho(A_{d_1} \cdots A_{d_m})^{1/m}$$

を証明した．しかしながら，(4.24) のアナロジーは一般には嘘である．すなわち $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ は A_0 と A_1の固有値の絶対値の最大値（これは$\hat{\sigma}_1$で与えられる）と等しいとは限らない．例えば，$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とすると $A_1 = {}^tA_0$より$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \hat{\sigma}_2 = \sqrt{(3+\sqrt{5})/2} > \hat{\sigma}_1 = 1$ となる．

$\theta > \hat{\rho}(A_0, A_1)$ が与えられれば，ある定数 $C > 0$ が存在して，すべての m に対して $\hat{\rho}_m^m \leq C\theta^m$ となることは明らか．しかし$\theta = \hat{\rho}(A_0, A_1)$ の時は，こうはいかない．(もしそうならば $A_0/\hat{\rho}(A_0, A_1)$ と $A_1/\hat{\rho}(A_0, A_1)$ は積有界と言われる．なぜなら，この 2 つの正規化された行列のすべての積は，このとき，ノルム有界だから.) 結合スペクトル半径のことばでは，定理 4.3 は次のようにも述べられる．

定理 4.5 もし $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$ ならば，連続なスケーリング・ベクトル v が存在しこの Hölder 指数 α は，$0 \leq \alpha < -\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ をみたす．もし $\theta^{-1}T_0|_W, \theta^{-1}T_1|_W$ （ここで $\theta = \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ ）が積有界ならば v の Hölder 指数 α はちょうど $\alpha = -\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ である．

4.5.2 結合スペクトル半径 の計算

一つの行列の通常のスペクトル半径は行列の固有値から容易に計算できるのに反して，結合スペクトル半径は精確に計算することは難しい．それゆえここでは結合スペクトル半径を評価するあるいは近似するいくつかの方法を述べよう．

まず，結合スペクトル半径は基底の取り方によらないこと，つまり B が可逆行列ならば $\hat{\rho}(BA_0B^{-1}, BA_1B^{-1}) = \hat{\rho}(A_0, A_1)$ ということは明らかである．いったん都合のよい基底をえらべば有限個の行列のノルムや固有値を計算することによっていくらでも精密に $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ の値を近似することができる．このことは次の補題と$\hat{\rho}(A_0, A_1) = \limsup \hat{\sigma}_m = \limsup \hat{\rho}_m$なる事実から導かれる．

補題 4.6 すべての $m > 0$ に対して$\hat{\sigma}_m \leq \hat{\rho}(A_0, A_1) \leq \hat{\rho}_m$が成り立つ．

証明 任意に $d_1, \ldots, d_m = 0, 1$ と $n > 0$ を与えれば

$$\rho(A_{d_1} \cdots A_{d_m})^{1/m} = \rho((A_{d_1} \cdots A_{d_m})^n)^{1/mn} \leq \hat{\sigma}_{mn}$$

よって

$$\hat{\sigma}_m = \max_{d_j=0,1} \rho(A_{d_1}\cdots A_{d_m})^{1/m} \le \limsup_{n\to\infty} \hat{\sigma}_{mn} \le \hat{\rho}(A_0, A_1)$$

$$K = \max\left\{1, \hat{\rho}_m^{-1}, \ldots, \hat{\rho}_m^{-m+1}\right\} \quad , \quad L = \max\left\{1, \hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_{m-1}^{m-1}\right\}$$

とおく．$n > 0$ に対して $n = mk + r$, $0 \le r < m$ と書く. すると任意の $d_1, \ldots, d_n = 0, 1$ に対して

$$\|A_{d_1}\cdots A_{d_n}\| \le (\hat{\rho}_m^m)^k \hat{\rho}_r^r = \hat{\rho}_m^n \hat{\rho}_m^{-r} \hat{\rho}_r^r \le KL\hat{\rho}_m^n$$

を得る．すべての $d_j = 0, 1$ で上限をとれば $\hat{\rho}_n \le (KL)^{1/n}\hat{\rho}_m$ よって $\hat{\rho}(A_0, A_1) = \limsup_{n\to\infty} \hat{\rho}_n \le \hat{\rho}_m$ を得る． ∎

補題 4.6 より $\sup \hat{\sigma}_m = \hat{\rho}(A_0, A_1) = \lim \hat{\rho}_m = \inf \hat{\rho}_m$ となる．$\sup \hat{\sigma}_m$ は行列 A_0, A_1 の下半連続函数であることに注意せよ．なぜならどの $\hat{\sigma}_m$ もそれらの行列の連続函数だからである．同様に $\inf \hat{\rho}_m$ は上半連続であり，従って $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ は行列 A_0, A_1 の連続函数である [HeS].

不運なことに $\hat{\sigma}_m$ あるいは $\hat{\rho}_m$ の計算に含まれる行列の積の個数は m とともに指数増大し，従って，さまざまの m に対して $\hat{\sigma}_m$ あるいは $\hat{\rho}_m$ を単に計算するだけで $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ の良い近似を得ることは普通は実際的でない．他方で，もし A_0, A_1 が次の補題の仮定の一つを満たせば $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ は精確に計算できる．

補題 4.7　もし A_0, A_1 が同時上三角化可能あるいは同時エルミート化可能（すまわち，ある可逆行列 B が存在して BA_0B^{-1} と BA_1B^{-1} が共に上三角行列あるいはエルミート行列となること）ならば $\hat{\rho}(A_0, A_1) = \hat{\sigma}_1 = \max\{\rho(A_0), \rho(A_1)\}$ となる．

証明　同時上三角化できる場合は，二つの上三角行列の積の対角成分を計算すればただちにわかる．

同時エルミート化できる場合を証明しよう．$\|\cdot\|$ を $\mathbb{C}^N$ がヒルベルト空間になるようなノルム，例えばユークリッドノルムとしよう．するとどんなエルミート行列 A に対しても $\|A\| = \rho(A)$ となる．$d_1, \ldots, d_m$ が与えられたとき，どの $BA_{d_j}B^{-1}$ もエルミート行列ゆえ，

$$\begin{aligned}
\|A_{d_1}\cdots A_{d_m}\| &= \left\|B^{-1}(BA_{d_1}B^{-1})\cdots(BA_{d_m}B^{-1})B\right\| \\
&\le \|B\|\left\|B^{-1}\right\|\left\|BA_{d_1}B^{-1}\right\|\cdots\left\|BA_{d_m}B^{-1}\right\| \\
&= \|B\|\left\|B^{-1}\right\|\rho(BA_{d_1}B^{-1})\cdots\rho(BA_{d_m}B^{-1}) \\
&= \|B\|\left\|B^{-1}\right\|\rho(A_{d_1})\cdots\rho(A_{d_m}) \\
&\le \|B\|\left\|B^{-1}\right\|\hat{\sigma}_1^m
\end{aligned}$$

よって $\hat{\rho}_m \le \|B\|^{1/m} \|B^{-1}\|^{1/m} \hat{\sigma}_1$，従って $\hat{\rho}(A_0, A_1) = \limsup \hat{\rho}_m \le \hat{\sigma}_1 \le \hat{\rho}(A_0, A_1)$, を得る. ∎

次のことに注意せよ．$A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$は同時上三角化できるが同時エルミート化はできない．一方 $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ は同時エルミート化はできるが同時上三角化はできない．

次の補題は，補題 4.7 のはじめの部分の一般化であるが，A_0, A_1 が大きな行列のとき $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ の複雑な計算を易くするのに役立つ．

補題 4.8　A_0, A_1 は同時ブロック上三角化できる，つまりある可逆行列 B が存在して

$$BA_iB^{-1} = \begin{pmatrix} C_i^1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & C_i^k \end{pmatrix}, \qquad i = 0, 1$$

とできるとせよ．ここで $C_i^1, \ldots, C_i^k$は部分正方行列である．このとき $\hat{\rho}(A_0, A_1) = \max_{j=1,\ldots,k} \left\{ \hat{\rho}(C_0^j, C_1^j) \right\}$となる．

2×2 を考えている時だけでさえ，上述の道具は，行列のすべてのペアの結合スペクトル半径を精確に評価するには十分ではない．例えば，4.8.1 節で関心の的となる次のペア

$$S_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, S_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

でさえそうである．これは補題 4.7 の仮定をともに満たしていない．$2^{31} - 2$ 個の行列の積の直接的な力づくの計算によって

$$\min\{\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_{30}\} = \hat{\rho}_{30} = \left\| S_0^5 S_1 S_0^{11} S_1 S_0^{12} \right\|^{1/30} \approx 0.671271 \tag{4.26}$$

であり

$$\max\{\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{30}\} = \hat{\sigma}_{13} = \rho(S_1 S_0^{12})^{1/13} \approx 0.659679$$

である．ここで$\hat{\rho}_m$を計算するために $\mathbb{C}^2$ 上のノルムとして $\|u\| = |u_1| + |u_2|$ を用いた．この多量の計算によってさえ$\hat{\rho}(S_0, S_1)$ の小数第 1 ケタしか一致しないとは！

幸いにも $\hat{\rho}(A_0, A_1)$ を上から近似する計算の複雑さをしばしば十分に緩和する逐次的アルゴリズムが存在する.（不幸にして下から近似する同様のアルゴリズムを我々は知らない）．そのアルゴリズムは補題 4.6 の直接的な一般化である [DL2].

補題 4.9　$\{P_j\}$ を行列 A_0, A_1の積のブロックの集合とする．すなわち次の (a) (b) を満たす集合とする．

(a) P_j は行列 A_0, A_1の m_j 回の積であり，

(b) ある $r \geq 0$ が存在して，P が A_0, A_1の任意の積であれば $P = P_{j_1} \cdots P_{j_k} Q$ で Q は高々r回の積である，とできる．

この時，$\hat{\rho}(A_0, A_1) \leq \max \|P_j\|^{1/m_j}$である．

結合スペクトル半径をまずθであると「推測」すれば，次のアルゴリズム [ColHe1] によって $\hat{\rho}(A_0, A_1) \leq \max \|P_j\|^{1/m_j} \leq \theta$ となるブロックの集合 $\{P_j\}$ を構成できる．(もし$\theta < \hat{\rho}(A_0, A_1)$ ならばこのアルゴリズムは途中で終わることがない．)

アルゴリズム **4.10**　$\theta > \hat{\rho}(A_0, A_1)$ を固定する．$P = A_0$, $P = A_1$からはじめて次の繰り返しを実行せよ．

- $P = A_{d_1} \cdots A_{d_m}$とする．$\|P\|^{1/m} \leq \theta$ ならば P をブロックとせよ．さもなくば $P = A_{d_1} \cdots A_{d_m}$ のかわりに $P = A_{d_1} \cdots A_{d_m} A_0$ と $P = A_{d_1} \cdots A_{d_m} A_1$ に対してブロックか否かをチェックせよ．

アルゴリズム 4.10 はθ が$\hat{\rho}(A_0, A_1)$ より大きければ途中で終わる．なぜなら$\hat{\rho}(A_0, A_1) \leq \hat{\rho}_m \leq \theta$ なる m が必ず存在するからである．

(4.25) で与えられた行列 S_0, S_1 の場合に戻ろう．そして $\hat{\rho}(S_0, S_1)$ の評価を良くするためにアルゴリズム 4.10 を用いる．特にこのアルゴリズムは$\theta = 0.660025$ とすれば途中で終わるので $\hat{\rho}(S_0, S_1) \leq 0.660025$ と言える．これは (4.26) より十分良い値である．このアルゴリズムにより行列の積（ブロックとして含まれないものも含めて）を 612944 個計算した後 306473 個のブロックの集合が生まれる．ブロックとしてえらばれた行列の積の中で最長のものは 139 個の積である．$\hat{\rho}_{139}$をもし仮に直接計算できたとしてもこの評価を越えることはできない．例えば

$$\begin{aligned}&\left\| S_0^3 S_1 S_0^{12} S_1 S_0^{13} S_1 S_0^{12} S_1 S_0^{11} S_1 S_0^9 S_1 S_0^{12} S_1 S_0^{10} S_1 S_0^{13} S_1 S_0^{12} S_1 S_0^{11} S_1 S_0^9 S_1 \right\|^{1/139} \\ &= \quad 0.661276\end{aligned}$$

であり$\hat{\rho}_{139} \geq 0.661276$ となる．上述の数値計算に基づき我々は$\hat{\rho}(S_0, S_1) = \rho(S_1 S_0^{12})^{1/13}$と予想する．

4.6　連続なスケーリング・ベクトルが存在するための必要条件

本節では定理 4.3 と定理 4.5 が最良であること，つまり次の定理を証明することに集中しよう [ColHe3]．

定理 4.11 vが任意の連続なスケーリング・ベクトルで，Wが (4.19) によって定義されるならば，$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$ である．さらに，vの Hölder 指数α は $-\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ を越えることはできない．そして $\alpha = -\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ であることと（$\theta = \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ として）$\theta^{-1}T_0|_W, \theta^{-1}T_1|_W$ が積有界 であることとは同値である．

証明をはじめよう．v を任意の連続なスケーリング・ベクトルとしよう．すると v の Hölder 指数 αは $0 \leq \alpha \leq 1$ である．Kを対応する Hölder 定数とする．

T_0, T_1なる $T = T_{d_1} \cdots T_{d_m}$ の積を任意に固定し，$x \in [0,1]$ を任意の二進点とする（これは当座の制約である）．$x = .e_1e_2\cdots$ を x の二進展開とする．すると (4.14) と vの連続性より，$k \to \infty$ とすれば

$$T^k v(x) = v(x_k) \to v(d) \tag{4.27}$$

が成立する．ここで

$$\begin{aligned} x_1 &= .d_1 \cdots d_m e_1 e_2 \cdots \\ x_2 &= .d_1 \cdots d_m d_1 \cdots d_m e_1 e_2 \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

そして $d \in [0,1]$ は

$$d = .d_1 \cdots d_m d_1 \cdots d_m \cdots$$

なる有理数（二進点とは限らない）のことである．直観的には (4.27) より T のスペクトル半径と Hölder 指数 αには何らかの制約がおかれてしかるべきである．このことをはっきりさせるために，$y_k \in [0,1]$ を二進点

$$\begin{aligned} y_1 &= .d_1 \cdots d_m \\ y_2 &= .d_1 \cdots d_m d_1 \cdots d_m \\ &\vdots \end{aligned}$$

としよう．dは必ずしも二進点でないので dのかわりに y_kを用いよう．

$$v(x_k) - v(y_k) = T^k(v(x) - v(0)) \tag{4.28}$$

と

$$|x_k - y_k| = 2^{-mk}|x| \tag{4.29}$$

に注意せよ．W は (4.19) で定義されているものなので $v(x)-v(0)\in W$である．そこでλ を $|\lambda|=\rho(T|_W)$ となる $T|_W$ の固有値とせよ．もし $v(x)-v(0)$ が，$T|_W$の固有値 λに対する固有空間に「成分をもって」いれば (4.28) より $\|v(x_k)-v(y_k)\|$ はオーダーが $|\lambda|^k$といえる．これと (4.29) を組み合わせて Hölder 指数の評価が出る．一般には「成分」の意味は $T|_W$ によって誘導される W のジョルダン分解のことばで定式化される．文献 [ColHe3] にどうやればよいかがはっきりと書かれている．ともかく W は二進点として $v(x)-v(0)$ の形のベクトルで張られるので，$v(x)-v(0)$ が $T|_W$ の固有値 λに対する固有空間に成分をもつような二進点 x が存在する．詳細は省くがある定数 $C>0$ が存在して

$$\left\|T^k(v(x)-v(0))\right\|\geq C|\lambda|^k \tag{4.30}$$

がすべての k に対して成立することを証明することは直接できる [ColHe3]．特に $k\to\infty$ としたとき $v(x_k)-v(y_k)\to 0$ なので，$\rho(T|_W)=|\lambda|<1$ が得られる．(4.28)-(4.30) を組み合わせて

$$\|v(x_k)-v(y_k)\|\geq K_T|x_k-y_k|^{\alpha_T} \tag{4.31}$$

が得られる．ここで，$\alpha_T=-\log_2\rho(T)^{1/m}$ ，$K_T=C|x|^{-\alpha_T}$である．しかし vは Hölder 指数 α，Hölder 定数 Kなので，

$$\|v(x_k)-v(y_k)\|\leq K|x_k-y_k|^{\alpha} \tag{4.32}$$

である．$k\to\infty$ のとき $|x_k-y_k|\to 0$ なので (4.31) と (4.32) より$\alpha\leq\alpha_T$がいえる．$d_j=0$ の 1 に対する $T=T_{d_1}\cdots T_{d_m}$のスペクトル半径の上限をとれば，$\hat{\sigma}_m<1$ であり$\alpha\leq-\log_2\hat{\sigma}_m$である．よって$\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)=\sup\hat{\sigma}_m\leq 1$ であり$\alpha\leq-\log_2\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)$，つまり v の Hölder 指数が $-\log_2\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)$ を越えないことが証明できた．

あともう少しで $\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)<1$ がいえる．特に $\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)=\sup\hat{\sigma}_m\leq 1$ で$\hat{\sigma}_m<1$ が任意の m についていえることはすでに示した通りである．かくして，特別な場合

$$\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)=\sup\hat{\sigma}_m=1\quad\text{そしてすべての } m \text{ で } \hat{\sigma}_m<1 \tag{4.33}$$

が残っている．(4.33) が可能か否かはわからないことに注意を向けることは興味深いことである．もっと一般に，$\sup\hat{\sigma}_m(A_0,A_1)=\hat{\rho}(A_0,A_1)$ がどんな m でも達成されないことを示す行列 A_0, A_1の存在を我々は知らない．Lagarias と Wang [LW] はそのような行列は存在しない，つまり必ずある有限個の行列の積 $A_{d_1}\cdots A_{d_m}$が存在して$\hat{\rho}(A_0,A_1)=\rho(A_{d_1}\cdots A_{d_m})^{1/m}$ となると予想した．

定理 4.11 の証明をつづけよう．今の場合 v の連続性から$\hat{\rho}(T_0|_W,T_1|_W)<1$ が出ることを示そう（ここでは Micchelli と rautzsch [MiP2] の議論を用いる．別のやり方は [ColHe3] を見よ）．$\{v(x_i)-v(0)\}_{i=1}^J$ を W の基底とし，W上のノルムを $w=\sum a_i(v(x_i)-v(0))$ に対して

$\|w\| = \sum |a_i|$ で定める．$\varepsilon < 1$ を任意にえらぶ．v は絶対連続なのである$\delta > 0$ が存在して $|x-y| < \delta$ならば $\|v(x) - v(y)\| \le \varepsilon$ となる．$2^{-m} < \delta$, となるように m をえらび，m 個の積 $T = T_{d_1} \cdots T_{d_m}$ を勝手にえらぶ．x_iの二進展開を $x_i = .e_1^i e_2^i \cdots$と書き，$X_i = .d_1 \cdots d_m e_1^i e_2^i \cdots$, $Y = .d_1 \cdots d_m$と定義する．すると $|X_i - Y| \le 2^{-m}$であり Wの任意の元 $w = \sum a_i(v(x_i) - v(0))$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|T_{d_1} \cdots T_{d_m} w\| &\le \sum_{i=1}^{J} |a_i| \ \|T_{d_1} \cdots T_{d_m}(v(x_i) - v(0))\| \\
&= \sum_{i=1}^{J} |a_i| \ \|v(X_i) - v(Y)\| \\
&\le \varepsilon \sum_{i=1}^{J} |a_i| \\
&= \varepsilon \|w\|
\end{aligned}
$$

を得る．よって $\|T|_W\| \le \varepsilon$, となり長さ m のそのような，行列の積すべてにわたって上限をとれば，$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) \le \hat{\rho}_m \le \varepsilon^{1/m} < 1$ を得る．

定理の最後の部分の証明は，つまり$\alpha = -\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ より積有界性が出ることは，上のように Wの基底を用いれば容易にわかるので省略する [ColHe3].

4.7 微分可能性

定理 4.3, 4.5, そして 4.11 によりコンパクト台をもち連続な解 fをもつそれらの伸張方程式を満たすが特徴付けが得られる．しかし fが係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ によって定まる伸張方程式に対する連続微分可能なコンパクト台をもつスケーリング函数であれば，f'は係数 $\{2c_0, \ldots, 2c_N\}$ によって定まる伸張方程式に対する連続な，コンパクト台をもつスケーリング関数となる．よって定理 4.3, 4.5 そして 4.11 により暗にコンパクト台をもち連続微分可能な解をもつ伸張方程式が特徴付けられている．この節ではこの点及びより高階の微分にまで拡張することを行う．

4.7.1 必要十分条件

はじめに，f を，係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ から定まる伸張方程式に対する n 回微分可能なコンパクト台をもつスケーリング函数としよう．定理 4.1 より係数の条件として基本的な$\sum c_k = 2$ だけで十分である．付随した行列 M, T_0, T_1，スケーリング・ベクトル vそして部分空間 W を，いつものように構成する．さて fの j 階微分 $f^{(j)}$ は各 j に対して係数$\{2^j c_0, \ldots, 2^j c_N\}$ から定まる伸張方程式に対する連続なコンパクト台をもつスケーリング函数なので行列 M^j, T_0^j, T_1^j，スケーリング・ベクトル v^j，そして部分空間 W^jを，$f^{(j)}$に関していつものように構成される対象

としよう．明らかに $M^j = 2^j M$, $T_0^j = 2^j T_0$ そして $T_1^j = 2^j T_1$ である．しかしスケーリング・ベクトル v^j，部分空間 W^j は v と W と全く異なる．特に $1 \in \mathrm{spectrum}(M^j)$ なので $j = 0, \ldots, n$ に対して $2^{-j} \in \mathrm{spectrum}(M)$ となる．このことより簡単に ${}^t(f^{(j)}(1), \ldots, f^{(j)}(N-1))$ が固有値 2^{-j} に対する M の右固有ベクトルであることが分かる．これより $n < N-1$ であり f は無限回微分可能にはなり得ないことに注意せよ．定理 4.11 より各 $j = 0, \ldots, n$ に対して

$$\hat{\rho}(T_0^j|_{W^j}, T_1^j|_{W^j}) = 2^j \hat{\rho}(T_0|_{W^j}, T_1|_{W^j}) < 1$$

でなければならない．これは n 回微分可能なスケーリング・ベクトルの存在の必要条件である．

もっとはっきりさせよう．$\sum c_k = 2$ かつ $1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-n} \in \mathrm{spectrum}(M)$ をみたす係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ が与えられたとし $a = {}^t(a_1, \ldots, a_{N-1})$ を固有値 2^{-n} に対する右固有ベクトル M としよう．

$$v^n(0) = {}^t(0, a_1, \ldots, a_{N-1}), v^n(1) = {}^t(a_1, \ldots, a_{N-1}, 0)$$

を定義する．二進点 $x = .d_1 \cdots d_m \in [0,1]$ に対して

$$v^n(x) = 2^{mn} T_{d_1} \cdots T_{d_m} v^n(0)$$

を定義し

$$W^n = W^n(a) = \mathrm{span}\,\{v^n(x) - v^n(0) \colon x \in [0,1], x \quad \text{は二進点} \quad \}$$

を置く．すると次の定理が得られる．

定理 4.12　係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ を $\sum c_k = 2$ かつ $1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-n} \in \mathrm{spectrum}(M)$ をみたすものとせよ．すると係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ によって定まる伸張方程式に対する n 回微分可能なコンパクト台をもつスケーリング函数 f が存在するための必要十分条件は

$$\hat{\rho}(T_0|_{W^n}, T_1|_{W^n}) < 2^{-n} \tag{4.34}$$

が成立することである．ここで $W^n = W^n(a)$ は先に定義した通りであり，a は固有値 2^{-n} に対する M のある右固有ベクトルである．この場合 f の n 階微分 $f^{(n)}$ は次の各指数

$$0 \le \alpha < \alpha_{\max} = -\log_2 (2^n \hat{\rho}(T_0|_{W^n}, T_1|_{W^n}))$$

をもつ Hölder 連続性をもち $\alpha > \alpha_{\max}$ なる指数はもたない．そして $\alpha > \alpha_{\max}$ が許されるのは $\theta^{-1} T_0|_{W^n}$, $\theta^{-1} T_1|_{W^n}$ が積有界である時かつその時に限る．ここで $\theta = \hat{\rho}(T_0|_{W^n}, T_1|_{W^n})$．

定理 4.12 の十分条件は次のように証明される．$\hat{\rho}(T_0|_{W^n}, T_1|_{W^n}) < 2^{-n}$ とせよ．定理 4.5 により v^n は $[0,1]$ 上の連続なスケーリング・ベクトルに拡張される．従って係数 $\{2^n c_0, \ldots, 2^n c_N\}$

によって定まる伸張方程式に対する連続なコンパクト台をもつスケーリング函数 h を定める．定理 4.5 よりまた h は少なくとも各 $0 \leq \alpha < \alpha_{\max}$ を指数にもつ Hölder 連続函数であり定理 4.11 よりα は高々$\alpha_{\max}$しか許されない．定理 4.5 と 4.11 より$\alpha = \alpha_{\max}$となる必要十分は積有界条件が成り立つことである．最後に定理 4.1 より h は係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ から定まる伸張方程式に対する可積分でコンパクト台をもつスケーリング函数 f の n 階微分であることもわかる．

4.7.2 和法則

定理 4.12 より係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ にはっきりした制約のない，微分可能な解をもつ伸張方程式が特徴付けられる．しかし実際上有用なスケーリング函数は普通，数個の偶あるいは奇の添字をもつ係数に対する「等式」条件をみたす係数から生じる．等式 (4.4) はその条件の一例である．特に$\sum c_k = 2$ に加えて，係数は次の $n+1$ 個の和法則 $j = 0, \ldots, n$ に対して

$$\sum_k (-1)^k k^j c_k = 0 \tag{4.35}$$

を満たすと仮定するのが一般的である．(等式 (4.35) で $n = 0$ とすると等式 (4.4) になることに注意.) これらの和公式はスケーリング函数 f 及び付随するウェーブレット gにある種の条件を付与する．その条件とは滑らかさと関連はしているがまた異なったものである．例えば $n+1$ 個の和法則はウェーブレット g が $n+1$ 回までのモーメントが消えるということを導く．$j = 0$ に対しては

$$\int g(t)\, dt = \sum_k (-1)^k c_{N-k} \int f(2t-k)\, dt = 0$$

から導かれる．そして簡単な帰納法より $j = 1, \ldots, n$ に対して $\int t^j g(t)\, dt = 0$ が導かれる．また次の補題が得られる．

命題 4.13 係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ が $\sum c_k = 2$ と $n+1$ 個の和法則を満たし付随したコンパクト台をもつスケーリング函数 fが存在するとせよ．すると各 $j = 0, \ldots, n$ に対して$\sum k^j f(t-k)$ は次数 j の多項式である．

特に多項式 $1, \ldots, t^n$は fの平行移動から完全に再生できる．従って任意の滑らかな函数は各スケール 2^{-m} で $\{f(2^m t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の結合によって誤差オーダー $\mathcal{O}(2^{-mn})$ で近似できる [S].

補題 4.13 は様々な方法で証明できる．その一つをスケッチしてみよう．簡単のため $n = 1$ とする． fは$\hat{f}(0) = 1$ と正規化されているとせよ．そしてθ_0を次をみたす函数とする．

(a) $\hat{\theta}_0(0) = 1$

(b) $\sum \theta_0(t-k) = 1$

(c) ある定数 b に対して $\sum k\theta_0(t-k) = t+b$

例えば，θ_0 が二つの和法則を満たす伸張方程式の解で，その整数だけの平行移動と直交しているならば，(a)(b)(c) が満たされる.(確かにこれは循環論法であるが，この直交性という仮定も加味して補題 4.13 を直接証明することもできる)．θ_0 のそのような例としては，4.8.1 節で議論される Daubechies のスケーリング函数 D_4 がある．今カスケード・アルゴリズムを適用する，即ち，$i>0$ に対して函数 θ_i を

$$\theta_i(t) = \sum_k c_k\theta_{i-1}(2t-k) \tag{4.36}$$

で定める．すると $\hat{\theta}_i(\gamma) \to \hat{f}(\gamma) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\gamma/2^j)$ とコンパクト一様収束する．というのは $\hat{\theta}_0(0)=1$ であり $\hat{\theta}_i(\gamma) = m_0(\gamma/2)\hat{\theta}_{i-1}(\gamma/2)$ だからである．時間領域では $\theta_i \to f$ と $L^2(\mathbb{R})$ で弱収束する．等式 (4.36) と二つの和法則より

$$\sum_k \theta_i(t-k) = \sum_k \theta_{i-1}(2t-k) \tag{4.37}$$

そして

$$\sum_k k\theta_i(t-k) = \frac{1}{2}\sum_k k\theta_{i-1}(2t-k) - \frac{A_1}{2}\sum_k \theta_{i-1}(2t-k) \tag{4.38}$$

ここで

$$A_1 = \sum(2k)c_{2k} = \sum(2k+1)c_{2k+1}$$

等式 (4.37) と (4.38) を順次適用し $i\to\infty$ として極限をとって殆ど至る所 $\sum f(t-k) = 1$，$\sum kf(t-k) = t - A_1$ を得，証明を終わる．

補題 4.13 の系としてもし f が n 回微分可能で $n+1$ 個の和法則が満たされるなら各 $j=0$ に対して $\sum k^j f^{(n)}(t-k)$ は恒等的に一定となる．定理 4.12 の記法を用いれば，各 $j=0,\ldots,n$ に対し

$$\sum_{k=1}^{N} k^j(v_k^n(x) - v_k^n(0)) = 0 \qquad j=0,\ldots,n$$

ここで，$v_k^n(x)$ は $v^n(x)$ の k 番目の成分である．よって

$$W^n \subset V^n = \left\{u\in\mathbb{C}^N : e_j\cdot u = 0 \;\; j=0,\ldots,n\right\}$$

ここで $e_j = (1^j, 2^j, \ldots, N^j)$，さらに Daubechies と Lagarias は [D1] で和法則は V^n についての次の事実を導くことを証明した．

補題 4.14 係数 $\{c_0,\ldots,c_N\}$ が$\sum c_k=2$ と $n+1$ 和法則を満たすとせよ．すると各 $j=0,\ldots,n$ に対して次が成立する．

(a) $U^j=\operatorname{span}\{e_0,\ldots,e_j\}$ は T_0 , T_1 の作用のもとで左不変であり， $\operatorname{spectrum}(T_0|_{U^j})=\operatorname{spectrum}(T_1|_{U^j})=\{1,2^{-1},\ldots,2^{-j}\}$

(b) V^j は $\mathbb{C}^N$において U^jの直交補空間であり T_0 , T_1 の作用のもとで右不変である．

従って $1,2^{-1},\ldots,2^{-n}\in\operatorname{spectrum}(M)$.

証明 (b) は (a) と V^jの定義から従うことに注意せよ．(a) を示すためには各 $i,j=0,\ldots,n$ に対して定数 a^i_{jl}が存在して

$$e_jT_i=2^{-j}e_j+\sum_{l=0}^{j-1}a^i_{jl}e_l$$

が成立することを示せばよい．簡単のため $i=0$, $j=1$ の時を示そう．一般の場合も同様である．

$(T_0)_{pq}=c_{2p-q-1}$なので

$$(e_1T_0)_q=\sum_{p=1}^{N}pc_{2p-q-1}$$

qが偶数，例えば $q=2r$ならば

$$\begin{aligned}(e_1T_0)_{2r} &= \sum_p pc_{2p-2r-1}\\ &= \sum_p(r+p+1)c_{2p+1}\\ &= \frac{2r+1}{2}\sum_p c_{2p+1}+\frac{1}{2}\sum_p(2p+1)c_{2p+1}\\ &= \frac{1}{2}(2r+1+A_1)\\ &= \frac{1}{2}(e_1)_{2r}+\frac{A_1+1}{2}(e_0)_{2r}\end{aligned}$$

qが奇数でも同様の計算が出来，結局

$$e_1T_0=\frac{1}{2}e_1+\frac{A_1+1}{2}e_0$$

となる．

(a) より $1,2^{-1},\ldots,2^{-n}$ は T_0 と T_1の固有値でありこれらが Mの固有値であることを示すことだけが残った．しかし，与えられた j に対して固有値 2^{-j}に対する T_0の左固有ベクトルである $u=(u_1,\ldots,u_N)\in U^j$ を見つけることが出来る． u は $e_0,\ldots,e_j$ の線形結合なので $u_2=\cdots=u_N=0$ ではあり得ない．$T_0=\left(\begin{smallmatrix}c_0&0\\ *&M\end{smallmatrix}\right)$より $(u_2,\ldots,u_N)$ は固有値 2^{-j}に対する M

の左固有ベクトルと結論できる． ∎

補題 4.14 と定理 4.12 の結論として

$$\hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n}) < 2^{-n} \tag{4.39}$$

であれば n 回連続微分可能なコンパクト台をもつスケーリング函数の存在が保証される（逆は必ずしもいえないが）． V^nは係数には無関係なので等号 (4.34) よりも試し易い条件である．

等式 (4.39) は n 回微分可能性を結論するのに $n+1$ 和法則を用いていることに注意せよ．しかし，実際は，スケーリング函数のもつ微分可能性の回数よりも多くの和法則が満たされていることが多い．例えば Daubechies のスケーリング函数 D_4 は二つの和法則を満たす一方単に連続なだけで微分はできない．そうであってもこの「余分の」和法則を用いて結合スペクトル半径の計算がより簡単になる．このことは次の補題ではっきりするが， Daubechies と Lagarias によってはじめて証明された結果の若干弱い形になっている [DL2].

命題 4.15　係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ は$\sum c_k = 2$ と $n+1$ 和法則を満たすとせよ．もし

$$\hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n}) < 2^{-l}$$

がある $0 \le l \le n$ で成立するならば，l回連続微分可能なコンパクト台をもつスケーリング函数が存在し，l階導函数の Hölder 指数は次の範囲のαである．

$$0 \le \alpha < \min\left\{1, -\log_2\left(2^l \hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n})\right)\right\}$$

証明　補題 4.14 より各 $j = 0, \ldots, n$ に対して $\{e_0, \ldots, e_j\}$ は U^j の基底であることを思い起こしておこう． $U^0 \subset \cdots \subset U^n$ であり各 V^j は $\mathbb{C}^N$で U^j の直交補空間なので $V^0 \supset \cdots \supset V^n$となる．更に $\dim(V^n) = N - n - 1$ なので $\{\tilde{e}_{n+1}, \ldots, \tilde{e}_{N-1}\}$ が V^nの基底ならば $\{e_{j+1}, \ldots, e_n, \tilde{e}_{n+1}, \ldots, \tilde{e}_{N-1}\}$ は各 jに対して V^jの基底である．これらの各 $j = 0, \ldots, n$ に対する基底を考えることにより次のような基底変換行列 B を構成することができる．

$$BT_iB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & * & \\ & 2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2^{-n} & \\ & 0 & & & C_i \end{pmatrix} \qquad i = 0, 1$$

そして補題 4.8 より

$$\hat{\rho}(T_0|_{V^j}, T_1|_{V^j}) = \begin{cases} \max\left\{2^{-j-1}, \ldots, 2^{-n}, \hat{\rho}(C_0, C_1)\right\}, & j = 0, \ldots, n-1 \\ \hat{\rho}(C_0, C_1), & j = n \end{cases}$$

と結論できる．従って

$$\hat{\rho}(T_0|_{V^l}, T_1|_{V^l}) = \max\left\{2^{-l-1}, \hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n})\right\}$$

となり $\hat{\rho}(T_0|_{V^l}, T_1|_{V^l}) < 2^{-l}$ より $\hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n}) < 2^{-l}$ が出る．従って，定理 4.12 より証明が終わる． ∎

特に V^n の次元は V^l の次元よりかなり小さい，従って結合スペクトル半径の計算に含まれる行列の大きさが小さくなることに注意せよ． W^l は V^l より真に小さいだろうから，定理 4.12 の上限の場合と同じく補題 4.15 の $f^{(l)}$ の Hölder 指数の上限もシャープである必要はない．

4.8 例

簡単のため係数 $\{c_0, \ldots, c_N\}$ は実数値としよう．定理 4.1 の一意性の結果より対応するスケーリング函数もまた実数値でなければならない．

4.8.1 四つの係数の伸張方程式

$N = 0$ 又は 1 の時は連続なコンパクト台を持つ伸張方程式の解は存在しない．$N = 2$ のときは $\sum c_k = 2$ と $1 \in \mathrm{spectrum}(M)$ より等式 (4.4) が成立する．ここで $W \subset V$ は高々1 次元であり $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ の計算は容易である．従ってまず $N = 3$ の場合を見てみよう．この時四つの係数 $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ をもつ． $\sum c_k = 2$ と $1 \in \mathrm{spectrum}(M)$ は仮定する．その時

(a) $c_0 + c_1 = c_2 + c_3 = 1$

又は

(b) $c_0 + c_2 = c_1 + c_3 = 1$

が成り立つ．
(b) の場合は等式 (4.4) となることに注意．

(a) の場合は $c_0 \neq c_3$ の時 $\dim(W) = 3$ を示すことは簡単であり $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) \geq \rho(T_0|_W) = \rho(T_0) \geq 1$ となる．従って $c_0 \neq c_3$ の時 (a) には連続な解が存在しない．$c_0 = c_3$ で (a) の場合は (b) の特別な場合なので (b) を扱う．

従って等式 (4.4) が成り立ち，このクラスの伸張方程式は 2 パラメータの族をなすことに注意せよ．独立なパラメータとして c_0 と c_3 をえらび，この族を (c_0, c_3)-平面と同一視する，すなわち，各点 (c_0, c_3) は係数 $\{c_0, 1 - c_3, 1 - c_0, c_3\}$ をもつ伸張方程式を定め，逆も正しい．等式

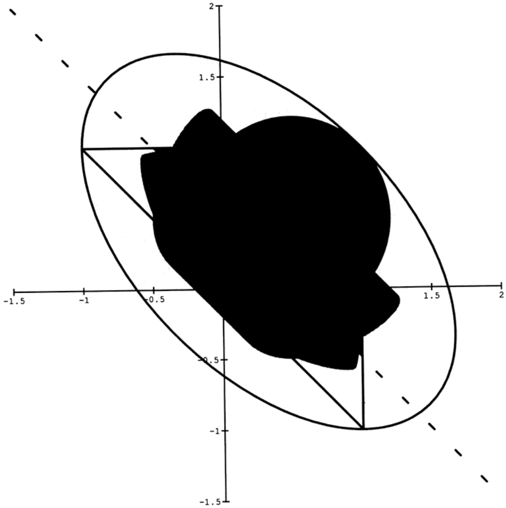


図 **4.1** 等式 (4.4) が成り立つ四つの実係数の伸張方程式と同一視した (c_0, c_3)-平面

(4.4) より $W \subset V$ かつ $\dim(V) = 2$ なので $W = V$ 又は W は一次元である．

(c_0, c_3)-平面はいくつかの幾何的模様と一緒に図 4.1 に示されている．

少なくとも影のついた領域に対しては可積分スケーリング函数が存在し，楕円の外では存在し得ないことが [ColHe4] で示された．以下で連続なスケーリング函数は三角形の内部の部分領域に限られ，微分可能なスケーリング函数はちょうどダッシュのついた直線上の実線部分に限られることを示そう．円 $(c_0 - 1/2)^2 + (c_3 - 1/2)^2 = 1/2$ は等式 (4.4) と (4.5) を満たし，これは対応する多重解像度解析が存在するための必要条件である．実際，$(c_0, c_3) = (1, 1)$ を除いた円周上の各点は多重解像度解析を決定し，従って $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を生成するウェーブレットを生み出す．

さて固有値 1 に対応する M の右固有ベクトルは ${}^t(c_0, c_3)$ である．従って定数倍を除いて $v(0) = {}^t(0, c_0, c_3)$, $v(1) = {}^t(c_0, c_3, 0)$ である． $v(1/2) = T_1 v(0)$ を計算すると $v(0)$, $v(1/2)$, $v(1)$ は互いに線形でないことが分かり従って $1 - c_0 - c_3 \neq 0$ ならば $W = V$ となる．$1 - c_0 - c_3 = 0$ の時は容易に $\dim(W) = 1$ が分かり，$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ は容易に計算できる．しかし $1 - c_0 - c_3 = 0$ の時は興味深い場合で，以下で詳細に論じよう．

$1-c_0-c_3 \neq 0$ の時は $\dim(W)=2$ である．次の基底変換行列 B を用いて

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = \hat{\rho}\big((BT_0B^{-1})|_{BW}, (BT_1B^{-1})|_{BW})\big) = \hat{\rho}(S_0, S_1)$$

ここで

$$S_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ -c_3 & 1-c_0-c_3 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 1-c_0-c_3 & -c_0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

となる．従って伸張方程式に対する連続なコンパクト台をもつ解が存在するための必要十分条件は$\hat{\rho}(S_0, S_1) < 1$ である．$\hat{\rho}(S_0, S_1)$ を「簡単に」計算できる場合は次の補題に示されているが，その証明は面倒なしかし基本的な代数よりできる [ColHe2].

補題 4.16 **(a)** S_0, S_1 が同時上三角化できる必要十分条件は $1-c_0-c_3=0$ 又は $1-2c_0-2c_3=0$ である．

(b) S_0, S_1が同時エルミート化できる必要十分条件は $c_0c_3(1-c_0-c_3)(1-2c_0-2c_3)>0$ である．

いずれの場合も $\hat{\rho}(S_0, S_1) = \hat{\sigma}_1 = \max\{|c_0|, |c_3|, |1-c_0-c_3|\}$ となる．

(c_0, c_3) 平面の「半分」だけが補題 4.16 の仮定の一つを満たす．その仮定の一つを満たし結果$\hat{\rho}(S_0, S_1) = \hat{\sigma}_1 < 1$ となる点 (c_0, c_3) が図 4.2 の影のついた領域に示されている．

残りの点に関しては $\hat{\rho}(S_0, S_1)$ は他の方法，例えば $\hat{\sigma}_m$, $\hat{\rho}_m$を計算するかアルゴリズム 4.10 (4.5.2 節を見よ) を通して近似計算される．図 4.1 から 4.3 で示されている三角形は集合 $\{(c_0, c_3) : \hat{\sigma}_1 = 1\}$ である．連続なスケーリング函数は，従って，三角形の内部の点に限られる．補題 4.16 と $\hat{\sigma}_{18}$ 及び$\hat{\rho}_{18}$の強引な計算をあわせて，図 4.3 で次のことが分かる．

(a) 図 4.3 で影のついた領域は図 4.2 の影のついた領域と結びつけて集合 $\{(c_0, c_3) : \hat{\rho}_{18} < 1\}$ を表す．

(b) 図 4.3 の点線は集合 $\{(c_0, c_3) : \hat{\sigma}_{18} = 1\}$ である．

特にコンパクト台をもつ連続なスケーリング函数は影のついた領域内部のすべての点 (c_0, c_3) に対して存在し，実線上あるいはその外部の点 (c_0, c_3) に対しては存在し得ない．

次にこれらのスケーリング函数のどれが微分可能かを考える．そのためには 1 と 1/2 が M の固有値でなければならず $1-c_0-c_3=0$ でなければならない．この場合二つの和法則が満たされ W^1は 1 次元空間 V^1に等しい．従ってスケーリング函数 fが微分可能であるための必要十

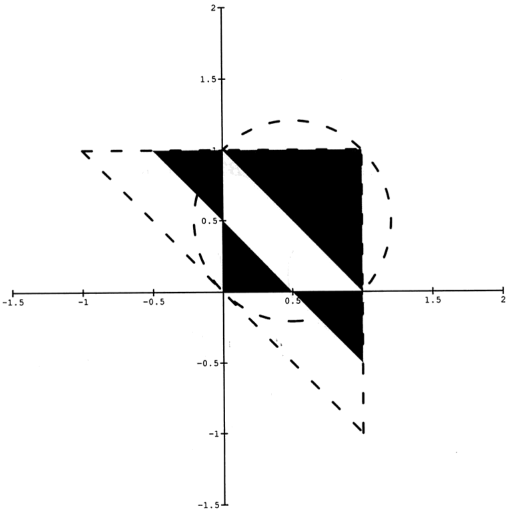


図 **4.2**　同時エルミート化できる (c_0, c_3)-平面の部分集合（影のついた領域）

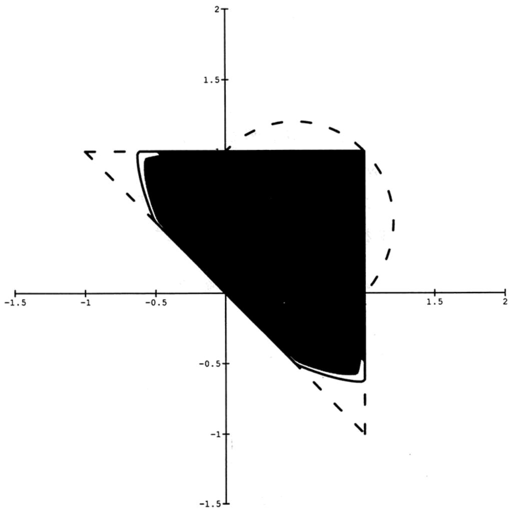


図 **4.3**　コンパクト台をもつ連続なスケーリング函数の存在する (c_0, c_3)-平面の領域（影のついた領域）の近似計算

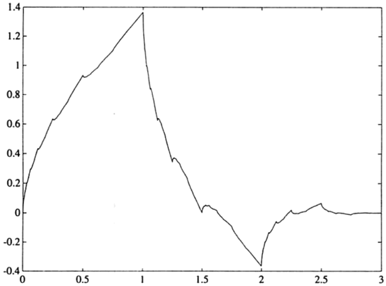


図 **4.4** $(c_0, c_3) = ((1+\sqrt{3})/4, (1-\sqrt{3})/4)$ に対応する Daubechies のスケーリング函数 D_4

分条件は$\hat{\rho}(T_0|_{W^1}, T_1|_{W^1}) = \max\{|c_0|, |c_3|\} < 1/2$ すなわち，図 4.1 のダッシュのついた直線上の実線部である．2×2 行列 Mの固有値が 1/2 そして 1/4 でありうるわけはないので 2 階微分可能な領域は存在しない．

最後に，多重解像度解析を構成するために重要な伸張方程式つまり図 4.1-4.3 で示された円周上の点に対応する伸張方程式を考えよう．この「半分」だけが，連続だが微分不可能な解をもつ.「標準的」な例である Daubechies のスケーリング函数 D_4は二つの和法則を満たす円周上の唯一の点（つまり直線 $c_0 = c_3$に関しての対称性を除いて一意的ということ．これは伸張方程式の係数の順序を逆転し，また，対応するスケーリング函数の時間を逆転することに対応する.）この点は円周と直線 $1 - c_0 - c_3 = 0$ の交点に位置する．付随するスケーリング函数（図 4.4 に示されている）は最も多くの数の多項式を再生することが出来るという点で，円周上では，滑らかさが最も高いものである．しかし Hölder 指数の点からは円周上で最も滑らかであるとはいえない．特に D_4は補題 4.16 (a) の仮定を満たすので最大 Hölder 指数は $-\log_2 \hat{\rho}(S_0, S_1) = -\log_2 \hat{\sigma}_1 \approx 0.550$ である（もっとも D_4は二つの和法則を満たすのでもっと単純に $l = 0,\ n = 1$ として補題 4.15 を適用することでも得られる）．円周上では $-\log_2 \hat{\sigma}_1$は $(c_0, c_3) = (3/5, -1/5)$ で最大値$-\log_2 0.6 \approx 0.737$ を取る．不運なことにこの点は補題 4.16 の仮定をともにみたさないので対応するスケーリング函数の最大 Hölder 指数ではない（図 4.5 を見よ）．実際このことは 4.5.2 節（等式 (4.25) 参照）で深く研究した例である．そこでは詳細な計算の結果 $0.659679 \le \hat{\rho}(S_0, S_1) \le 0.660025$ が分かり従ってスケーリング函数の最大 Hölder 指数はおよそ $-\log_2 0.660 \approx 0.600$ である．円周上の点での最大 Hölder 指数はこれではないか，というのが我々の予想である．

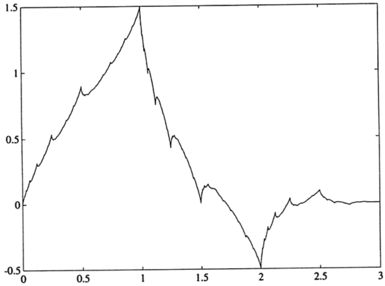


図 **4.5**　$(c_0, c_3) = (3/5, -1/5)$ に対応するスケーリング函数

4.8.2　対称な7つの係数をもつ伸張方程式

一般にスケーリング函数の滑らかさと伸張方程式の係数との関係は 4.8.1 節で扱った四つの係数の場合と比較してもっとこみいっている．というのは $N = 3$ のとき $W \neq V$でなくとも $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ だったからである．V は係数には無関係なので $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ と最大 Hölder 指数 $-\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ は係数達の連続関数となる．

$N > 3$ の時は顕著に異なった状況が生じる．特に空間 Wとその次元は，伸張方程式の係数が変化すると急激に変化し得る．結合スペクトル半径はスペクトルの条件であり，T_0, T_1 の種々の 積 $T_{d_1} \cdots T_{d_m}$ の固有値は係数達の連続函数なので $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$ の決定の上で重要なことは積が Wに制限された時にその積のどの固有値が重要かを知ることである．特に，Wの次元が減少するとある固有値は重要でなくなり従って結合スペクトル半径が不連続的に変化することになる．重要なことは $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W)$，従ってまた，最大 Hölder 指数が係数達の函数として不安定であるということである．この考えを対称な7つの係数をもつ伸張方程式を使って描写してみよう．

$N = 6$ とし係数 $\{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ は実数で等式 (4.4) すなわち

$$c_0 + c_2 + c_4 + c_6 = c_1 + c_3 + c_5 = 1$$

をみたし，対称，すなわち

$$c_0 = c_6, \qquad c_1 = c_5, \qquad c_2 = c_4$$

としよう．これらの条件よりパラメータは二つとなりそれらを c_0, c_1 とする．伸張方程式のクラスを (c_0, c_1)-平面と同一視する，すなわち各点 (c_0, c_1) が係数 $\{c_0, c_1, 1/2 - c_0, 1 - 2c_1, 1/2 - c_0, c_1, c_0\}$ をもつ伸張方程式を決定しまたその逆も正しいとする．(c_0, c_1)-平面が図 4.6 でこれから議

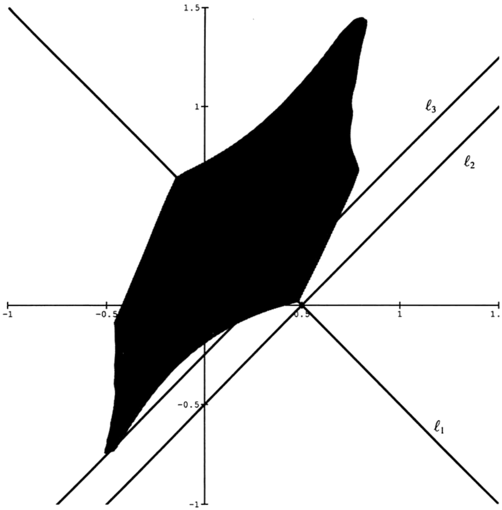


図 **4.6** 等式 (4.4) の成り立つ，対称な 7 つの実係数をもつ伸長方程式を同一視した (c_0, c_1)-平面

論するいくつかの幾何的模様とともに描かれている．

伸張方程式の係数は対称としたので付随するスケーリング函数もまた対称である，すなわち，$f(x) = f(6-x)$ である．Daubechies [D1] は次のことを示した．すなわち実係数に対しては，対称性が加味されると Haar 系という唯一の例外を除いて付随する多重解像度解析の可能性がなくなるということである．従ってこれらのスケーリング函数は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を生むウェーブレットの構成には使えないが，対称な函数は非直交ウェーブレット基底の構成には使われる [CoDF]．

図 4.6 の影の領域は $\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) < 1$ をみたす点の集合での数値解析的近似である．特にこの領域は $\|u\| = |u_1| + \cdots + |u_6|$ なるノルムを使って $\hat{\rho}_{14}(T_0|_V, T_1|_V) < 1$ をみたす点 (c_0, c_1) から成る．$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) \le \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ なのでこの領域の各点は付随するコンパクト台をもつ連続なスケーリング函数をもつ．

今，点 $(c_0, c_1) = (1/2, 0)$ を考えよう．係数は

$$c_0 = 1/2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 1/2 \tag{4.40}$$

となる．等式 (4.16) で与えられる行列 M を調べると 1 は重複度 2 の固有値となっている．二つの線形独立な右固有ベクトルは例えば，${}^t(1,2,3,2,1)$ と ${}^t(0,0,1,0,0)$ である．4.4 節で概略を述べたように固有値 1 に対する M の右固有ベクトルはスケーリング・ベクトルを決める候補にな

りうる．しかし一意性より一つのベクトルだけが可積分解を導く．例えば $v(0) = {}^t(0,0,0,1,0,0)$ とおくと $W = V$となり$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) \geq 1$ となる．なぜなら 1 は 6×6 行列 T_0 と T_1の多重度をもつ固有値で $\dim(V) = 5$ だから．従って定理 4.11 よりこの場合は連続なスケーリング・ベクトルを導かない．他方 $v(0)$ として代わりに${}^t(0,1,2,3,2,1)$ をとれば $x \in [0,1]$ に対して $v(x) = {}^t(x, x+1, x+2, 3-x, 2-x, 1-x)$ となる．従って Wは 1 次元で$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = 1/2$ といえる．比較から$\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) = 1$ となり連続なスケーリング・ベクトルの存在を決定するのに Vだけを調べても十分でないことが分かる．このスケーリング・ベクトルは従って Hölder 連続でその指数は 1 である．しかし微分可能ではない．スケーリング函数は単に区間 $[0,6]$ を台とする高さ 1 の三角形である．

この 7 つの係数の伸張方程式は単に三つの係数の伸張方程式の「引きのばされた」形であることに注意せよ．すなわち $c_0 = 1/2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1/2$ できまる $N = 2$ の時の等式の係数の各間に二つの 0 を代入して等式 (4.40) の係数が得られるということである．こうすることで，もとの 3 係数の方程式の解の台を時間領域において 3 倍に引き伸ばすことが出来る．特に，3 係数の方程式の解は台が $[0,2]$ で高さ 1 の 2 等辺三角形であるから等式 (4.40) に対する連続な解は区間 $[0,6]$ 上に引き伸ばされる．引き伸ばされた伸張方程式は Berger と Wang [BW2] によってある程度研究された．

さて $(1/2, 0)$ に対応する引き伸ばされた伸張方程式は $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$ なる領域の境界上にあることを示そう．これは，$\dim(W)$ が (c_0, c_1)-平面上でこの点から離れると変化するからである．これを見るために $(c_0, c_1) = (1/2 + \delta, -\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ から成る直線 ℓ_1をまずしらべてみよう．この直線は図 4.6 にプロットされている．$\delta = 0$ は引き伸ばされた伸張方程式 $(1/2, 0)$ に対応し，従って$\delta = 0$ の時は $\dim(W) = 1$ であることに注意せよ．しかし，$\delta \neq 0$ のときは補題 4.2 を使って $\dim(W) = 3$ であることが分かる．さらにこの時 T_0 と T_1は同時ブロック上三角化されて

$$BT_iB^{-1} = \begin{pmatrix} C_i^1 & * & * & * \\ 0 & 1/2 & * & * \\ 0 & 0 & C_i^2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで各 C_i^k は 2×2 行列で，上左 BT_iB^{-1}の 3×3 部分行列は $T_i|_W$に対応し，上左 BT_iB^{-1} の 5×5 部分行列は $T_i|_V$に対応する．影響の出ない小さな範囲の δを除いて各組 C_0^k, C_1^k は同時エルミート化できる．特にこの同時エルミート化は区間 $[-1/8, 1/8]$ の各 δに対して実行できる．補題 4.7 と 4.8 を適用して

$$\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = \max\left\{\hat{\rho}(C_0^1, C_1^1), \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \left|\frac{1}{2} + \delta\right|, \left|\frac{1}{2} + 2\delta\right|\right\} \tag{4.41}$$

と

$$\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) = \max\{\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W), \hat{\rho}(C_0^2, C_1^2)\} = \max\{\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W), |1+3\delta|\} \quad (4.42)$$

となる．特に $\delta \in [-1/8, 0)$ に対しては $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = 1/2 < \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) < 1$ となり，$\delta \in (0, 1/8]$ に対しては $1/2 < \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1 < \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ となる．よって $[-1/8, 1/8]$ の各点では $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$ であり，Wは Vの真に部分空間であるのに，半分の区間でのみ $\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) < 1$ である．この区間で引き伸ばされた伸張方程式が起こるのは点$\delta = 0$ のときだけであることに注意せよ．

次に $(c_0, c_1) = (1/2+\delta, \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ から成る直線 ℓ_2を考えよう．この直線も図 4.1 にプロットされており，再び$\delta = 0$ が引き伸ばされた伸張方程式 $(1/2, 0)$ に対応する．この直線に沿っては$\delta \neq 0$ ならばつねに $W = V$であることが [ColHe3] で示された．さらに 0 に十分近いすべての $\delta \neq 0$ に対して$\rho(T_0|_W) > 1$ である．従ってある$\varepsilon > 0$ が存在して $0 < |\delta| < \varepsilon$に対して $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) \geq \rho(T_0|_W) > 1$ となる．よってこれらの δに対する伸張方程式は連続な，コンパクト台をもつ解をもち得ない．点 $(c_0, c_1) = (1/2, 0)$ では連続な，コンパクト台をもつ解があるのに係数を少しでも変えると連続な解が存在し得ない．特に $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) < 1$ なる領域は開集合でない．

さて $(c_0, c_1) = (3/8+\delta, 1/8+\delta)$ から成る直線 ℓ_3を考えよう．再び図 4.6 にプロットされている． $\delta = 0$ に対応する点 $(3/8, 1/8)$ は ℓ_1上にあり等式 (4.41) と (4.42) より $\hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = 1/2\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) = 5/8$ となる．再び [ColHe3] で証明されたことだが $\delta \neq 0$ ならばつねに $W = V$である．$\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ は係数達の連続函数なので，連続な，コンパクト台をもつ解が存在するような区間が ℓ_3上 (3/8, 1/8) の近くにある．この区間の$\delta \neq 0$ の点では最大 Hölder 指数は $-\log_2 \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ である．δが 0 に近づくとこの指数は$\delta = 0$ に対応する$-\log_2 \hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V)$ すなわち $-\log_2 5/8$ に近づく．しかし $\delta = 0$ における最大 Hölder 指数は $-\log_2 \hat{\rho}(T_0|_W, T_1|_W) = -\log_2 1/2 = 1$ である．従って最大 Hölder 指数は領域$\hat{\rho}(T_0|_V, T_1|_V) < 1$ においてさえ係数達の連続函数ではないということになる．

最後の例として点 $(-1/16, 0)$ を考えよう．これは Dubuc [Du] による初期の論文で詳しく研究されたものである．この点は (c_0, c_1) 平面で最も数多くの和法則 (四つ) を満たすので余分の和法則のもたらす利益を説明するのに役立つであろう．特に $\dim(V^3) = 2$ なので$\hat{\rho}(T_0|_{V^3}, T_1|_{V^3}) = \hat{\rho}(C_0, C_1)$ となる 2×2 行列 C_0, C_1を見付けられる．更に C_0, C_1 は同時エルミート化できて，$\hat{\rho}(C_0, C_1) = 1/4$ となる．よって補題 4.15 で $l = 1$, $n = 3$ とすることで f は微分可能で f'は各指数 $0 \leq \alpha < 1$ をもつ Hölder 連続函数であることがわかる．この同じ結果を二つの「余分な」和法則を用いずに，定理 4.12 で $n = 1$ とすることで得られるが，この場合は 2×2 ではなく 4×4 行列を必要とするというのは $W^1 = V^1$はこの場合 4 次元だからである．しかしこの次元の大きさは f' が指数 1 の Hölder 連続性をもつかどうかを決定するのに必要である．特に若干

の計算の後 $\hat{\rho}(T_0|_{V^1}, T_1|_{V^1}) = 1/4$ であることが分かり，定理 4.12 より $\alpha = 1$ が許される必要十分条件は $4T_0|_{V^1}$, $4T_1|_{V^1}$が積有界であることである．しかし $T_0|_{V^1}$ の固有値は 1/4, 1/8 そして $-1/16$ で 1/4 は重複度 2 の退化した固有値である．従って適当な基底変換の後， $T_0|_{V^1}$は次のジョルダン様準形に直される

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/16 \end{pmatrix}$$

よって $k \to \infty$ のとき $\left\|(4T_0|_{V^1})^k\right\| \to \infty$ となる（$\|\cdot\|$はどんなノルムでもよい）．よって $4T_0|_{V^1}$, $4T_1|_{V^1}$は積有界ではなく従って f'は指数 $\alpha = 1$ をもつ Hölder 連続函数ではない．(特に f は 2 回微分可能でははない．) このことはより小さな行列 $T_0|_{V^3}$, $T_1|_{V^3}$を調べるだけでは分からない．何故なら固有値 1/4 の退化性を無視しているからである．実際 $4T_0|_{V^3}$, $4T_1|_{V^3}$ は同時エルミート化できるので積有界である．これらの結果は我々が示した諸定理から得られる最大限であるが Dubuc [Du] は直接的に f' が次の意味で「殆ど Lipschitz」であることを示した．すなわち，ある定数と $C > 0$ が存在して

$$|f'(x) - f'(y)| \le C|\log|x-y||\,|x-y|$$

ということ．Daubechies と Lagarias [DL2] は同じ結果が小さな行列 $4T_0|_{V^3}$, $4T_1|_{V^3}$の積有界性から従うことを示した．もっと一般に，彼らは次のことを示した．すなわち，補題 4.15 の仮定が満たされ，もし $\hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n}) = 2^{-l-1}$ で $\theta = \hat{\rho}(T_0|_{V^n}, T_1|_{V^n})$ に対して $\theta^{-1}T_0|_{V^n}$, $\theta^{-1}T_1|_{V^n}$ が積有界ならば， $f^{(l)}$ は殆ど Lipschitz であるということである．函数の局所的性質に関する Daubechies と Lagarias [DL2] の結果はこのスケーリング函数 fによって満たされる性質をさらに精密化するのに使われ得る．

参考文献

[B]　M.A. Berger. 1993. "Lectures on wavelets," preprint.

[BW1]　M.A. Berger and Y. Wang. 1992. "Bounded semi-groups of matrices," *Lin. Alg. Appl.* **166**: 21–27.

[BW2]　M.A. Berger and Y. Wang. 1993. "Multi-scale dilation equations and iterated function systems," *Constr. Approx.*, to appear.

[CDaMi]　A. Cavaretta, W. Dahmen, and C.A. Micchelli. 1991. "Stationary Subdivision," *Mem. Amer. Math. Soc.* **93**: 1–186.

[CoDF]　A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. 1992. "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **65**: 485–560.

[ColHe1]　D. Colella and C. Heil. 1992. "The characterization of continuous, four-coefficient scal-

ing functions and wavelets," *IEEE Trans. Inf. Th., Special Issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis* **38**: 876–881.

[ColHe2] D. Colella and C. Heil. 1992. "On the characterization of continuous scaling functions," Technical Report WP-91W00476, McLean, Va.: The MITRE Corporation.

[ColHe3] D. Colella and C. Heil. 1993. "Characterizations of scaling functions, I. Continuous solutions," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, to appear.

[ColHe4] D. Colella and C. Heil. 1993. "Characterizations of scaling functions, II. Distributional and functional solutions," in preparation.

[D1] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[D2] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[DL1] I. Daubechies and J. Lagarias. 1991. "Two-scale difference equations: I. Existence and global regularity of solutions," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 1388–1410.

[DL2] I. Daubechies and J. Lagarias. 1992. "Two-scale difference equations: II. Local regularity, infinite products and fractals," *SIAM J. Math. Anal.* **23**: 1031–1079.

[DeDu] G. Deslauriers and S. Dubuc. 1989. "Symmetric iterative interpolation processes," *Constr. Approx.* **5**: 49–68.

[Du] S. Dubuc. 1986. "Interpolation through an iterative scheme," *J. Math. Anal. Appl.* **114**: 185–205.

[DyLe] N. Dyn and D. Levin. 1990. "Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces," in *International Series of Numerical Mathematics*, **94**, Boston: Birkhäuser, pp. 91–106.

[DyGLe] N. Dyn, J.A. Gregory, and D. Levin. 1991. "Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design," *Constr. Approx.* **7**: 127–147.

[E] T. Eirola. 1992. "Sobolev characterization of solutions of dilation equations," *SIAM J. Math. Anal.* **23**: 1015–1030.

[H] A. Haar. 1910. "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme," *Math. Ann.* **69**: 331–371.

[He] C. Heil. 1993. "Methods of solving dilation equations," in *Proc. of the 1991 NATO ASI on Prob. and Stoch. Methods in Anal. with Appl.*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., J.S. Byrnes, ed., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, to appear.

[HeS] C. Heil and G. Strang. 1993. "Continuity of the joint spectral radius," in *Proc. of the Workshop on Linear Algebra for Signal Processing*, Institute for Mathematics and its Applications, to appear.

[LW] J.C. Lagarias and Y. Wang. 1993. "The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices," preprint.

[La] W. Lawton. 1990. "Tight frames of compactly supported affine wavelets," *J. Math. Phys.* **31**: 1898–1901.

[M] S.G.Mallat. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for L2," *Trans.Amer.Math.Soc.* **315**: 69–87.

[Me] Y. Meyer. 1985–1986. "Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opératers, " *Séminaire Bourbaki* **662**.

[MiP1] C.A. Micchelli and H. Prautzsch. 1987. "Refinement and subdivision for spaces of integer translates of compactly supported functions," in *Numerical Analysis*, D.F. Griffith

and G.A. Watson, eds., New York: Academic Press, pp. 192–222.

[MiP2] C.A. Micchelli and H. Prautzsch. 1989. "Uniform refinement of curves," *Lin. Alg. Appl.* **114/115**: 841–870.

[R1] O. Rioul. 1993. "Simple regularity criteria for subdivision schemes," *SIAM J. Math. Anal.*, to appear.

[R2] O. Rioul. 1993. "Simple, optimal regularity estimates for wavelets," preprint.

[RoS] G.C. Rota and G. Strang. 1960. "A note on the joint spectral radius," *Kon. Nederl. Akad. Wet. Proc. A* **63**: 379–381.

[S] G. Strang. 1989. "Wavelets and dilation equations: a brief introduction," *SIAM Rev.* **31**: 614–627.

[V1] L. Villemoes. 1993. "Energy moments in time and frequency for two-scale difference equations," *SIAM J. Math. Anal.*, to appear.

[V2] L. Villemoes. 1993. "Wavelet analysis of two-scale difference equations," preprint.

[W] Y. Wang. 1993. "On two-scale dilation equations," preprint.

第 5 章　局所フーリエ基底について

Pascal Auscher

【概要】 我々は， Wilson 基底の理論の新しい，自己完結的な解説から話をはじめる．Wilson 基底は，優れた時間-周波数局在性を持つことのできるガボール系を変形したものである．時間上でコンパクトサポートである Wilson 基底の一例を与える．Malvar（あるいは Coifman や Meyer）基底を紹介した後，局所フーリエ基底の一般的な概念を述べる．我々は，この概念が Wilson 基底と Malvar 基底を含むことを示す．

5.1　はじめに

R.Balian と F.Low ([B], [L]) による有名な定理（Balian-Low の定理）は,「優れた」ガボールウェーブレットによる $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底が存在しないことを示している．これらの関数は，一つの関数 g の位相空間 (phase-space)（例: 時間-周波数平面）内の translation によって得られることを思い出そう．この g は，しばしばウィンドウと呼ばれる．

$$g_{m,n}(x) = e^{2i\pi m\alpha x} g(x - n\beta), \quad m, n \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

ここで α と β は，非負数である．より正確に述べると，$\alpha\beta = 1$ ，かつ $xg(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ あるいは $\xi\hat{g}(\xi) \notin L^2(\mathbb{R})$ のいずれかである場合にのみ，正規直交基底が得られる．ここで$\hat{g}(\xi)$ は g のフーリエ変換であり，$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{2i\pi x\xi}\,dx$ によって定義される．

例えば，適当な α , βと区間の特性関数をウィンドウに選んで基底を得ることはできる．しかし，この不連続関数をコンパクトサポートで滑らかな関数におきかえると基底は得られない．

この定理の否定的な側面を克服しようとして，さまざまな研究が行われた（[DJJo] における導入部参照）．すなわちフレームの理論，不規則な格子の使用，そしてこの論文の中で我々が扱うおそらく最も的確な方法である．それは，次のようにまとめることができる．

> $g_{m,n}$ における指数関数を，直交性を保ち「優れた」ウィンドウを与えるようなやり方でサイン，コサイン関数に置き換えること．

この方法は，最近異なった動機を持つ 2 種類の構成法で成功した．

第 1 の種類は， K.Wilson の発想に従って量子力学の分野からでてきた．彼は，運動学的作用素の研究において，同じオーダーの正負の周波数を見分けるような基底関数は必要がないことに気付いた．そこで彼は，フーリエ領域に局在した一つのピークを持つ関数を使うかわりに，彼は原点 $\xi = 0$ について互いに対称な位置に一つのピークを持つ二つの関数の組合せから得られた基底関数を使用した．我々の文脈では，このやり方は各 m, n に対して $g_{m,n}$ と $g_{-m,n}$を組にすることを意味する．そしてそれらの組み合わせは，指数関数をサインあるいはコサイン関数によって置き換えることに導く．[Wi] と [Setal] による構成は，I.Daubechies, S.Jaffard, J.-L. Journé [DJJo] によって劇的に単純化され，現在 Wilson 基底と呼ばれているものを生みだした．

この論文の最初の部分で，我々は後者のアプローチを再定式化しようと思う．このことで証明が簡単になり，そのような基底を構成するための異なった基準が得られる．得られた例は次に述べる 2 番目の種類の構成と強い類似を示している．

2 番目の構成法はサブバンド符号化の理論より出てきたもので， E.Malvar [M] による．信号処理において，ブロック離散コサイン変換によるブロックの概念は数年間使われていたのだが，一つの重要な問題は，ブロックが重なるときにそれらの間の相互作用を打ち消すことである．Malvar によって提案された解法は，サブバンド符号化のエイリアジング効果が打ち消され，完全な再構成が可能な modulated lapped 変換である.「 Malvar 基底」は R.Coifman と Y.Meyer [CMe] による一般的定式化において，独立に発見された．

これらの 2 種類の構成法は違ったものに見えるが，それらはある「族の絆」を持っている．すなわち,「局所フーリエ基底」と呼ばれる基底の族に属している．このことは，それらの構成法が一般的な枠組みの特別な例と考えることができるのかどうかという問題を提起する．[AWeWic] における局所サイン，コサイン基底の表現を使うことによって，我々はこれが事実であることを示すことができる．これが本章の第 2 部のテーマである．

5.2　Wilson 基底

5.2.1　Daubechies, Jaffard, Journé による結果

表記法を定めることからはじめよう．以下では (5.1) 式において $\alpha = 1$，$\beta = 0.5$ であるとする．関数 $\psi_{\ell,n}$ の族は

$$\begin{cases} \psi_{0,n} = g_{0,2n}, & n \in \mathbb{Z} \\ \psi_{\ell,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{\ell,n} + (-1)^{\ell+n} g_{-\ell,n}), & n \in \mathbb{Z}, \ell = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{5.2}$$

によって定義される．

任意の n に対して求められた関数を計算することにより，

$$\psi_{\ell,n}(x)=\begin{cases} g(x-n) & \ell=0 \\ \sqrt{2}\cos(2\pi\ell x)g\left(x-\frac{n}{2}\right) & \ell>0 \quad \text{かつ} \quad \ell+n \quad \text{が偶数} \\ i\sqrt{2}\sin(2\pi\ell x)g\left(x-\frac{n}{2}\right) & \ell>0 \quad \text{かつ} \quad \ell+n \quad \text{が奇数} \end{cases} \tag{5.3}$$

が導かれる．3 列目の式における数 i は重要ではない．実際，次の結果においては省かれている．

[DJJo] における主要な定理は，以下の通りである．

定理 5.1 $\hat{g}$ を

$$|\hat{g}(\xi)|\le C(1+|\xi|)^{-1-\varepsilon} \qquad \varepsilon>0$$

を満たす実数値関数であるとする．次を仮定する．

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\hat{g}(\xi-\ell)\hat{g}(\xi-\ell-2j)=\delta_{0,j}, \quad j\in\mathbb{Z},\ \xi\in\mathbb{R} \tag{5.4}$$

ここで $\delta_{p,q}$ は Kronecker のデルタである．このとき，$\{\psi_{\ell,n}\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ に対する正規直交基底を生成し，Wilson 基底と呼ばれる．逆にもし $\{\psi_{\ell,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ に対する正規直交基底を生成するならば，(5.4) 式が成り立つ．

この定理はすこし不思議なように思われるが，フレームを用いた解釈が可能である．我々はまず [D] において定義されるような，冗長性 **2** のタイトフレームを思い出す必要がある．この本の Benedetto と Walnut の章には，フレームに関する詳しい内容が述べられている．

さて，A を非負の数としよう． Hilbert 空間 H におけるベクトル $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の族は，もしすべての $f\in H$ に対して

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,e_k\rangle|^2=A\|f\|^2$$

であるならば，冗長性 A のタイトフレームである．

別の言い方をすると，

$$Sf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,e_k\rangle e_k \tag{5.5}$$

で定義されるフレーム作用素は AId に等しい．すべての e_k の大きさが 1 であり，かつ $A=1$ であるならば，実は $\{e_k\}$ が H の正規直交基底であることが容易に確認できる．

我々の例では， $\{g_{m,n}\}$ が冗長性 2 のタイトフレームであることが $\{\psi_{\ell,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる必要十分条件であるということが，[DJJo] の中で示されている．この結果の幾何学的な解釈は，冗長性 2 のタイトフレームは基底を生成するために必要とされる 2 倍のベク

トルを含み，(5.2) 式における線形結合は，この冗長性を取り除いて正規直交基底を作り出す，ということである．

我々はこの事実を，より簡単で直接的に Wilson 基底を構成する方法を得るための出発点にする．特に (5.4) 式は，g 自身について等価な条件によって置き換えられることになる．

5.2.2　簡単なアプローチ

さて，(5.5) 式に定義されるような族 $\{g_{m,n}\}$ のフレーム作用素を，S によって記述しよう．まず始めに，(5.5) 式における収束を正確に定義し，S の有界性を証明する．$S_n f = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle f g_{m,n}\rangle g_{m,n}$ とおく．

命題 5.2　ある $\varepsilon > 0$ に対して $|g(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$ であると仮定しよう．このとき f と $h \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，級数$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle S_n f, h\rangle$ は絶対収束する．さらに，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle S_n f, h\rangle| \le C\|f\|\|h\|$$

が成り立つ，f と h に依存しない定数 C が存在する．

この結果は，g がゆるやかに減衰するという仮定の下で，S が有界であることを示している．この結果は古典的な内容であり，読者の便宜のため証明を述べておく．

f と h を L^2 関数とし，$n \in \mathbb{Z}$ を固定しよう．ここで，

$$\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x-k)\bar{g}\left(x-k-\frac{n}{2}\right)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\bar{g}\left(x-\frac{n}{2}\right)|\,dx < \infty$$

を得る．

$g_n(x) = g\left(x-\frac{n}{2}\right)$ また任意の $L^1(\mathbb{R})$-関数 $u(x)$ について殆ど至るところで $[u](x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(x-k)$ とするならば，$[f\bar{g}_n](x)$ は殆ど至るところで周期的な $L^1(0,1)$-関数であり，その m 番目のフーリエ係数は

$$\int_0^1 [f\bar{g}_n](x)e^{-2i\pi mx}\,dx = \langle f, g_{m,n}\rangle$$

で，与えられる．

それゆえ，パーセバルの公式 によって

$$\begin{aligned}\langle S_n f, h\rangle &= \int_0^1 [f\bar{g}_n](x)\left[g_n\bar{h}\right](x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k,\ell} f(x-k)\bar{g}\left(x-k-\frac{n}{2}\right) g\left(x-\ell-\frac{n}{2}\right)\bar{h}(x-\ell)\,dx\end{aligned}$$

のように与えられる．

さて，ここで n を変えよう．我々は gの減衰条件をまだ使っていなかったが，これを用いると $x \in [0,1]$ において一様に

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\bar{g}\left(x-k-\frac{n}{2}\right) g\left(x-\ell-\frac{n}{2}\right)| \leq C(1+|k-\ell|)^{-1-\varepsilon} \equiv \omega(k-\ell)$$

となる．したがって，

$$\Sigma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle S_n f, h\rangle| \leq C\int_0^1 \sum_{k,\ell} |f(x-k)|\omega(k-\ell)|h(x-\ell)|\, dx$$

となる．

和と積分を交換し，各積分に対して Cauchy–Schwarz の不等式を使うことによって，以下を得る．

$$\begin{aligned}
\Sigma &\leq C\sum_{k,\ell}\left(\int_0^1 |f(x-k)|^2\,dx\right)^{1/2}\omega(k-\ell)\left(\int_0^1 |h(x-\ell)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\sum_k\int_0^1 |f(x-k)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\sum_\ell\int_0^1 |h(x-\ell)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&= C\|f\|\|h\|
\end{aligned}$$

最後の不等式は，数列 $\{\omega(k)\}$ との離散コンボリューションは $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上に有界であるという，単純な事実の結果である．

我々は族 $\{\psi_{\ell,n}\}$ に対するフレーム作用素を導入することもできる．これを R と呼ぶことにしよう．すなわち

$$Rf = \sum_{\ell,n}\langle f, \psi_{\ell,n}\rangle\psi_{\ell,n}$$

である．ここで，(ℓ, n) は $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ の範囲を動く．ここでは立ち入らないが類似のやや込み入った議論によると，g について同じ条件の下で，R は $L^2(\mathbb{R})$ 上の well-defined な有界作要素である．

我々の目的は，$S = 2Id$ であれば必ず $R = Id$ であることを示すことである．それゆえ，$2R$ と S を比較することは当然である．$T = 2R - S$ と仮定すると，次を得る．

補題 5.3

$$Tf = \sum_{m,n}(-1)^{m+n}\langle f, g_{m,n}\rangle g_{-m,n} \tag{5.6}$$

ここで (m,n) は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ の範囲を動く．

証明　$f \in L^2(\mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{aligned}
2Rf &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \langle f, (g_{\ell,n} + (-1)^{\ell+n} g_{-\ell,n}) \rangle (g_{\ell,n} + (-1)^{\ell+n} g_{-\ell,n}) \\
&\quad +2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{0,2n} \rangle g_{0,2n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell \neq 0} \langle f, g_{\ell,n} \rangle g_{\ell,n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell \neq 0} (-1)^{\ell+n} \langle f, g_{\ell,n} \rangle g_{-\ell,n} \\
&\quad +2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{0,2n} \rangle g_{0,2n}
\end{aligned}$$

これは $Sf + Tf$ に等しい．最後の式から Sf を分離すれば，Tf に対する離散公式になる．

∎

次の結果は，S と T を計算するための方法を確立する．

命題 5.4　ある $\varepsilon > 0$ に対して $|g(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$ を仮定する．このとき，$f, h \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

(i)
$$\langle Sf, h \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-k) \Delta_k(x) \bar{h}(x)\, dx$$

ここで，$\Delta_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x-k-n/2) g(x-n/2)$ である．

(ii)
$$\langle Tf, h \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-k-\frac{1}{2}\right) E_k(x) \bar{h}(-x)\, dx$$

ここで，$E_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \bar{g}(x-k-n/2-1/2) g(-x-n/2)$ である．

この命題の (i) は，g についてのより弱い仮定のもとに，D.Walnut [W] によって得られた．

証明　すべての計算が意味をもつように，f と h を シュワルツクラスの関数であると仮定しよう（稠密性により L^2 関数に対する結果が得られる）．命題 5.2 と同じ議論によって

$$\langle Sf, h \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \sum_{k,\ell} f(x-k) \bar{g}\left(x-k-\frac{n}{2}\right) g\left(x-\ell-\frac{n}{2}\right) \bar{h}(x-\ell)\, dx$$

が得られる．ℓ についての和を $\mathbb{R}$ 上の積分に書きかえて，k についての和と n についての和を交換することによって (i) が得られる．

Tの形から，(5.6) 式における係数 $(-1)^{n+m}$に注意すると，m についての和を偶数部分と奇数部分に分ければよいことに気づく．このとき，周期 1/2 の周期化を用いる．$L^1(\mathbb{R})$-関数の u

に対して，$\{u\}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(x-k/2)$ とする．

$$A_n=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\langle f,g_{m,n}\rangle\langle g_{-m,n},h\rangle=\sum_{m:\text{偶数}}-\sum_{m:\text{奇数}}\langle f,g_{m,n}\rangle\langle g_{-m,n},h\rangle$$

とする．$m=2r$ と書くと，

$$\sum_{m:\text{偶数}}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\int_0^{1/2}\{f\bar{g}_n\}(x)e^{-4i\pi rx}\,dx\int_0^{1/2}\{g_n\bar{h}\}(y)e^{-4i\pi ry}\,dy$$

となる．

y を $-y$ に変え，周期 1/2 の周期関数に対してパーセバルの公式を使うことによって，

$$\sum_{m:\text{偶数}}=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\sum_{k,\ell}f\left(x-\frac{k}{2}\right)\bar{g}\left(x-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}\right)g\left(-x-\frac{\ell}{2}-\frac{n}{2}\right)\bar{h}\left(-x-\frac{\ell}{2}\right)dx$$

を得る．

同様に，$m=2r+1$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{m:\text{奇数}} &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\sum_{k,\ell}f\left(x-\frac{k}{2}\right)\bar{g}\left(x-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}\right)e^{-2i\pi(x-k/2)}\\ &\quad\cdot e^{-2i\pi(-x-\ell/2)}g\left(-x-\frac{\ell}{2}-\frac{n}{2}\right)\bar{h}\left(-x-\frac{\ell}{2}\right)dx\end{aligned}$$

となる．

これら二つの積分において，ℓ に関する和を展開し，それらを合計することによって，

$$A_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k:\text{奇数}}f\left(x-\frac{k}{2}\right)\bar{g}\left(x-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}\right)g\left(-x-\frac{n}{2}\right)\bar{h}(-x)\,dx$$

を得る．$\langle Tf,g\rangle=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^nA_n$ であることに注意し，$k=2k'+1$ とすればよい．これで (ii) が証明された． ∎

我々はここで，第 1 番目の結果を述べる準備ができた．

定理 5.5 ある $\varepsilon>0$ に対して $|g(x)|\le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$ を仮定する．このとき，殆ど至るところで $\forall\,k\in\mathbb{Z}$ であるとすると，

$$\Delta_k(x) = 2\delta_{0,k}\quad\text{a.e.}\quad,\forall\,k\in\mathbb{Z} \tag{5.7a}$$

$$E_k(x) = 0\quad\text{a.e.}\quad,\forall\,k\in\mathbb{Z} \tag{5.7b}$$

の 2 条件が満たされることが，$\{\psi_{\ell,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底になるために必要十分条件である．

注意　g についての仮定のもとで，$E_k(x)$ と $\Delta_k(x)$ が有界関数であることが確認できる．さらに，後者は 1/2 の周期をもつ周期関数である．

証明　(5.7) 式が成り立つとする．補題 5.3 と命題 5.4 によって

$$\langle Rf, h\rangle = \langle f, h\rangle$$

となる．これは，$R = Id$ を意味する．それゆえ，$\{\psi_{\ell,n}\}$ は，各 $\psi_{\ell,n}$ の L^2 ノルムが 1 であれば，$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．

$$\|\psi_{0,n}\|^2 = \|g\|^2 = \int_0^{1/2} \Delta_0(x)\,dx$$

であり，また $\ell \neq 0$ であるならば

$$\|\psi_{\ell,n}\|^2 = \|g\|^2 + (-1)^{\ell+n}\mathrm{Re}\langle g_{\ell,n}, g_{-\ell,n}\rangle = \|g\|^2 + (-1)^{\ell+n}\mathrm{Re}\int_0^{1/2} \Delta_0(x)e^{4i\pi\ell x}\,dx$$

となる．それゆえ，ここでは $\Delta_0(x) = 2$ であるから，$\{\psi_{\ell,n}\}$ は単位ベクトルになる．

逆に，$\{\psi_{\ell,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底とすると，$R = Id$ となり，それゆえシュワルツクラスのすべての f , h に対して，

$$\begin{aligned} 2\langle f, h\rangle &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-k)\Delta_k(x)\bar{h}(x)\,dx \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-k-\frac{1}{2}\right)E_k(x)\bar{h}(-x)\,dx \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる．(5.7) 式は，これらの関数として特別な関数を選ぶことで得られる．

$\Delta_q(x)$ は周期 1/2 なので，$x \in [q-1/4, q+1/4]$ のほとんど至るところで $\Delta_q(x) = 2\delta_{0,q}$ であることを示せばよい．h はこの区間にサポートを持ち，f は $[-1/4, 1/4]$ においてサポートされそれ以外では任意であるとする．このとき，(5.8) 式 は等式

$$\int_{q-1/4}^{q+1/4} f(x)\bar{h}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{q-1/4}^{q+1/4} f(x-q)\Delta_q(x)\bar{h}(x)\,dx$$

に帰着される．f と h のサポートの仮定により，左辺の積分は $q \neq 0$ の時 0 となることに注意しよう．ここで f と h は，サポートの仮定を除き任意であるから，(5.7a) 式 が得られる．

式 (5.7b) 式 の証明も，同様のやり方で次の関係を用いて得られる．

$$E_{k-q}(x) = (-1)^q E_k\left(x + \frac{q}{2}\right), \quad k, q \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

詳細は読者に任せることにする．　∎

5.2.3 コンパクトサポートを持つ例

[DJJo] における例は，位置空間と運動量空間の両方で指数的に減衰している．ここでは，位置空間でコンパクトサポートを持つ Wilson 基底の例を，上述の条件から直接得ることにする．

最初に，もし $g(-x)=\bar{g}(x)$，すなわち $\hat{g}$ が実数値であるならば，E_k を定義する級数で添え字を$-n'=n+2k+1$ と変えれば簡単にわかるように，恒等的に $E_k=0$ となることに注意しよう．ここまではサポート条件は必要ない．そこで (5.7a) 式を調べることにしよう．

g が実数値偶関数で，$[-1/2,1/2]$ 内にサポートを持つと仮定する．このとき，$k\neq 0$ に対しては恒等的に $\Delta_k=0$ である．さらに $\Delta_0=2$ の関係は次のようになる．

$$g^2\left(x-\frac{1}{2}\right)+g^2(x)=2,\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \tag{5.9}$$

ここまでくれば，例を作ることは非常に簡単である．$\theta(x)$ を $x\geq 1/4$ に対して $\theta(x)=\pi/4$ となる（増加）奇関数であるとしよう．また，$s(x)=\sin(\theta(x)+\pi/4)$ ，$c(x)=\cos(\theta(x)+\pi/4)$ とする．g を次のように定義する．

$$g(x)=\sqrt{2}s\left(x+\frac{1}{4}\right)c\left(x-\frac{1}{4}\right) \tag{5.10}$$

このように定義された関数は，すべての必要条件を満足する．実際，以下の性質が成り立つ．

1. $s(-x)=c(x)$ （$\theta(x)$ が奇関数であるから）
2. $c(x)$ は $(-\infty,1/4]$ の中にサポートを持つ
3. $x\geq 1/4$ に対して $s(x)=1$

それゆえ，性質 1，2 は g が $[-1/2,1/2]$ 内にサポートをもつ偶実関数であることを意味する．また (5.9) 式は性質 1 と 3 ，そして 恒等式 $\cos^2 u+\sin^2 u=1$ に従う．もちろん θが C^∞ 関数なら， g も C^∞ 関数である．以上を要約すると，次のようになる．

定理 5.6　関数の集合

$$\psi_{\ell,n}(x)=\begin{cases} g(x-n), & n\in\mathbb{Z}\ \text{かつ}\ \ell=0 \\ \sqrt{2}\cos(2\pi\ell x)g\left(x-\frac{n}{2}\right), & \ell>0,\ n\in\mathbb{Z}\ \text{かつ}\ \ell+n\ \text{は偶数} \\ \sqrt{2}\sin(2\pi\ell x)g\left(x-\frac{n}{2}\right), & \ell>0,\ n\in\mathbb{Z}\ \text{かつ}\ \ell+n\ \text{は奇数} \end{cases}$$

が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を生成するような，コンパクトサポート $\mathbb{C}^\infty$実数関数 gが存在する．このような関数は (5.10) 式によって定義され， $[-1/2,1/2]$ 内にサポートを持つ．

5.2.4　対称性

定理 5.1 と定理 5.5 の記述は，(5.4) 式と (5.7a) 式が同値であることを示唆している．事実これは正しく，これは [DJJo] で使われている方法と我々の手法を関連づける．

命題 5.7　g を L^2 関数で $h = \hat{g}$ とせよ．このとき，以下の 2 式は同値である．

$$\Delta_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}\left(x-k-\frac{n}{2}\right) g\left(x-\frac{n}{2}\right) = 2\delta_{0,k} \quad \text{a.e.} \quad ,\forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{5.11a}$$

$$D_m(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \ell \bar{h}(\xi-\ell) h(\xi-\ell-2m) = \delta_{0,m} \quad \text{a.e.} \quad ,\forall\, m \in \mathbb{Z} \tag{5.11b}$$

証明　$\Delta_k(x)$ と $D_m(\xi)$ は，周期的で局所可積分な関数であることに注意せよ．それらのフーリエ係数を計算しよう．フーリエ積分にパーセバルの等式を使うことによって，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \Delta_k(x) e^{-4i\pi m x}\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x-k) g(x) e^{-4i\pi m x}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\xi) e^{-2i\pi k \xi} h(\xi-2m)\, d\xi = \int_0^1 D_m(\xi) e^{-2i\pi k\xi}\, d\xi\end{aligned}$$

求める同値性は，これから直ちに得られる．∎

この結果もまた，Wilson 基底のおもしろい対称性を示している．

命題 5.8　関数 g と $\hat{g}$ は関数で，以下の条件を満足すると仮定する．

$$|g(x)| + |\hat{g}(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$$

このとき，以下の内容は同値である．

***i*.** 関数の集合

$$\begin{cases} g(x-n), & n \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{2}\cos(2\pi\ell x) g\left(x-\frac{n}{2}\right) & \ell > 0,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad \ell+n \text{ は偶数} \\ \sqrt{2}\sin(2\pi\ell x) g\left(x-\frac{n}{2}\right) & \ell > 0,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad \ell+n \text{ は奇数} \end{cases}$$

は，$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である．

ii. 関数の集合

$$\begin{cases} \hat{g}(x-2\ell) & \ell\in\mathbb{Z} \\ \sqrt{2}\cos(\pi nx)\hat{g}(x-\ell) & n>0,\ \ell\in\mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad n+\ell \text{は偶数} \\ \sqrt{2}\sin(\pi nx)\hat{g}(x-\ell) & n>0,\ \ell\in\mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad n+\ell \text{は奇数} \end{cases}$$

は，$L^2(\mathbb{R})$ に対する正規直交基底を生成する．

証明は，次のような観察に基づく．フーリエ変換は（われわれが導入した定義で $\|f\|=\|\hat{f}\|$ であり）ユニタリなので，集合 $\{e_k\}$ は冗長性 A のタイトフレームであるのは，$\{\widehat{e_k}\}$ について同じことが成り立つ場合であり，またそのときに限る．

i が成り立つとしよう．族 $\{g_{m,n}\}$ に対してこの注意を適用すると，$\{e^{i\pi n\cdot}\hat{g}(\cdot-m)\}$ は冗長性 2 のタイトフレームであることがわかる．そこで，同じやり方で冗長性を取ることができる．そして (5.11b) 式は，集合 ***ii*** が正規直交基底となることを保証する条件となる．逆も，同様に扱われる．

5.3　Wilson 基底と Malvar 基底の一般的な枠組み

「区間上への滑らかな射影」を用いる Malvar 基底の構成法を，簡単に概観する．この「区間上への滑らかな射影」は [AWeWic] に詳細に紹介されており，詳しい証明についてはこれを参照されたい．ここで唯一新しいことは，Wilson 基底がその枠組みの中に入るという点である．このことは，この節の終わりに述べる．ここではすべての関数は実数関数とする．

5.3.1　滑らかな射影の族

i. 区間上のベル

$\varepsilon>0$ とし，$\theta_\varepsilon(x)$ を $x\geq\varepsilon$ で $\pi/4$ の値をとる（増加）奇関数であるとせよ．さらに，

$$c_\varepsilon(x)=\cos\left(\theta_\varepsilon(x)+\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.12}$$

そして

$$s_\varepsilon(x)=\sin\left(\theta_\varepsilon(x)+\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.13}$$

とせよ．$I=[\alpha,\beta]$ を区間であるとし，ε と ε' を $\alpha+\varepsilon\leq\beta-\varepsilon'$ となる非負数とする．このとき，I 上のベル は，次のように定義される．

$$b_I(x)=s_\varepsilon(x-\alpha)c_{\varepsilon'}(x-\beta),\quad x\in\mathbb{R} \tag{5.14}$$

この関数は ε と ε' の選択に依存するが，われわれの記法はこの依存性は示していない．サポートは，区間 $[\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon']$ である．(5.10) 式によって定義される $g(x)$ は，因子 $\sqrt{2}$ を除いて [-1/4, 1/4] 上でのベルである．

ii. *I* 及び極点（**polarity**）上への 4 つの滑らかな射影

b_I を I 上でのベルとせよ．

$$\begin{aligned}(P_I f)(x) \quad &= \quad b_I^2(x)f(x) \pm b_I(x)b_I(2\alpha - x)f(2\alpha - x)\\ &\quad \pm b_I(x)b_I(2\beta - x)f(2\beta - x) \qquad (5.15)\end{aligned}$$

で定義される作用素は，直交射影である．おおざっぱにいえば，P_I は I の特性関数をかけるという作用素の滑らかなバージョンである．実際には，我々が P_I のあるいは I それ自体の極性と呼んでいる各端点での符号に応じての四つの作用素を定義した．もし端点の一つが無限大であるならば，(5.15) 式の中の対応する項はない．

iii. 両立的隣接区間と融合性

[AWeWic] における用語を簡略にするため，二つの隣り合った区間 $I=[\alpha,\beta]$ と $J=[\beta,\gamma]$ はそれらのベルが共通のε' を用いて

$$b_I(x) = s_\varepsilon(x-\alpha)c_{\varepsilon'}(x-\beta), \qquad b_J(x) = s_{\varepsilon'}(x-\beta)c_{\varepsilon''}(x-\gamma)$$

によって与えられるとき，両立的であるということにする．

関数 $c_\varepsilon(x)$ と $s_\varepsilon(x)$ の性質より，両立的な二つの区間のベルを融合して合併区間上のベルを作ることができる．すなわち，

$$b_I^2(x) + b_J^2(x) = b_{I\cup J}^2(x)$$

このことから次の結果が得られる．

命題 5.9　$I=[\alpha,\beta]$ と $J=[\beta,\gamma]$ が両立的な区間であり，P_I, P_J が β において反対極性を持つと仮定する．このとき，射影はお互いに直交し，$P_I + P_J = P_{I\cup J}$ となる．

系 5.10　$\mathcal{I}=\{I\}$ を，隣接した両立的な区間による実数全体の被覆であるとしよう．$\{P_I\}$ をこの被覆に伴う射影の族とする．もし $\mathcal{I}$ に属する隣接区間に伴うすべての射影の組が，それらの共通した端点で反対の極性を持つならば，空間 $\mathcal{H}_I = P_I L^2(\mathbb{R})$ は互いに直交し，

$L^2(\mathbb{R})$ はこれら $\mathcal{H}_I$ の直和となるる．すなわち，

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_{\mathcal{I}}$$

である．

iv. 値域空間の記述

$\alpha \in \mathbb{R}$ としよう．もしそのグラフが垂直線 $x = \alpha$ に関して対称，すなわち $f(2\alpha - x) = f(x)$，であるならば，関数 $f(x)$ は定義より α で極性は + である．同様にそのグラフが 点 $(\alpha, 0)$ に関して対称，すなわち $f(2\alpha - x) = -f(x)$ であるならば，関数 $f(x)$ は定義より α で極性は−である．

命題 5.11　I を区間であるとしよう．このとき，$f \in \mathcal{H}_I$であるための必要十分条件は $f = b_I S$ であることである．ここで S は，端点で I と同じ極値を持つ $L^2(\mathbb{R})$ の関数である．さらに，$f_1 = b_I S_1 \in \mathcal{H}_I$ かつ $f_2 = b_I S_2 \in \mathcal{H}_I$ であるならば，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} S_1(x) S_2(x)\, dx \tag{5.16}$$

である．(5.16) 式 は，S の Iへの制限，$\mathcal{S}_I(f) = S|_I$ が $\mathcal{H}_I$ から $L^2(I)$ の上への等長変換であることを示している． $S \in L^2(I)$, に対する逆変換は，$\mathcal{S}_I^{-1}(S) = b_I S^I$ によって定義される．ここで S^I は S の I の外への拡張で，端点で I と同じ極性を持つものである．

この記述は，$L^2(I)$ での直交フーリエ級数展開を用いて正規直交基底によって $\mathcal{H}_I$ をさらに解析するための鍵となる．

5.3.2 局所フーリエ基底

i. 極性 $(\pm, \pm)$ の $L^2(I)$ のフーリエ基底

区間 $I = [\alpha, \beta]$ に対し，$\hat{I}$ を長さ $4|I|$（$|I|$は Iの長さを意味する）で中央が α の区間とする．b_I は $\hat{I}$ 内にサポートを持つので，さらに S^I (上記参照のこと) は，$\hat{I}$ の外側で周期的に拡張され，周期 $4|I|$ を持っているものとする．このことは $b_I S^I$ を変えない．

関数 S^I は，このとき次の（$L^2(\hat{I})$ の）基底によるフーリエ級数に展開することができる．すなわち，

$$\mathcal{B} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{|I|}}, \sqrt{\frac{2}{|I|}} \cos k \frac{\pi}{2|I|}(x - \alpha), \sqrt{\frac{2}{|I|}} \sin k \frac{\pi}{2|I|}(x - \alpha) \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

これらの関数は $L^2(I, dx)$ における単位ベクトルになるように正規化されていることに注意しよう．これらすべての関数は，I の端点で四つの可能な極性のうちの一つをもつ．われわ

れは，集合 $\mathcal{B}$ を四つの部分集合すなわち極性 $(\pm,\pm)$ をもつフーリエ基底に分割する．各々は $L^2(I)$ の正規直交基底である．

ii. 区間上の局所フーリエ基底

$I=[\alpha,\beta]$ を，$(-,+)$ の極性を持つ区間であるとしよう．ユニタリ作用素 $\mathcal{S}_I^{-1}$ は，極性 $(-,+)$ をもつフーリエ基底を，$\mathcal{H}_I$ の正規直交基底，すなわち，

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|I|}}b_I(x)\sin\frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{|I|}(x-\alpha)\right\},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

に写像する．これは，I 上の $(-,+)$-局所フーリエ基底である．他のものを求めるために，我々は極性の異なる三つの選択それぞれについて同じ極性をもつフーリエ基底を考える．

I 上の $(+,-)$-局所フーリエ基底は，

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|I|}}b_I(x)\cos\frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{|I|}(x-\alpha)\right\},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

である．

I 上の $(+,+)$-局所フーリエ基底は，

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{|I|}}b_I(x),\sqrt{\frac{2}{|I|}}b_I(x)\cos k\frac{\pi}{|I|}(x-\alpha)\right\},\quad k=1,2,\ldots.$$

である．

そして，I 上の $(-,-)$-局所フーリエ基底は，

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{|I|}}b_I(x)\sin k\frac{\pi}{|I|}(x-\alpha)\right\},\quad k=1,2,\ldots.$$

である．

5.3.3　$L^2(R)$ に対する局所フーリエ基底：Malvar 基底と Wilson 基底

系 5.12 と区間上の局所フーリエ基底の上記の議論から，多様な $L^2(\mathbb{R})$ の局所フーリエ基底が得られる．このためには，隣接した両立性をもつ区間によって実数を被覆し，その各区間において同じ極性をもつ局所フーリエ基底を選べばよい．

基底を二つのタイプに分けよう．最初のタイプは，すべての区間がそれらの端点で異なる極性をもつものである．それは，すべてに対して $(-,+)$ あるいは $(+,-)$ になるであろう．$(-,+)$ の場合は局所サイン基底が得られ，$(+,-)$ の場合は局所コサイン基底が得られる．これらの基

底は Malvar 基底である（Coifman と Meyer の意味による．Malvar は適当な間隔で基底関数がサンプリングされるような離散したアナログを構成する）．

2 番目のタイプでは，全区間がその端点で同じ極性をもつ．このとき，極性の組み合わせは，必然的に $(+,+)$ か $(-,-)$ の二者択一である．定理 5.6 の Wilson 基底は，局所フーリエ基底のこのタイプの一例である．

$I_n = [-1/4 + n/2, 1/4 + n/2], n \in \mathbb{Z}$ とせよ．n が偶数の I_n に対しては極性は $(+,+)$，n が奇数の I_n に対しては極性は $(-,-)$ としよう．このとき，われわれは隣接した両立性のある区間による $\mathbb{R}$ の被覆を得る．

第一の観察は，I_n 上のベル b_n は必然的に $b_n(x) = b_0\left(x - \frac{n}{2}\right)$ という形を持たなければならないということである．そこで I_n 上の局所フーリエ基底をよく調べてみよう．並進不変性によって，$n=0$ と $n=1$ を考えればよい．

$n=0$ に対して，恒等式

$$2b_0(x)\cos 2k\pi\left(x+\frac{1}{4}\right) = 2b_0(x)\begin{cases} (-1)^{[k/2]}\cos 2k\pi x, & k\text{が偶数の場合} \\ (-1)^{[k/2]+1}\sin 2k\pi x, & k\text{が奇数の場合} \end{cases} \tag{5.17}$$

が成り立つ．そして，$n=1$ に対して

$$2b_1(x)\sin 2k\pi\left(x-\frac{1}{4}\right) = 2b_0\left(x-\frac{1}{2}\right)\begin{cases} (-1)^{[k/2]}\sin 2k\pi x, & k\text{が偶数の場合} \\ (-1)^{[k/2]+1}\cos 2k\pi x, & k\text{ が奇数の場合} \end{cases} \tag{5.18}$$

が成り立つ．ここで $[u]$ は u の整数部分を表す．

(5.17) 式，(5.18) 式において，左辺の項は，区間 I_n による被覆に伴う局所フーリエ基底の要素である．$g(x) = \sqrt{2}b_0(x)$ とおくことによって，右辺は-1 ベキを除いて定理 5.6 における Wilson 基底の要素である．(5.3) 式における添字をつけかえれば，容易にこれらの基底が絶対値が 1 の因子を除いて一致することがわかる．

I_{2n} に対して $(-,-)$，I_{2n+1} に対して $(+,+)$ の極性を持つ同じ被覆を用いれば，(5.2) 式の $(-1)^{\ell+n}$ を $(-1)^{\ell+n+1}$ に，$g_{0,2n}$ を $g_{0,2n+1}$ に置き換えた Wilson タイプの基底が得られる．

5.4 結論

われわれは，E.Laeng [La] が彼の論文で Wilson タイプの基底の族を構成していたことを指摘したいと思う．彼は，周波数領域が，必ずしも同じサイズでない対称的な区間の族によって被覆されているとした．(これらの構成のすべてにおいて周波数領域と時間領域を交換できることに注意しよう．例えば命題 5.8 を参照のこと.) 彼の構成が，まさに 2 番目のタイプの局所フーリエ基底と呼ばれるものである．

もう一つの注は，局所フーリエ基底のこの 2 番目のタイプが，局所コサイン（あるいはサイ

ン）基底の洗練されたものとして見ることもできる，ということである．被覆の各区間 I を二つの区間に分割する．すなわち I が $(+,-)$ であるときは，$(+,+)$ である左の部分が $(-,-)$ である右の部分に（I が $(-,+)$ のときは $(-,-)$ と $(+,+)$ に）分割する．これは，局所コサイン（サイン）基底が，基底の集合においてある意味で一般的であり，他の基底では「テーマのバリエーション」にすぎないということを意味する．

結局，この本は主にウェーブレット理論を扱っているので，ここで記述している話題とウェーブレットのつながりに言及しておくことが必要であろう．局所フーリエ基底とウェーブレット基底の間には強い関係がある．より正確にいえば，Lemarié と Meyer のウェーブレット基底はいくつかの局所フーリエ基底から得ることができる．このことを示す計算は [AWeWic] に与えられている．A.Bonami, F.Soria , G.Weiss [BoSoWe] による最近の研究では，ある意味において逆も真であることが示されている．すなわち「帯域限定的」なウェーブレットの正規直交基底を構成するための条件は，局所フーリエ基底が満たされなければならない条件を含んでいる．

参考文献

[AWeWic] P. Auscher, G. Weiss, and M.V. Wickerhauser. 1992. "Local sine and cosine basis of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui ed., Boston: Academic Press, pp. 237–256.

[B] R. Balian. 1981. Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mecanique quantique, *C. R. Acad. Sci.*, sér. 2 **292**(20): 1357–1362.

[BoSoWe] A. Bonami, F. Soria, and G. Weiss. 1993. "Band-limited wavelets," preprint, Washington University.

[CMe] R.R. Coifman and Y. Meyer. 1991. "Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre," *C. R. Acad. Sci.*, sér. 1 **312**: 259–261.

[D] I. Daubechies. 1990. "The wavelet transform, time- frequency localization and signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory* **36**: 961–1005.

[DJJo] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journé. 1991. "A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 554–572.

[L] F. Low. 1985. "Complete sets of wave-packets," in *A Passion for Physics: Essays in Honor of Geoffrey Chew*, Singapore: World Scientific, pp. 17–22.

[La] E. Laeng. 1990. "Une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ dont les éléments sont bien localisés dans l'espace de phase et leurs supports adaptés à toute partition symétrique de l'espace des fréquences," *C. R. Acad. Sci.*, sér. 2 **311**: 677–680.

[M] H. Malvar. 1990. "Lapped transform for efficient transform/subband coding," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process* **38**: 969–978.

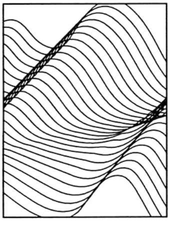
[Setal] D.J. Sullivan, J.J. Rehr, J.W. Wilkins, and K.G. Wilson. 1987. "Phase-space Wannier functions in electronic structure calculations," preprint, Cornell University.

[W] D. Walnut. 1992. "Continuity properties of the Gabor frame operator," *J. Math. Anal. Appl.* **165**: 479–504.

[Wi] K.G. Wilson. 1987. "Generalized Wannier functions," preprint, Cornell University.

第 2 部

ウェーブレットと信号処理



第6章　サンプリング定理, φ-変換と $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{T}, \mathbb{Z}_N$ に対するシャノンウェーブレット

Michael Frazier and Rodolfo Torres*

【概要】 われわれは B-横断集合に台をもつフーリエ像をもつ関数に対するサンプリング定理を与える．われわれの結果は古典的なシャノンのサンプリング定理の拡張である．応用として φ-変換恒等式と，シャノンウェーブレットと呼ばれる簡単な正規直交ウェーブレットを得ることができる．この結果は，$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}_N$ の上で得られる．

6.1　導入

古典的なシャノンのサンプリング定理 ([S]) は，信号解析の基本的な結果である．われわれは横断性の概念に基づいてその一般化をおこなう．サンプリングについて得られた結果から，関数の φ-変換表現 ([FrJa1], [FrJa2]) と正規直交ウェーブレットの簡単な例，つまりシャノン基底が得られる ([FrJaW], [FrKu])．この一連のアイディアを主に工学的に興味ある設定下，つまり実数 $\mathbb{R}$(6.2 節), 整数 $\mathbb{N}$(6.3 節), 円周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$(これを通常どおり $[-\pi, \pi)$ と同一とみなす)(6.4 節), 2 のべき乗である N を法とする整数 $\mathbb{Z}_N = \{n \in \mathbb{Z} : -N/2 \leq n \leq N/2 - 1\}$ (6.5 節) で与える．

記法は設定に応じて理解することとする．つまり，例えばフーリエ変換の記号 "∧" は節ごとに意味が異なる．6.2 節から 6.5 節の議論は平行しているが独立に述べられている．しかし，後の節では前の節に類似した詳細は省かれている．簡単のため一次元のみを考えるが，高次元への拡張は直接的にできる．

この章は，部分的には本書の次の 2 章 ([B2], [FGr]) の背景となる教育的な導入として書かれている．ここで出てくるほとんどの (おそらくは全ての) サンプリング公式はよく知られているものである．サンプリングに関する優秀な概説論文として [H] があり, この論文はさらに詳しい情報と歴史を与える．われわれの例のいくつかは，その中のものと一致する ([H], pp. 73–74 を見よ)．主要となる横断性の概念を用いるときには，やはり重要な参考文献である [P] に全面

*第一著者は一部 NSF Grant DMS-8705935 の補助を得ている．第二著者は一部 NSF Grant DMS-8806727 の補助を得ている．

的にしたがった．サンプリング理論に関しては他によい文献として [J], [Bu], [K], [B1], [G] などがある．

また，この章では本書の序章の 0.2 節で述べたウェーブレットの動機付けとなるいくつかの注意について詳しく述べている．サンプリング定理は関数の分解公式を生み出す．序章において注意したように，このような公式には実空間と周波数空間の両方の局所化があることが望ましい．我々の示すサンプリング公式を用いると，各設定の下で φ-変換恒等式を得ることができるが，これは実空間-周波数空間局所化のよいほとんど直交な展開である．このような考えは $\mathbb{R}$ については以前に十分に追求されている ([FrJa1] , [FrJa2]) が，他の設定下ではいくつかの点で新しい (ただし [Ku], [KuFu], [T] を見よ)．

サンプリングに関する結果から各設定下でシャノンの直交ウェーブレット基底が得られる ($\mathbb{R}$ については [FrJaW] を，$\mathbb{Z}_N$ については [FrKu] を見よ)．この基底は周波数空間についてはよく局所化されているが実空間についてはそうではない．このことが正規直交性や，ある場合には二重の局所化を実現するために新しい方法を用いるウェーブレット理論の動機付けとなる．$\mathbb{R}$ に関するウェーブレットの方法は第 1 章で ([St])，$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_N$については第 2 章で ([FrKu]) 示されている．単位円 $\mathbb{T}$ については [M1] と [Ho] の周期的ウェーブレットを見よ．われわれはウェーブレットについての背景，歴史と参考文献について言及しておく．

局所コンパクトなアーベル群 (LCAG) をよく知っている読者は，上の四つの設定に類似した結果が存在することに驚かないだろう．われわれは平行して議論を進めるが，それが一般の読者に対して各々の設定で同じ基本的な考え方がどのように用いられるかを理解することを助けることを望む．しかしながら 6.6 節では LCAG の場合への一般化を定式化する．これは [K] の発展段階にある LCAG に 関する結果や [H] の p.73 で言い替えられている結果と比較されるべきである．

我々は結果を L^2の関数あるいは信号について与えているが，これはそれが応用上最も興味ある場合であるためである．しかし，このような分解は広い範囲の関数空間を研究するのにも有用である．L^pサンプリングについては [G] を，φ-変換については $\mathbb{R}^n$ の場合には [FrJa1] と [FrJa2] を，$\mathbb{Z}$ の場合には [T] を，$\mathbb{R}^n$ のウェーブレットについては [M2] を参照せよ．

この章は，四つの設定の各々について，サンプリング定理と正規直交ウェーブレットの橋渡しを示すものである．しかし，サンプリング公式を二重局所化の性質をもつ分解を得るために用いるという基本的なアプローチはより深い重要性を持っている．別の状況では，正規直交性を課すことが厳し過ぎるために，ウェーブレットの構成をどのようにまねたらよいかが知られていない．それでもサンプリングによるアプローチはうまくいく可能性がある．その一例としては，[EFr] の $\mathbb{R}^n$ における適切な性質を持った動径成分による動径関数の展開がある．

6.2 実数直線 $\mathbb{R}$

(ルベーグ可測な) 関数 f が $\|f\|_{L^2} = (\int |f(x)|^2 dx)^{1/2} < +\infty$ であるとき，$L^2 = L^2(\mathbb{R})$ に属するという．ここで積分は領域が指定されていないときは $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ とする．フーリエ変換$^\wedge : L^2 \to L^2$ を $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\xi} dx$ により定義する．このとき逆変換 $^\vee : L^2 \to L^2$ は $\check{f}(x) = (2\pi)^{-1} \int f(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ により定義される．$f = (\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge$ ，$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$ が成り立つ．$f, g \in L^2$ に対し $f * g(x) = \int f(x-y) g(y) dy$ とする．すると $(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$ である．また $\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ とする．(可測) 集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ のルベーグ測度を $|E|$ と書き，E 上で 1, その他の点で 0 である関数を χ_E と書く．“a.e. x” という言葉は，測度 0 の集合を除いた全ての x について，という意味で用いられる．関数 f の台とは $\{x : f(x) \neq 0\}$ の閉包で $\operatorname{supp} f$ と書かれる．

$B > 0$ に対し，集合 E が B-横断 であるとは

$$\text{a.e. } x \in \mathbb{R} \text{ に対して} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(x + 2Bn) = 1$$

が成り立つことをいう．これは測度 0 の集合を除いて平行移動 $\{E + 2Bn\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が，その合併集合が $\mathbb{R}$ であるような，互いに素な族を構成することを意味している ($\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $E + \alpha = \{x + \alpha : x \in E\}$)．後で出てくる例は E が B-横断 ならば，変数を取り替えることにより

$$\begin{aligned} |E| &= \int \chi_E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{(2n-1)B}^{(2n+1)B} \chi_E(y) dy \\ &= \int_{-B}^{+B} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_E(x + 2Bn) dx = \int_{-B}^{B} dx = 2B \end{aligned} \tag{6.1}$$

となる．[P] にある次の補題は B-横断性 の概念の重要性を示している．$L^2(E)$ を $\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \subseteq E\}$ とする．

補題 6.1 $E \subseteq \mathbb{R}$ が B-横断であるとする．$k \in \mathbb{Z}$ に対し $e_k \in L^2(E)$ を

$$e_k(x) = (2B)^{-1/2} e^{-ik\pi x/B} \chi_E(x)$$

により定義する．このとき族 $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は $L^2(E)$ の完全正規直交基底である．$F \in L^2(E)$ ならば

$$\langle F, e_k \rangle = \sqrt{\frac{2}{B}} \pi \check{F}(k\pi/B) \tag{6.2}$$

であり，したがって

$$\|F\|_{L^2}^2 = \frac{2\pi^2}{B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\check{F}(k\pi/B)|^2 \tag{6.3}$$

である．

証明　正規直交性を証明するには，(6.1) と同じ変数の取り替えを行い，E の B-横断性を考えると

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k\rangle &= \frac{1}{2B}\int \chi_E(y)e^{i(k-j)\pi y/B}dy \\ &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_E(x+2Bn)e^{i(k-j)\pi(x+2Bn)/B}dx \\ &= \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} e^{i(k-j)\pi x/B}dx = \delta_{jk}\end{aligned}$$

が得られる．完全性については，まず $F \in L^2(E)$ と全ての $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\langle F, e_k\rangle = 0$ を仮定する．$\operatorname{supp} F \subseteq E$ より $F\chi_E = F$ であることに注意して，上のように変数を取り替えれば

$$\text{すべての } k\in\mathbb{Z} \text{ に対して}\quad \int_{-B}^{B}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+2Bn)e^{ik\pi x/B}dx = 0$$

を得る．フーリエ級数についての標準的な完全性に関する結果より，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+2Bn)$ は $L^2([-B,B])$ で 0，したがって $[-B,B]$ 上 a.e. で 0 となる．ところがこの和は $2B$-周期的であるので $\mathbb{R}$ 上 a.e. で 0 となる．$\operatorname{supp} F \subseteq E$ と E が B-横断であることから，関数 $\{F(x+2Bn)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は殆ど互いに交わらない台を持ちしたがってその各々は $\mathbb{R}$ a.e. 上で 0 でなくてはならない．$n=0$ とすると $\mathbb{R}$ a.e. 上で $F=0$ であることがわかる．

式 (6.2) は定義と $F = F\chi_E$ の仮定からただちに導かれる．すると (6.3) は (6.2) と $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(E)$ の完全正規直交基底であることから示される．∎

補題 6.1 はただちに次のサンプリングに関する結果を導く．この結果を述べるためには次の解釈が必要である．$f \in L^2$ であるので $\hat{f} \in L^2$ である．(6.1) より $|\operatorname{supp}\hat{f}| = |E| < +\infty$ であるので，$\hat{f} \in L^1$ を得る．したがって f は a.e. で連続関数 $(\hat{f})^\vee$ と一致する．f をこの連続関数と同じものとみなして f の標本値が well defined であるようにする．

定理 6.2　$E \subseteq \mathbb{R}$ が B-横断であり，$f, g \in L^2$，$\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq E$，$\operatorname{supp}\hat{g} \subseteq E$ であると仮定する．このとき

$$f * g(x) = \frac{\pi}{B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\pi/B)g(x-k\pi/B), \tag{6.4}$$

であり，

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k\pi/B)|^2 \tag{6.5}$$

である．

証明 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を補題 6.1. と同様のものとする．この補題を $F=\hat{f}$ として用いると

$$\hat{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle \hat{f}, e_k\rangle e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sqrt{\frac{2}{B}}\pi f(k\pi/B)e_k$$

を得る．これを $f*g=(\hat{f}\hat{g})^\vee$ に代入すると

$$f*g = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sqrt{\frac{2}{B}}\pi f(k\pi/B)(\hat{g}e_k)^\vee$$

が得られる．フーリエ変換の平行移動に関する性質より $(g(x-k\pi/B))^\wedge = \sqrt{2B}\hat{g}e_k$ である．これを上に用いると (6.4) を得る．Plancherel の公式 $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2$ と (6.3) で $F=\hat{f}$ としたものより (6.5) が導かれる． ▮

系 6.3 E が閉であり，B-横断集合であり，$f\in L^2$，$\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq E$ であるとする．このとき

$$f(x) = \frac{\pi}{B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\pi/B)\check{\chi}_E(x-k\pi/B) \tag{6.6}$$

証明 定理 6.2 で $g=\check{\chi}_E$ とする．(6.1) により $|E|=2B$，したがって χ_E，さらにまた g が L^2 に属することに注意する．$\operatorname{supp}\hat{f}$ 上で $\hat{g}=1$ であるので，$\hat{f}\hat{g}=\hat{f}$，あるいは $f*g=f$ である．したがって定理 6.2 により上の結果が得られる． ▮

例 6.4 (シャノンのサンプリング公式 [S]) $E=[-B,B]$ とする．すると E は B-横断であり $\check{\chi}_E(x) = B/\pi\operatorname{sinc}Bx/\pi$ である．ここで $\operatorname{sinc}x$ は $x\neq 0$ のとき $(\sin\pi x)/\pi x$ で $\operatorname{sinc}0=1$ と定義されるものである．$f\in L^2$ であり $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq E$ であるとしよう．(このような f は工学用語で「帯域限定」である，あるいは数学用語では「指数型」であるといわれる．) すると (6.6) は古典的なシャノンのサンプリング公式

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\pi/B)\operatorname{sinc}\left(\frac{Bx}{\pi}-k\right)$$

を与える．

例 6.5 (円環サンプリング公式) $E=[-B,-B/2]\cup[B/2,B]$ とする．このとき E は $B/2$-横断であり，

$$\check{\chi}_E(x) = \frac{B}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Bx}{2\pi}\right)\left[2\cos\left(\frac{Bx}{2}\right) - 1\right]$$

である．$f \in L^2$ と $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq E$ を仮定する．(6.6) において B を $B/2$ に置き換えて $\check{\chi}_E$に対する公式を使えば

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi/B)\operatorname{sinc}\left(\frac{Bx}{2\pi} - k\right)\left[2\cos\left(\frac{Bx}{2} - k\pi\right) - 1\right] \tag{6.7}$$

という恒等式が得られる．上の f は上のシャノンの公式により表わすこともできるが，その場合 (6.7) の 2 倍の割合で f をサンプリングする必要がある．

このような結果を $\hat{f}$ を横断集合に沿って分割することにより一般の $f \in L^2$ に用いることができる．それを行う 2 通りの方法を記すことにする．一つめは φ-変換公式である．まず初めに L^2 に属する関数 φ と ψ で

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi},\ \operatorname{supp}\hat{\psi} \subseteq [-\pi, -\pi/4] \cup [\pi/4, \pi], \tag{6.8}$$

と

$$\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ に対して } \quad \sum_{v\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{\varphi}(2^{-v}\xi)}\hat{\psi}(2^{-v}\xi) = 1 \tag{6.9}$$

を満たすものを選ぶ．またさらに，$\hat{\varphi}$ と $\hat{\psi}$ が上に有界である，つまり定数 $A_1 > 0$ が存在して

$$\text{すべての}\xi\text{に対して} \quad |\hat{\varphi}(\xi)|, |\hat{\psi}(\xi)| \le A_1 \tag{6.10}$$

となることと，$\hat{\varphi}$ と $\hat{\psi}$ がそれぞれの台のある部分区間上で下に有界である，つまりある $A_2 > 0$ に対して

$$\xi \in [-3\pi/4, -3\pi/8] \cup [3\pi/8, 3\pi/4] \text{ に対して } \quad |\hat{\varphi}(\xi)|, |\hat{\psi}(\xi)| \ge A_2 \tag{6.11}$$

であることを仮定する．このような関数を構成することは難しくない．任意の高階微分が有界であるような $\hat{\varphi}$ と $\hat{\psi}$ を構成することもできる (例えば [FrJaW] の 補題 6.9 を見よ)．$v, k \in \mathbb{Z}$ に対し$\varphi_{vk}(x) = 2^{v/2}\varphi(2^v x - k)$，$\psi_{vk}(x) = 2^{v/2}\psi(2^v x - k)$ とする．

定理 6.6 (φ-変換恒等式 [FrJa1], [FrJa2])　$f \in L^2$ とする．このとき

$$f = \sum_{v,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{vk}\rangle \psi_{vk} \tag{6.12}$$

である．また，全ての $f \in L^2$ に対して

$$c_1\|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{v,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{v,k}\rangle|^2 \leq c_2\|f\|_{L^2}^2 \tag{6.13}$$

となるような定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在する．

証明 $v \in \mathbb{Z}$ に対して $\varphi_v(x) = 2^v\varphi(2^v x)$，$\psi_v(x) = 2^v\psi(2^v x)$ としよう．これは $\hat{\varphi}_v(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-v}\xi)$ と $\hat{\psi}_v(\xi) = \hat{\psi}(2^{-v}\xi)$ と等価である．また $\tilde{\varphi}_v(x) = \overline{\varphi_v(-x)}$ とする．これは $\hat{\tilde{\varphi}}_v = \bar{\hat{\varphi}}_v$ と等価である．両辺のフーリエ変換をとると (6.9) は

$$f = \sum_{v\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}_v * \psi_v * f$$

を意味する．$\mathrm{supp}(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge$ と $\mathrm{supp}\,\hat{\psi}_v \subseteq [-2^v\pi, -2^v\pi/4] \cup [2^v\pi/4, 2^v\pi] \subseteq [-2^v\pi, 2^v\pi]$ に注意せよ．したがって各 v に対して f を $\tilde{\varphi}_v * f$ で，g を ψ_v で置き換え，$E = [-B, B]$ ただし $B = 2^v\pi$ として (6.4) を応用することができる．これにより

$$\tilde{\varphi}_v * \psi_v * f(x) = 2^{-v}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}_v * f(2^{-v}k)\psi_v(x - 2^{-v}k)$$

単純な計算で最後の項が $\sum_k \langle f, \varphi_{vk}\rangle\psi_{vk}$ であることが示される．したがって (6.12) が成り立つ．

(6.13) を証明するためにまず$\sum_{v\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_v(\xi)|^2 \leq c$ となるような $c > 0$ が存在することに注意する．これは，(6.8) と恒等式 $\hat{\varphi}_v(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-v}\xi)$ より，どんなξ に対しても和の中で 0 でない項はたかだか 2 個であることからわかり，したがって (6.10) が有界性を保証する．一方，(6.11) は各 $\xi \neq 0$ に対して $|\hat{\varphi}_v(\xi)| \geq A_2$，したがってある $\tilde{c}$ に対して，全ての $\xi \neq 0$ について$\sum_{v\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_v(\xi)|^2 \geq \tilde{c} \geq 0$ となるような $v \in \mathbb{Z}$ が少なくとも一つ存在することを意味している．したがって $\|\hat{f}\|_{L^2}^2$ と

$$(*) = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{v\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_v(\xi)|^2 d\xi$$

の比は (0 から離れて) 上下に有界であり，その限界は f によらない．しかし $\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f\|_{L^2}^2$ と

$$(*) = \sum_{v\in\mathbb{Z}} \int |(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \sum_{v\in\mathbb{Z}} \|\tilde{\varphi}_v * f\|_{L^2}^2$$

が成り立つ．さらに，(6.5) で $B = 2^{-v}\pi$ とし f を $\tilde{\varphi}_v * f$ で置き換えたものより

$$\|\tilde{\varphi}_v * f\|_{L^2}^2 = 2^{-v}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\tilde{\varphi}_v * f(2^{-v}k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{vk}\rangle|^2$$

である．これらのことを合わせて (6.13) が導かれる． ∎

もし $\hat{\varphi}$ を非常に滑らかに選べば (これは上に示したように可能である) φ は $\pm\infty$ で速く減衰する．より正確には関数 φ_{vk} (同様に ψ_{vk}) に対し任意の $M > 0$ に対して

$$|\varphi_{vk}(x)| \leq c_M \left(1 + \frac{|x - 2^{-v}k|}{2^{-v}}\right)^{-M} \tag{6.14}$$

を得ることができる．ここで c_M は v, k および x によらない．

大雑把にいうと (6.14) は φ_{vk} が $2^{-v}k$ の近くに集中していて 2^{-v}のスケールで速く減衰するのである．同様に (6.8) により

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}_{vk} \subseteq [-2^v\pi, -2^v\pi/4] \cup [2^v\pi/4, 2^v\pi]$$

である．したがって，係数 $\langle f, \varphi_{vk}\rangle$ は $2^v\pi/4$ と $2^v\pi$ の間の大きさの周波数を持つ $2^{-v}k$ 近傍の f の部分を測っているのである．このようにして (6.12) の分解は f の時間空間同時解析となっている．

φ と ψ を同じに選ぶことも可能である．このとき (6.12) は正規直交分解のようにみえる．しかしながら，定理 6.6 で構成された φ_{vk} は直交ではありえない (例えば [FrJaW], §7 を見よ)．サンプリングの方法を用いてシャノンウェーブレットと呼ばれる正規直交基底 $\{\varphi_{vk}\}_{v,k\in\mathbb{Z}}$ を，単一の φ から得る方法は存在する．この方法の欠点は φ_{vk} が速く減衰しないことである．(6.14) は $M \leq 1$ の場合のみ得られる．シャノンウェーブレットの議論については，一般的な正規直交系に関する次の簡単な補題が便利である．

補題 6.7　$\{e_k\}_k$ が可分なヒルベルト空間の 0 でない元を集めたもので，全ての $x \in H$ が $x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k$ のように書けるものとする．このとき

$$\text{すべての } k \text{に対して} \quad \|e_k\| = 1 \tag{6.15}$$

のとき，そのときに限って

$$j \neq k \text{ならば} \quad \langle e_j, e_k\rangle = 0 \tag{6.16}$$

である．

証明　任意の $x \in H$ に対し

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, x\rangle = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$$

が成り立つ．これを $x = e_j$ に用いると

$$\|e_j\|^2 = \sum_k |\langle e_j, e_k\rangle|^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{\{k, k\neq j\}} |\langle e_j, e_k\rangle|^2$$

となり，上の結果となる． ∎

この補題は $x=\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k$ という恒等式があれば，直交集合を定義する二つの条件の一つを確かめるだけでよいということを述べている．$v \in \mathbb{Z}$ に対し $E_v=[-2^{v+1}\pi, -2^v\pi]\cup[2^v\pi, 2^{v+1}\pi]$，$\varphi_v=\check{\chi}_{E_v}$ とする．$\varphi_v(x)=2^v\varphi_0(2^v x)$ に注意しよう．$\varphi_{vk}(x)=2^{v/2}\varphi_0(2^v x-k)=2^{-v/2}\varphi_v(x-2^{-v}k)$ とする．例 6.5 により，これから

$$\varphi_{vk}(x)=2^{v/2}\,\mathrm{sinc}(2^v x-k)[2\cos(2^v\pi x-\pi k)-1]$$

となる．

定理 6.8（シャノン基底） $\{\varphi_{vk}\}_{v,k\in\mathbb{Z}}$ は L^2 の完全正規直交基底である．

証明 $f\in L^2$ に対し，$(\varphi_v * f)^\wedge=\hat{f}\chi_{E_v}$ と a.e. で $\sum_{v\in\mathbb{Z}}\chi_{E_v}=1$ より，$f=\sum_{v\in\mathbb{Z}}\varphi_v * f$ が成り立つ．各 $v\in\mathbb{Z}$ に対して (6.7) で $B=2^{v+1}\pi$ として f を $\varphi_v * f$ で置き換えると

$$f(x)=\sum_{v,k\in\mathbb{Z}}2^{-v/2}\varphi_v * f(2^{-v}k)\varphi_{vk}(x)=\sum_{v,k\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi_{vk}\rangle\varphi_{vk}(x)$$

を得る．各 $v,k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\|\varphi_{vk}\|_{L^2}^2=2^{-v}\|\varphi_v\|_{L^2}^2=(2\pi)^{-1}2^{-v}\|\chi_{E_v}\|_{L^2}^2=1$$

が成り立つことに注意しよう．したがって補題 6.7 により証明は完結する． ∎

6.3 整数 $\mathbb{Z}$

整数上で定義された関数 f，つまり複素数値数列 $f=(\ldots,f(-1),f(0),f(1),\ldots)=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は，もし $\|f\|_{\ell^2}=(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|^2)^{1/2}<+\infty$ が成り立てば $\ell^2=\ell^2(\mathbb{Z})$ に属する．トーラス $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ 上で $L^2=L^2(\mathbb{T})$ を規格化された (ハール) 測度 $dx/2\pi$: $F\in L^2$，$\|F\|_{L^2}=(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2dx)^{1/2}<+\infty$ に関して定義する．F を 周期 2π の $\mathbb{R}$ への拡張 F^* と同一視することもある．つまり F^* とは $[-\pi,\pi)$ 上で F と一致し，全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して $F^*(x+2\pi)=F^*(x)$ を満たすものである．フーリエ変換$^\wedge$: $\ell^2\to L^2$ は$\hat{f}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)e^{inx}$ により定義される．このとき逆変換 $^\vee$: $L^2\to\ell^2$ は$\check{F}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{-inx}dx$ により与えられる．このとき $(\hat{f})^\vee=f$，$(\check{F})^\wedge=F$ が成り立つ．$f,g\in\ell^2$ に対して $f*g(n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}f(n-m)g(m)$ とする．$(f*g)^\wedge=\hat{f}\hat{g}$ が成り立つ．$f,g\in\ell^2$ に対し，$\langle f,g\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\overline{g(n)}$ とし，$F,G\in L^2$ に対し $\langle F,G\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\overline{G(x)}dx$ とする．すると Parseval の関係式は $\langle\hat{f},\hat{g}\rangle=\langle f,g\rangle$ というものになる．特に Plancherel の定理 $\|\hat{f}\|_{L^2}=\|f\|_{\ell^2}$ が成り立つ．$|E|$, χ_E, a.e. x, $\mathrm{supp}\, f$ の記法は 6.2 節と同じである．

(可測) 集合 $E \subseteq \mathbb{T}$ は

$$\text{a.e.}x \in \mathbb{T} \text{ に対して} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \chi_E^*(x + 2\pi n/N) = 1$$

が成り立つときπ/N-横断 $(N \in \mathbb{Z}, N \geq 1)$ であるという．ここで χ_E^* は上に述べたように 2π-周期の χ_E の拡張である．例としては π/N-横断である $E = [-\pi/N, \pi/N]$ や$\pi/2N$-横断である $E = [-\pi/N, -\pi/2N] \cup [\pi/2N, \pi/N]$ がある．E が π/N-横断ならば $|E| = 2\pi/N$ である．

$E \subset \mathbb{T}$ が π/N-横断であることの定義をトーラス $\mathbb{T}$ に自然な方法で定式化した．が，この定義は E を $\mathbb{R}$ の部分集合と考えて，6.2 節の意味で $\mathbb{R}$ 上で π/N-横断であるという叙述と同等である．このことを見るにはまず$\chi_E^*(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi_E(x + 2\pi m)$ より，これを上の定義に代入し，結果が $2\pi/N$-周期的であることに注意して 6.2 節の定義と比較する．これより次の結果が得られるが，これは補題 6.1 での議論と同じ議論によって直接得ることもでき，この補題の自明な結果でもある．

補題 6.9　$E \subseteq \mathbb{T}$ が π/N-横断であるとする．$k \in \mathbb{Z}$ に対し $e_k \in L^2$ を

$$e_k(x) = \sqrt{N} e^{ikNx} \chi_E(x)$$

により定義する．このとき族 $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は $L^2(E) \equiv \{F \in L^2 : \operatorname{supp} F \subseteq E\}$ の完全正規直交基底である．もし $F \in L^2(E)$ ならば，

$$\langle F, e_k \rangle = \sqrt{N} \check{F}(kN) \tag{6.17}$$

であり，したがって

$$\|F\|_{L^2}^2 = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\check{F}(kN)|^2 \tag{6.18}$$

が成り立つ．

証明　定理の前の注意により，補題 6.1 から正規直交性と完全性は導かれる．正規化は $L^2(\mathbb{T})$ のノルムの定義において 2π 異なる分だけ異なる．これに注意すれば (6.17) は直接計算から確かめられ，これらのことから (6.18) が導かれる．∎

これより，離散的な場合のサンプリング定理を得る．

定理 6.10　$E \subseteq \mathbb{T}$ が π/N-横断であり，$f, g \in \ell^2$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$, $\operatorname{supp} \hat{g} \subseteq E$ であるとする．このとき

$$f * g(n) = N \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kN) g(n - kN), \tag{6.19}$$

と

$$\|f\|_{\ell^2}^2 = N\sum_{k\in\mathbb{Z}}|f(kN)|^2 \tag{6.20}$$

が成り立つ．

証明 Plancherel の定理と (6.18) からただちに (6.20) が導かれる．補題 6.9 より

$$\hat{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\hat{f}, e_k\rangle e_k = \sqrt{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(kN)e_k$$

が得られる．これを $f*g=(\hat{f}\hat{g})^\vee$ に代入して $\operatorname{supp}\hat{g}\subseteq E$ と $(\hat{g}e_k)^\vee(n)=\sqrt{N}g(n-kN)$ を用いると (6.20) を得る． ∎

系 6.11 E が閉でありかつ π/N-横断とする．もし $f\in\ell^2$ であり $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq E$ であるならば，

$$f(n) = N\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(kN)\check{\chi}_E(n-kN) \tag{6.21}$$

が成り立つ．

証明 系 6.3 と同様に $g=\check{\chi}_E$ として，定理 6.10 を適用する． ∎

例 6.12 (シャノンのサンプリング公式) $f\in\ell^2$ であり，ある $N\geq 1$ に対して $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq[-\pi/N,\pi/N]$ であるとする．このとき

$$f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}f(kN)\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{N}-k\right)$$

が成り立つ．ただし $\operatorname{sinc}x$ は例 6.4 にでてきたものと同じものである．これは，$[-\pi/N,\pi/N]=E$ が π/N-横断であることと $\check{\chi}_E(n)=\frac{1}{N}\operatorname{sinc}(n/N)$ に注意すれば，系 6.11 から導かれる．

例 6.13 (円環サンプリング公式) $f\in\ell^2$, ある $N\geq 1$ に対し $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq[-\pi/N,-\pi/2N]\cup[\pi/2N,\pi/N]=E$ とする．このとき

$$f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}f(2kN)\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2N}-k\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi n}{2N}-\pi k\right)-1\right] \tag{6.22}$$

が成り立つ．これもまた，E は $\pi/2N$-横断，$\check{\chi}_E(n)=\frac{1}{2N}\operatorname{sinc}(\frac{n}{2N})[2\cos(\frac{\pi n}{2N})-1]$ として系 6.11 の結果である．

φ-変換の ℓ^2 版を以下のようにして定式化することができる．各 v に対して $\varphi_v,\psi_v\in\ell^2$ であ

る列の組 $\{\varphi_v\}_{v=0}^{\infty}$, $\{\psi_v\}_{v=0}^{\infty}$ が許容的な組であるというのは，

$$\text{各 } v \text{ に対して} \quad \operatorname{supp}\hat{\varphi}_v, \operatorname{supp}\hat{\psi}_v \subseteq R_v \equiv [-2^{-v}\pi, -2^{-v}\pi/4] \cup [2^{-v}\pi/4, 2^{-v}\pi] \tag{6.23}$$

$$x \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \text{ に対して} \quad \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\hat{\varphi}}_v(x)\hat{\psi}_v(x) = 1 \tag{6.24}$$

であり，さらに (vによらない) 定数 $A_1, A_2 > 0$ が存在して

$$\text{すべての } x, v \text{ に対して} \quad |\hat{\varphi}_v(x)|, |\hat{\psi}_v(x)| \leq A_1 \tag{6.25}$$

でありかつ

$$\text{もし } x \in T_v \text{ ならば} \quad |\hat{\varphi}_v(x)|, |\hat{\psi}_v(x)| \geq A_2 \tag{6.26}$$

(ただし $T_0 = [-\pi, -3\pi/8] \cup [3\pi/8, \pi]$ であり $v \geq 1$ に対して $T_v = [-3 \cdot 2^{-v-2}\pi, -3 \cdot 2^{-v-3}\pi] \cup [3 \cdot 2^{-v-3}\pi, 3 \cdot 2^{-v-2}\pi]$) であることとする．許容的な組を構成するのは難しくない．各 $v \geq 0$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して関数 $\varphi_{vk}, \psi_{vk} \in \ell^2$ を

$$\varphi_{vk}(n) = 2^{v/2}\varphi_v(n - 2^v k) \quad \text{と} \quad \psi_{vk}(n) = 2^{v/2}\psi_v(n - 2^v k)$$

により定義する．6.2 節と比較すると添え字の付け方が逆になっていることに注意しよう．ここでは $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_v, \hat{\psi}_v$ の点は v が ∞ になるときに 0 となるが，6.2 節では v とともに ∞ となる．

定理 6.14 (ℓ^2 に関する φ-変換恒等式 [KuFu], [T])　$\{\varphi_v\}_{v=0}^{\infty}$, $\{\psi_v\}_{v=0}^{\infty}$ が ℓ^2 における許容的な組であるとする．$f \in \ell^2$ とする．このとき

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{vk} \rangle \psi_{vk} \tag{6.27}$$

である．また，A_1, A_2のみに依存する (6.25) と (6.26) の定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在し，

$$c_1 \|f\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{vk} \rangle|^2 \leq c_2 \|f\|_{\ell^2}^2 \tag{6.28}$$

が成り立つ．

証明　各 v に対して，$\tilde{\varphi}_v(n) = \overline{\varphi_v(-n)}$ とする．これは $\hat{\tilde{\varphi}}_v = \bar{\hat{\varphi}}_v$ と等価である．するとフーリエ逆変換と (6.24) により

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}_v * \psi_v * f$$

を得る．(6.23) より $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge$, $\operatorname{supp}\hat{\psi}_v \subseteq R_v \subseteq [-2^{-v}\pi, 2^{-v}\pi]$ であり，$[-2^{-v}\pi, 2^{-v}\pi]$ は

$N = 2^v$ に対して π/N-横断である．$(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge \in L^2$ であり，したがって$\hat{f} \in L^2$ と (6.25) が成り立つことから$\tilde{\varphi}_v * f \in \ell^2$ であることに注意する．よって定理 6.10 を用いて，各 v に対して

$$\tilde{\varphi}_v * \psi_v * f(n) = 2^v \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}_v * f(2^v k)\psi_v(n - 2^v k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{vk}\rangle \psi_{vk}$$

となることがわかる．これを上の式に代入すると (6.27) が得られる．(6.20), (6.25), (6.26) を用いて (6.28) を，定理 6.6 で (6.13) が得られたのと全く同じ方法で，導くことができる．詳細は省略する． ∎

注意 6.15 6.2 節で，関数 $\hat{\varphi}_v$ は互いのダイレーションであるとした．同様にここでも

$$v \geq 1 \text{ に対して} \hat{\varphi}_v(x) = \hat{\varphi}_1(2^{v-1}x), \qquad \hat{\psi}_v(x) = \hat{\psi}_1(2^{v-1}x) \tag{6.29}$$

を

$$\varphi_v(n) = 2^{-v+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(k)\,\mathrm{sinc}(2^{-v+1}n - k) \tag{6.30}$$

と ψ_v に対しての同様な設定から導くことができる ($v = 0$ の場合は (6.23) と (6.24) が $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ 上で$\bar{\hat{\varphi}}_0 \hat{\psi}_0 = 1$ を意味するので異なる．他の $\hat{\varphi}_v$ と $\hat{\psi}_v$ はそれぞれの台となっている区間の端点で滑らかに 0 となる)．(6.29) から (6.30) を導くために

$$\begin{aligned}\varphi_v(n) &= (\hat{\varphi}_v)^\vee(n) = (2\pi)^{-1}\int_{-2^{-v}\pi}^{2^{-v}\pi} \hat{\varphi}_1(2^{v-1}y)e^{-iny}\,dy \\ &= (2^v\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_1(x)e^{-i2^{-v+1}nx}\,dx.\end{aligned}$$

と書く．$\hat{\varphi}_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_1(k)e^{ikx}$ を代入して簡単な計算をすると (6.30) を得る．もし望むなら各 v に対して $\varphi_v = \psi_v$ と選んでよい．$\hat{\varphi}_v$ と $\hat{\psi}_v$ を滑らか (無限回微分可能) と選んでもよい．このとき関数 φ_{vk} と ψ_{vk} は 2^v のスケールで離れれれば $2^v k$ から 急速に 0 に落ちる (v を $-v$ に置き換えて (6.14) と同様)．すると (6.27) は，(6.12) が $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対してそうであったと同じように，$f \in \ell^2(\mathbb{T})$ の時間空間同時解析を与える．

定理 6.16 (シャノン基底) $v \in \mathbb{Z}, v \geq 1$, 及び $k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\varphi_{vk}(n) = 2^{-v/2}\,\mathrm{sinc}(2^{-v}n - k)[2\cos(2^{-v}\pi n - \pi k) - 1]$$

と定義する．このとき，集合 $\{\varphi_{vk}\}_{v,k\in\mathbb{Z},v\geq 1}$ は ℓ^2 の完全正規直交基底を構成する．

証明 $v \in \mathbb{Z}, v \geq 1$ に対し，$E_v = [-2^{-v+1}\pi, -2^{-v}\pi] \cup [2^{-v}\pi, 2^{-v+1}\pi]$ とする．$\varphi_v = \check{\chi}_{E_v}$ と

すると例 6.13 で $N = 2^{v-1}$ として

$$\varphi_v(n) = 2^{-v}\operatorname{sinc}(2^{-v}n)[2\cos(2^{-v}\pi n) - 1]$$

となる．$\varphi_{vk}(n) = 2^{v/2}\varphi_v(n - 2^v k)$ に注意せよ．$x \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$ について$\sum_{v=1}^{\infty}\hat{\varphi}_v(x) = 1$ であるので，$f \in \ell^2$ に対して $f = \sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v * f$ が成り立つ．すると例 6.13 から

$$\varphi_v * f(n) = 2^v \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_v * f(2^v k)\varphi_v(n - 2^v k)$$

が導かれ，これは $\varphi_v * f = \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \varphi_{vk}\rangle\varphi_{vk}$ を意味する．

$$\text{すべての } v, k \text{に対して } \|\varphi_{vk}\|_{\ell^2}^2 = 2^v\|\varphi_v\|_{\ell^2}^2 = 2^v\|\hat{\varphi}_v\|_{L^2}^2 = 1$$

であるので，上の結果は補題 6.7 より導かれる．　■

$\mathbb{R}$ の場合と同じようにシャノンウェーブレットは正規直交であるが ∞ で $1/n$ のようにしか減衰しないのに対して，φ-変換に対する φ_{vk} は ∞ で急速に減衰するように選ぶことはできるが正規直交でない．導入で注意したようにウェーブレット理論は両方の長所を満たすものである．

6.4　トーラス $\mathbb{T}$

$L^2 = L^2(\mathbb{T})$ の場合は 6.3 節で考えた $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ の場合の双対である．L^2, ℓ^2 とそのノルムや内積については前節と同じ定義を用いる．フーリエ変換の記号は逆にする．$f \in L^2$ に対して$\wedge : L^2 \to \ell^2$ を $\hat{f}(n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ (f の普通のフーリエ係数) により定義し，$F = \{F(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ に対して$\vee : \ell^2 \to L^2$ を $\check{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n)e^{inx}$ により定義する．ここで我々は $f \in L^2$ とその $\mathbb{R}$ への 2π-周期の拡張 (6.3 節で f^* と書かれたもの) を常に同一視する．$f, g \in L^2$ のたたみこみを $f * g(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$ で定義する．このとき $(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$ である．Plancherel の定理は $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ というものである．$E \subseteq \mathbb{Z}$ に対し χ_E は通常どおり E 上で 1, その他で 0 の値をとる関数であり，card E は E の要素の数である．$F \in \ell^2$ に対し $\operatorname{supp} F = \{n \in \mathbb{Z} : F(n) \neq 0\}$ である．

集合 $E \subseteq \mathbb{Z}$ は

$$\text{すべての } k \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_E(k + 2Nn) = 1$$

(ただし $N \in \mathbb{Z}, N \geq 1$) を満たすとき N-横断であるという．$B_N = \{m \in \mathbb{Z} : -N \leq m \leq N-1\}$ とする．このとき B_N は N-横断である．E を任意の N-横断集合としよう．このとき各 $m \in B_N$ に対し，ちょうど一つ $n = n(m) \in \mathbb{Z}$ があって $m + 2Nn(m) \in E$ となる．写像 $m \to m + 2Nn(m)$

は B_N から E の上への一対一写像を与える．特に card $E = 2N$ である．

補題 6.17　$E \subseteq \mathbb{Z}$ を N-横断とする．$k \in E$ に対し，$e_k \in \ell^2$ を

$$e_k(n) = (2N)^{-1/2} e^{-ikn\pi/N} \chi_E(n)$$

で定義する．このとき族 $\{e_k\}_{k\in E}$ は $\ell^2(E) \equiv \{F \in \ell^2 : \operatorname{supp} F \subseteq E\}$ に対する完全正規直交基底である．$F \in \ell^2(E)$ に対し，

$$\langle F, e_k \rangle = (2N)^{-1/2} \check{F}(k\pi/N) \tag{6.31}$$

および

$$\|F\|_{\ell^2}^2 = (2N)^{-1} \sum_{k\in E} |\check{F}(k\pi/N)|^2 \tag{6.32}$$

が成り立つ．

証明　E の N-横断性により各 $\ell \in E$ に対し，$\ell = m + 2Nn(m)$ となる $m \in B_N$ がただ一つ存在するしたがって

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{m\in B_N} e^{i(j-k)(m+2Nn(m))\pi/N} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} e^{i(j-k)m\pi/N} = \delta_{jk}\end{aligned}$$

である．これより族 $\{e_k\}_{k\in E}$ は正規直交である．個数 が $2N$ でありこれは $\ell^2(E)$ の次元であるので完全でなくてはならない．すると (6.31) は定義から，(6.32) は上の結果から導かれる．

∎

定理 6.18　$E \subseteq \mathbb{Z}$ が N-横断であり，$f, g \in L^2$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$, $\operatorname{supp} \hat{g} \subseteq E$ (特に f と g は三角多項式) とする．このとき

$$f * g(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k\in E} f(k\pi/N) g(x - k\pi/N) = \frac{1}{2N} \sum_{m\in B_N} f(m\pi/N) g(x - m\pi/N) \tag{6.33}$$

および

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in E} |f(k\pi/N)|^2 = \sum_{m\in B_N} |f(m\pi/N)|^2 \tag{6.34}$$

が成り立つ．

証明　Plancherel の公式と (6.32) を $F = \hat{f}$ に対して適用すると (6.34) の最初の等号がわか

る．補題 6.17 より

$$\hat{f} = \sum_{k\in E}\langle \hat{f}, e_k\rangle e_k = (2N)^{-1/2}\sum_{k\in E} f(k\pi/N)e_k$$

である．これを $f*g = (\hat{f}\hat{g})^\vee$ に代入して $(\hat{g}e_k)^\vee(x) = (2N)^{-1/2}g(x-k\pi/N)$ を用いると (6.33) の最初の等号が示される．各 $k\in E$ を上のように $m\in B_N$ に対して $k = m+2Nn(m)$ と書き f と g の 2π-周期性を用いると (6.33) と (6.34) の後ろの等号が示される． ∎

$\operatorname{supp}\hat{f}$ と $\operatorname{supp}\hat{g}\subseteq E$ を仮定すれば，(6.33) と (6.34) の $k\in E$ に関する和は，任意の N-横断集合 F に対して $k\in F$ に関する和で置き換えられる．これが可能であるのは，上の証明の最後でどちらの場合も $k\in F$ についての和を含む表現がそれぞれ (6.33) あるいは (6.34) の一番右のものと一致するからである．

系 6.19 E が N-横断であり，$f\in L^2$, $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq E$ が成り立つとする．このとき

$$f(x) = \frac{1}{2N}\sum_{k\in E} f(k\pi/N)\check{\chi}_E(x-k\pi/N) = \frac{1}{2N}\sum_{k\in B_N} f(k\pi/N)\check{\chi}_E(x-k\pi/N) \tag{6.35}$$

が成り立つ．

証明 定理 6.18 において $g=\check{\chi}_E$ として 系 6.3 を参照せよ． ∎

例 6.20 (シャノンのサンプリング公式) $f\in L^2$ とある $N\geq 1$ に対して $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq B_N$ を仮定する．B_N が N-横断であることに注意する．$x\in\mathbb{T}$ と $x\neq 0$ に対し

$$h_N(x) = e^{-ix/2}(\sin Nx)/\sin(x/2)$$

であり $h_N(0) = 2N$ とする．このとき

$$f(x) = \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N-1} f(k\pi/N)h_N(x-k\pi/N)$$

これは系 6.19 と計算から $\check{\chi}_{B_N} = h_N$ が成り立つことから導かれる．

例 6.21 (円環サンプリング公式) $f\in L^2$ とし，ある偶数 N, $N\geq 2$ に対して

$$\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq R_N \equiv \{n\in\mathbb{Z} : -N\leq n\leq -\frac{N}{2}-1 \ \text{または}\ \frac{N}{2}\leq n\leq N-1\}$$

とする．このとき R_N は $N/2$-横断であり，したがって系 6.19 から

$$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{k\in R_N} f(2k\pi/N)\check{\chi}_{R_n}(x-2k\pi/N) = \frac{1}{N}\sum_{k\in B_{N/2}} f(2k\pi/N)\check{\chi}_{R_N}(x-2k\pi/N) \tag{6.36}$$

であり，計算により

$$x \neq 0 \text{ に対して} \quad \check{\chi}_{R_N}(x) = \frac{e^{-ix/2}}{\sin(x/2)}\sin(Nx/2)[2\cos(Nx/2)-1]$$

と $\check{\chi}_{R_N}(0) = N$ がわかる．

列の組 $\{\varphi_v\}_{v=0}^{\infty}$, $\{\psi_v\}_{v=0}^{\infty}$ (ただし各 v に対して $\varphi_v, \psi_v \in L^2$) が許容的であるといわれるのは，

$$\text{すべての } v \text{に対して} \quad \operatorname{supp}\hat{\varphi}_v, \operatorname{supp}\hat{\psi}_v \subseteq S_v \tag{6.37}$$

(ただし $S_0 = \{-2,-1,0,1\}$ であり $v \geq 1$ に対して $S_v = \{n \in \mathbb{Z} : -2^{v+1} \leq n \leq -2^{v-1}-1$ または $2^{v-1} \leq n \leq 2^{v+1}-1\}$) が成り立ち，

$$\text{すべての } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\hat{\varphi}}_v(n)\hat{\psi}_v(n) = 1 \tag{6.38}$$

であり，全ての $v \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{すべての } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad |\hat{\varphi}_v(n)|, |\hat{\psi}_v(n)| \leq A_1 \tag{6.39}$$

と

$$\text{すべての } n \in T_v \text{に対して} \quad |\hat{\varphi}_v(n)|, |\hat{\psi}_v(n)| \geq A_2 \tag{6.40}$$

(ただし $T_0 = S_0$, $T_1 = S_1$, $v \geq 2$ に対して $T_v = \{n \in \mathbb{Z} : -2^v - 2^{v-1} - 1 \leq n \leq 2^v + 2^{v-2} - 1$ または $2^v - 2^{v-2} \leq n \leq 2^v + 2^{v-1}\}$) を満たすような $A_1, A_2 > 0$ が存在するときである．
各 $v \in \mathbb{Z}$, $v \geq 0$, $-2^{v+1} \leq k \leq 2^{v+1} - 1$ である $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\varphi_{vk}(x) = 2^{-v/2-1}\varphi_v(x - 2^{-v-1}k\pi), \quad \psi_{vk}(x) = 2^{-v/2-1}\psi_v(x - 2^{-v-1}k\pi)$$

とする．ただし通常どおり φ_v と ψ_v は $\mathbb{R}$ への 2π-周期の拡張と同一視される．

定理 6.22 ($L^2(\mathbb{T})$ における φ-変換恒等式)　$\{\varphi_v\}_{v=0}^{\infty}, \{\psi_v\}_{v=0}^{\infty}$ が L^2 の列の許容的な組であるとする．$f \in L^2$ とする．このとき

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} \langle f, \varphi_{vk}\rangle \psi_{vk} \tag{6.41}$$

が成り立つ．定数 $c_1, c_2 > 0$ ((6.39) と (6.40) の A_1, A_2 のみに依存する) が存在して

$$c_1\|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} |\langle f, \varphi_{vk}\rangle|^2 \leq c_2\|f\|_{L^2}^2 \text{である．} \tag{6.42}$$

証明　(6.38) とフーリエ逆変換により $f = \sum_{v=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_v * \psi_v * f$ を得る．ただし通常どおり $\hat{\tilde{\varphi}}_v = \bar{\hat{\varphi}}_v$ となるように $\tilde{\varphi}_v(x) = \overline{\varphi_v(-x)}$ とする．(6.37) より $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge$, $\operatorname{supp}\hat{\psi}_v \subseteq B_{2^{v+1}}$ である．$N = 2^{v+1}$, $E = B_N$ として定理 6.18 を $(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge$ と $\hat{\psi}_v$ に対して用いると

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_v * \psi_v * f &= \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} 2^{-v-2}\tilde{\varphi}_v * f(2^{-v-1}k\pi)\psi_v(x - 2^{-v-1}k\pi) \\ &= \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} \langle f, \varphi_{vk}\rangle \psi_{vk}\end{aligned}$$

を得る．これが (6.41) を示し，(6.13) を確立したのと同様な議論により ((6.34) の一番右を用いると) (6.42) が得られる． ∎

$\hat{\varphi}_{vk}$, $\hat{\psi}_{vk}$ は円環領域 S_v に台をもつので (6.41) は f の周波数解析を与える．もし，適切な意味で原点近傍で強く集中している φ_v と ψ_v を選ぶとφ_{vk} と ψ_{vk} は $2^{-v-1}k\pi$ 近傍に集中し (6.41) は f の空間的な解析をも与える．が，この場合どのようにして最適な集中度を持つ許容的な $\{\varphi_v\}_{v=0}^{\infty}$, $\{\psi_v\}_{v=0}^{\infty}$ を構成するか，あるいはどのような最適の判定基準を使うべきかさえも明らかではない．

定理 6.23（シャノン基底）　$C_0 = \{-1, 0\}$ とし $v \geq 1$, $v \in \mathbb{Z}$ に対して $C_v = B_{2^{v-1}} = \{n \in \mathbb{Z} : -2^{v-1} \leq n \leq 2^{v-1} - 1\}$ とする．$\varphi_{00}(x) = 2^{-1/2}(1 + e^{-ix})$ と $\varphi_{0-1}(x) = 2^{-1/2}(1 - e^{-ix})$ を仮定する．$v \geq 1$ と $k \in C_v$ に対し，$x \neq 2^{-v+1}k\pi$ と $\varphi_{vk}(2^{-v+1}k\pi) = 2^{v/2}$ について

$$\begin{aligned}\varphi_{vk}(x) &= 2^{-v/2}\check{\chi}_{R_{2^v}}(x - 2^{-v+1}k\pi) \\ &= \frac{2^{-v/2}e^{i(\frac{1}{2}x - 2^{-v}k\pi)}}{\sin(\frac{1}{2}x - 2^{-v}k\pi)}(-1)^k \sin(2^{v-1}x)[(-1)^k\cos(2^{v-1}x) - 1]\end{aligned}$$

とする．ここで R_{2^v} は例 6.21 と同様のものである．このとき集合 $\{\varphi_{vk}\}_{v \geq 0, k \in C_v}$ は L^2 の完全正規直交基底である．

証明　$\varphi_0(x) = \check{\chi}_{C_0}(x) = 1 + e^{-ix}$ とし，$v \geq 1$ に対して$\varphi_v = \check{\chi}_{R_{2^v}}$ とする．このとき $\mathbb{Z}$ 上で $\sum_{v=0}^{\infty} \hat{\varphi}_v \equiv 1$ であり，したがってフーリエ逆変換により $f \in L^2$ に対して $f = \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_v * f$ である．例 6.20 により

$$\varphi_0 * f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{0} \varphi_0 * f(k\pi)\varphi_0(x - k\pi) = \sum_{k \in C_0} \langle f, \varphi_{0k}\rangle \varphi_{0k}(x)$$

が示される．各 $v \geq 1$ に対し，例 6.21 を $N = 2^v$ として用いる．(6.36) の右辺より

$$\varphi_v * f(x) = 2^{-v}\sum_{k \in C_v} \varphi_v * f(2^{-v+1}k\pi)\varphi_v(x - 2^{-v+1}k\pi) = \sum_{k \in C_v} \langle f, \varphi_{vk}\rangle \varphi_{vk}(x)$$

が成り立つ．$k=-1,0$ に対して $\|\varphi_{0k}\|_{L^2}=1$ と $v\geq 1$ に対して $k\in C_v$，$\|\varphi_{vk}\|_{L^2}^2=2^{-v}\|\varphi_v\|_{L^2}^2=2^{-v}\|\chi_{R_{2^v}}\|_{\ell^2}^2=1$ であることは簡単に確かめられる．以上より結論は補題 6.7 より導かれる． ∎

6.5 N を法とする整数

この章では $\mathbb{Z}$ のように離散的であってかつ $\mathbb{T}$ のように有界である設定を考える．次の記法を定めておく．$L\in\mathbb{Z}, L\geq 1, N=2^L$ と $M=N/2$ を仮定する．このとき $\mathbb{Z}_N=\{n\in\mathbb{Z}:-M\leq n\leq M-1\}$ である．有限列 $f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_N}$ を考えるが，これは $\mathbb{C}^N$ あるいは $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の要素と考えることもできる．$f\in\mathbb{C}^N$ の離散フーリエ変換 (DFT) は

$$m\in\mathbb{Z}_N\text{に対して}\quad \hat{f}(m)=\sum_{n=-M}^{M-1}f(n)e^{-2\pi inm/N}$$

により定義され，その逆変換は $n\in\mathbb{Z}_N$ に対して $\check{F}(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=-M}^{M-1}f(m)e^{2\pi inm/N}$ と定義される．このとき $(\hat{f})^\vee=f=(\check{f})^\wedge$ である．(上で $\mathbb{Z}_N$ の定義は伝統的な $\{0,1,\ldots,N-1\}$ ではなく，便宜上より対称的な定義を用いる．DFT に関しては，複素指数関数の周期性からどちらの定義でも同じであることがわかる．) $f\in\ell^2\equiv\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ を，周期 N で周期的であるその $\mathbb{Z}$ への拡張と同一視する．そして $f*g(n)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_N}f(n-m)g(m)$ と定義する．$(f*g)^\wedge=\hat{f}\hat{g}$ であることがわかる．$\langle f,g\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}_N}f(n)\overline{g(n)}$ とし，$\|f\|_{\ell^2}=(\sum_{n\in\mathbb{Z}_N}|f(n)|^2)^{1/2}$ とする．Parseval の関係式と Plancherel の公式はそれぞれ $\langle\hat{f},\hat{g}\rangle=N\langle f,g\rangle$ と (それゆえ) $\|\hat{f}\|_{\ell^2}^2=N\|f\|_{\ell^2}^2$ となる．$E\subseteq\mathbb{Z}_N$ と $f\in\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ に対し，記号 χ_E, card E, および supp f, は 6.4 節と同様である．

以下の定理 6.29 と 6.30 も $N=2^L$ の仮定を用いる．いままででは M は素数でなくともよく，$M\in\mathbb{Z}$, $M>1$ に対しても $N=2M$ であれば十分であった．記法 $m\mid M$ はある $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して $M=\ell m$ であることを意味する．

$m\mid M$ であるような $m\in\mathbb{Z}$, $m\geq 1$ に対して $E\subseteq\mathbb{Z}_N$ が m-横断であるといわれるのは

$$\text{すべての}\,n\in\mathbb{Z}_N\text{に対して}\quad\sum_{k=0}^{M/m}\chi_E(n+2mk)=1$$

が成り立つときである．ここで χ_E は通常どおり $\mathbb{Z}$ 上へ N-周期的となるように拡張されている．これは card$E=2m$ を意味する．6.3 節の対応する場合と同様に E が $\mathbb{Z}_N$ に関して m-横断であることの定義は，いまや $\mathbb{Z}$ の部分集合とみなされる E が 6.4 節の意味で $\mathbb{Z}$ 上で m-横断であるという叙述と等価である．このことより次の結果が得られる．

補題 6.24 $m\mid M$ であるとし $E\subseteq\mathbb{Z}_N$ が m-横断であると仮定する．$k\in E$ に対し $e_k\in\ell^2$

を

$$e_k(n) = (2m)^{-1/2} e^{-ikn\pi/m} \chi_E(n)$$

により定義する．このとき族 $\{e_k\}_{k \in E}$ は $\ell^2(E) = \{F \in \ell^2 : \operatorname{supp} F \subseteq E\}$ に対する完全正規直交基底である．$F \in \ell^2(E)$ に対し

$$\langle F, e_k \rangle = \frac{N}{\sqrt{2m}} \check{F}(kN/m), \tag{6.43}$$

が成り立ち，したがって

$$\|F\|_{\ell^2}^2 = \frac{N^2}{2m} \sum_{k \in E} |\check{F}(kN/2m)|^2 \tag{6.44}$$

である．

証明　集合 $\{e_k\}_{k \in E}$ の正規直交性と完全性は補題 6.17 と上の注意から導かれる．すると (6.43) は単純計算で，(6.44) はこれらの結果より導かれる．∎

$m \mid M$ であるような m に対し，$B_m = \{n \in \mathbb{Z} : -m \leq n \leq m-1\}$ とする．すると B_m は m-横断である．6.4 節と同様に任意の m-横断集合 E は $k \in E$ を $\ell \in B_m$ に写す写像により B_m と一対一対応にある．ただしただ一つの整数 $n(\ell)$ に対して $k = \ell + 2mn(\ell)$ である．

定理 6.25　$m \mid M$ であり $E \subseteq \mathbb{Z}_N$ が m-横断であり，$f, g \in \ell^2$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$, さらに $\operatorname{supp} \hat{g} \subseteq E$ と仮定する．このとき

$$f * g(n) = \frac{N}{2m} \sum_{k \in E} f(kN/2m) g(n - kN/2m) = \frac{N}{2m} \sum_{k \in B_m} f(kN/2m) g(n - kN/2m) \tag{6.45}$$

および

$$\|f\|_{\ell^2}^2 = \frac{N}{2m} \sum_{k \in E} |f(kN/2m)|^2 = \frac{N}{2m} \sum_{k \in B_m} |f(kN/2m)|^2 \tag{6.46}$$

が成り立つ．

証明　証明は定理 6.18 の証明と同様である．$\hat{f}$ を補題 6.24 の正規直交基底 $\{e_k\}_{k \in E}$ により展開して $f * g = (\hat{f}\hat{g})^\vee$ を用いると

$$f * g = \sum_{k \in E} \frac{N}{\sqrt{2m}} f(kN/2m) (\hat{g} e_k)^\vee$$

を得る．すると DFT の並進に関する性質により $(\hat{g} e_k)^\vee(n) = (2m)^{-1/2} g(n - kN/2m)$ である．これにより (6.45) の左側が導かれる．(6.46) の左側は Plancherel の公式と (6.44) から導かれ

る．(6.45) と (6.46) の右側は，上で述べた E と B_m の対応と f と g の N- 周期性から導かれる． ∎

系 6.26　$m \mid M$ であり E が m-横断であり $f \in \ell^2$ と $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$ が成り立つとする．このとき

$$f(n) = \frac{N}{2m} \sum_{k \in E} f(kN/2m) \check{\chi}_E(n - kN/2m) = \frac{N}{2m} \sum_{k \in B_m} f(kN/2m) \check{\chi}_E(n - kN/2m) \quad (6.47)$$

が成り立つ．

証明　定理 6.25 において $g = \check{\chi}_E$ とするとこれは $\hat{f}\hat{g} = \hat{f}$ したがって $f = f * g$ を意味する． ∎

例 6.27（シャノンのサンプリング公式）　$m \mid M$, $f \in \ell^2$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq B_m$ を仮定する．各 $n \in \mathbb{Z}_N$, $n \neq 0$ に対し

$$h_m(n) = \frac{1}{N} e^{-i\pi n/N} \sin(2\pi nm/N)/\sin(\pi n/N)$$

であり $h_m(0) = 2m/N$ とする．このとき

$$f(n) = \frac{N}{2m} \sum_{k=-m}^{m-1} f(kN/2m) h_m(n - kN/2m)$$

である．これは系 6.26 と計算により $\check{\chi}_{B_m} = h_m$ であることから導かれる．

例 6.28（円環サンプリング公式）　$m \mid M$ と m が偶数であることを仮定する．$R_m = \{n \in \mathbb{Z} : -m \leq n \leq -m/2 - 1$　または　$m/2 \leq n \leq m - 1\}$ とする．このとき R_m は $(m/2)$-横断である．したがって系 6.26 により，もし $f \in \ell^2$ と $\operatorname{supp} \hat{f} \subset R_m$ が成り立つなら

$$f(n) = \frac{N}{m} \sum_{k \in R_m} f(kN/m) \check{\chi}_{R_m}(n - kN/m) = \frac{N}{m} \sum_{k \in B_{m/2}} f(kN/m) \check{\chi}_{R_m}(n - kN/m) \quad (6.48)$$

であり，ここで計算により

$$\check{\chi}_{R_m}(n) = \frac{e^{-i\pi n/N}}{N \sin(\pi n/N)} \sin(\pi nm/N)[2\cos(\pi nm/N) - 1], \quad for\ n \neq 0$$

と $\check{\chi}_{R_m}(0) = m/N$ が導かれる．

次で考える $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ に対する φ-変換は，(6.2, 6.3 および 6.4 節でのものに比べれば) パラメータ v_0 を導入した分だけ少し柔軟性がある．関数 $\psi_{v_0 k}$ は分解の最も低い周波数になる．v_0 を選ぶことは周波数スペクトルの低周波数側の端をいかに細かく分割するかを決めることと等し

い．記法を簡単にするため，$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ および $\mathbb{T}$ の場合の上に対応する内容は扱わなかったが，$\mathbb{Z}_N$ に対しての議論と同様な議論によりこの三つの場合についても自然な類似した内容を得ることができる．

$N = 2^L$ を仮定し，$M = N/2$ とおいたことを思いだそう．$0 \le v_0 < L-2$ として $v_0 \in \mathbb{Z}$ を固定する．列の組 $\{\varphi_v\}_{v=v_0}^{L-2}$, $\{\psi_v\}_{v=v_0}^{L-2}$, (ただし各 v に対し $\varphi_v, \psi_v \in \ell^2$) が許容的であるといわれるのは $S_{v_0} = \{n \in \mathbb{Z}_N : -2^{v_0+1} \le n \le 2^{v_0+1} - 1\}$ および $v_0 < v \le L-2$ に対して $S_v = \{n \in \mathbb{Z}_N : -2^{v+1} \le n \le -2^{v-1} - 1 \text{ or } 2^{v-1} \le n \le 2^{v+1} - 1\}$ (6.4 節と同様) として

$$\text{各 } v \text{に対して} \quad \operatorname{supp} \hat{\varphi}_v, \operatorname{supp} \hat{\psi}_v \subseteq S_v \tag{6.49}$$

であり，

$$\text{すべての } n \in \mathbb{Z}_N \text{に対して} \quad \sum_{v=v_0}^{L-2} \bar{\hat{\varphi}}_v(n) \hat{\psi}_v(n) = 1 \tag{6.50}$$

が成り立ち，(v と N によらない) 定数 $A_1, A_2 > 0$ が存在して

$$\text{すべての } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad |\hat{\varphi}_v(n)|, |\hat{\psi}_v(n)| \le A_1 \tag{6.51}$$

と

$$\text{すべての } n \in T_v \text{に対して} \quad |\hat{\varphi}_v(n)|, |\hat{\psi}_v(n)| \ge A_2 \tag{6.52}$$

が成り立つときである．ここでもし $2 \le v_0 < L-2$ ならば $T_{v_0} = \{n \in \mathbb{Z} : -2^{v_0} - 2^{v_0-1} - 1 \le n \le 2^{v_0} + 2^{v_0-1}\}$ であるが，このとき $v_0 < v < L-2$ に対して $T_v = \{n \in \mathbb{Z} : -2^v - 2^{v-1} - 1 \le n \le -2^v + 2^{v-2} - 1$ または $2^v - 2^{v-2} \le n \le 2^v + 2^{v-1}\}$ であり $v = L-2$ に対しては $T_v = \{n \in \mathbb{Z} : -M \le n \le -2^v + 2^{v-2} - 1$ または $2^v - 2^{v-2} - 1 \le n \le M-1\}$ である．もし $v_0 = 0$ ならば，$T_0 = S_0 = \{-2, -1, 0, 1\}$, $T_1 = S_1 = \{-4, -3, -2, 1, 2, 3\}$ であり，$v > 1$ に対しては T_v は上のとおりで，一方 $v_0 = 1$ に対しては $T_1 = S_1 = \{n \in \mathbb{Z} : -4 \le n \le 3\}$ であり，$v > 1$ に対しては T_v は上のとおりである．$v_0 \le v \le L-2$ をみたす各 $v \in \mathbb{Z}$ と $-2^{v+1} \le k \le 2^{v+1} - 1$ をみたす $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_{vk}(n) = \sqrt{N} 2^{-v/2-1} \varphi_v(n - 2^{-v-2} kN)$$

とし，

$$\psi_{vk}(n) = \sqrt{N} 2^{-v/2-1} \psi_v(n - 2^{-v-2} kN),$$

とする．ここで通常通り φ_{vk} と ψ_{vk} は N-周期的になるように $\mathbb{Z}$ に拡張されたものとする．

定理 6.29 ($\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ に対する φ-変換恒等式 [Ku])　$N = 2^L$, $0 \le v_0 < L-2$ を仮定し，

$\{\varphi_v\}_{v=v_0}^{L-2}$, $\{\psi_v\}_{v=v_0}^{L-2}$ が $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ における許容的な列の組であるとする．$f \in \ell^2$ とする．このとき

$$f = \sum_{v=v_0}^{L-2} \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} \langle f, \varphi_{vk} \rangle \psi_{vk} \tag{6.53}$$

が成り立つ．(6.51) と (6.52) において A_1, A_2 のみによる (したがって f と N にはよらない) 定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$c_1 \|f\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{v=v_0}^{L-2} \sum_{k=-2^{v+1}}^{2^{v+1}-1} |\langle f, \varphi_{vk} \rangle|^2 \leq c_2 \|f\|_{\ell^2}^2 \tag{6.54}$$

が成り立つ．

証明　通常通り $\tilde{\varphi}_v(n) = \overline{\varphi_v(-n)}$ として $\hat{\tilde{\varphi}}_v = \bar{\hat{\varphi}}_v$ となるようにしておく．するとフーリエ逆変換と (6.50) より $f = \sum_{v=v_0}^{L-2} \tilde{\varphi}_v * \psi_v * f$ となる．$\mathrm{supp}(\tilde{\varphi}_v * f)^\wedge, \mathrm{supp}\,\hat{\psi}_v \subseteq B_{2^{v+1}}$ に注意して定理 6.25 を用いると (6.53) が，定理 6.6, 6.14, 6.22 と同様に得られる．(6.52) の T_v を重なりを持つように選んだため，(6.51) と (6.52) は

$$\text{すべての } n \in \mathbb{Z}_N \text{に対して} \quad B_2 \leq \sum_{v=v_0}^{L-2} |\hat{\varphi}_v(n)|^2 \leq B_1$$

となるような N によらない定数 B_1, B_2 の存在を意味する．これと定理 6.6 の証明にあるのと同様な議論で (6.54) を得る．∎

(6.53) が f のよく局所化された実空間解析 ((6.49) より周波数空間の方は自動的によく局所化されている) を与えるために，関数 φ_v と ψ_v を原点近傍に集中させたいことがあるだろう．しかし，6.4 節と同様にこれをどのように最適化するかが明らかでない．

定理 6.30 (シャノン基底)　$N = 2^L$ とし $0 \leq v_0 < L-2$ とする．$C_{v_0} = \{n \in \mathbb{Z} : -2^{v_0} \leq n \leq 2^{v_0} - 1\}$ とし，$v_0 < v \leq L-1$ に対して $C_v = \{n \in \mathbb{Z} : -2^{v-1} \leq n \leq 2^{v-1} - 1\}$ とする．

$$n \neq 0 \text{ に対して} \quad \varphi_{v_0}(n) = \check{\chi}_{B_{2^{v_0}}}(n) = \frac{1}{N} e^{-i\pi n/N} \sin(2^{v_0+1} n\pi/N) / \sin(n\pi/N)$$

であり $\varphi_{v_0}(0) = 2^{v_0+1}/N$ であるとする．$k \in C_{v_0}$ に対して

$$\varphi_{v_0 k}(n) = 2^{-(v_0+1)/2} \sqrt{N} \varphi_{v_0}(n - 2^{-v_0-1} kN)$$

とする．$v_0 < v \leq L-1$ に対し

$$n \neq 0 \text{ に対して} \quad \varphi_v(n) = \check{\chi}_{R_{2^v}}(n) = \frac{e^{-i\pi n/N}}{N \sin(\pi n/N)} \sin(2^v n\pi/N)[2\cos(2^v n\pi/N) - 1]$$

とし $\varphi_v(0) = m/N$ とする．$k \in C_v$, $v_0 < v \leq L-1$ に対して

$$\varphi_{vk}(n) = 2^{-v/2}\sqrt{N}\varphi_v(n - 2^{-v}kN)$$

とする．このとき集合 $\{\varphi_{vk}\}_{v_0 \leq v \leq L-1, k \in C_v}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ の完全正規直交基底である．

証明　$\check{\chi}_{B_{2^{v_0}}}$ と $\check{\chi}_{R_{2^v}}$ に関する公式は例 6.27 と 6.28 から得られる．$\mathbb{Z}_N$ 上で $\sum_{v=v_0}^{L-1} \hat{\varphi}_v \equiv 1$ なので，したがって $f \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ に対し $f = \sum_{v=v_0}^{L-1} \varphi_v * f$ である．例 6.27 を $\varphi_{v_0} * f$ について用い，例 6.28 を各 $\varphi_v * f$, $v_0 < v \leq L-1$ に対して用いると

$$f = \sum_{v=v_0}^{L-1} \sum_{k \in C_v} \langle f, \varphi_{vk} \rangle \varphi_{vk}$$

を得る．また各 $k \in C_{v_0}$ に対して Plancherel の定理を用いて

$$\|\varphi_{v_0 k}\|_{\ell^2}^2 = 2^{-v_0-1}N\|\varphi_{v_0}\|_{\ell^2}^2 = 2^{-v_0-1}\|\chi_{B_{2^{v_0}}}\|_{\ell^2}^2 = 1$$

がいうことができ，$k \in C_v$, $v_0 < v \leq L-1$ に対して

$$\|\varphi_{vk}\|_{\ell^2}^2 = 2^{-v}N\|\varphi_v\|_{\ell^2}^2 = 2^{-v}\|\chi_{R_{2^v}}\|_{\ell^2}^2 = 1$$

がいえる．したがって補題 6.7 で証明は完了する．∎

6.6　群論的な設定

局所コンパクトなアーベル群の理論を知っている読者が期待するように，基本的なサンプリングについての結果 (定理 6.2, 6.10, 6.18, 6.25) の一般化されたものが存在する．上で考えた各場合はこの一般的な結果の例になっている．

G を局所コンパクトなアーベル群で，ハール測度 μ が与えられているとする．(ここで必要な定義と背景については [R] を参照せよ．) $\hat{G}$ を G の双対群とする．指標 $\xi \in \hat{G}$ と元 $x \in G$ に対しξ の x への作用 (およびその逆) を $e_x(\xi)$ と書く．$\xi \in \hat{G}$ に対してフーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(x)e_{-x}(\xi)d\mu(x)$$

で定義する．$\hat{G}$ 上のハール測度 $\hat{\mu}$ を正規化してフーリエ逆変換公式が

$$f(x) = (\hat{f})^{\vee}(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi)e_x(\xi)d\hat{\mu}(\xi) \quad for\ x \in G$$

となるようにする．集合 $E \subseteq \hat{G}$ は $\hat{\mu}(E) = 2L < +\infty$ であって族 $\{(2L)^{-1/2}e_{-x_i}(\xi)\chi_E(\xi)\}_{i \in A}$ が $L^2(E, d\hat{\mu})$ の正規直交基底となるような集合 $\{x_i\}_{i \in A} \subseteq G$ が存在するとき L-横断であると

いわれる．

定理 6.31 $E \subseteq \hat{G}$ が L-横断であり，$f, g \in L^2(G)$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$, $\operatorname{supp} \hat{g} \subseteq E$ とする．このとき

$$f * g(x) = \frac{1}{2L} \sum_{i \in A} f(x_i) g(x - x_i), \quad x \in G \tag{6.55}$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, e_{-x_i} \chi_E \rangle &= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi) \overline{e_{-x_i}(\xi)} d\hat{\mu}(\xi) \\ &= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi) e_{x_i}(\xi) d\hat{\mu}(\xi) = f(x_i) \end{aligned}$$

がフーリエ逆変換により得られる．そこで，上の正規直交基底で $\hat{f}$ を展開すると

$$\hat{f} = \frac{1}{2L} \sum_{i \in A} f(x_i) e_{-x_i} \chi_E$$

を得る．また，

$$\begin{aligned} (\hat{g}(\cdot - x_i))^\wedge(\xi) &= \int_G g(x - x_i) e_{-x}(\xi) d\mu(x) \\ &= \int_G g(y) e_{-x_i - y}(\xi) d\mu(y) = e_{-x_i}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

あるいは $(\hat{g} e_{-x_i})^\vee(x) = g(x - x_i)$ が成り立つ．この二つのことを $f * g = (\hat{f}\hat{g})^\vee$ に入れて $\hat{g}\chi_E = \hat{g}$ を用いると (6.55) を得る． ∎

この結果は Kluvánek の局所コンパクトアーベル群に関するサンプリングについての結果 ([K] または [H]) と比較されるべきである．

系 6.32 $E \subseteq \hat{G}$ が閉であり L-横断とする．もし $f \in L^2(G)$ と $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$ が成り立てば，

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{i \in A} f(x_i) \check{\chi}_E(x - x_i), \quad x \in G$$

が成り立つ．

証明 定理 6.31 で $g = \check{\chi}_E$ として，$\hat{f}\hat{g} = \hat{f}$ より $f * g = f$ に注意すればよい． ∎

もし原点を取り囲む球または円環の横断集合をみつけることができれば，シャノン/円環サン

プリング公式の自然な対応物を例として構成することができる．そのときもし $\hat{G}$ を，横断集合を適切に使って，ξ の「大きさ」にしたがって分割することができれば，φ-変換恒等式とシャノンウエーブレットの対応物もみつかる．この種の結果は Vilenkin 群に関しては [OWe] で得られている．

謝辞　第一著者はいくつかの助言を与えてくれた Dr. Arun Kumar に助けとなった議論のことで感謝する．著者二人ともいくつか重要な文献を指摘してくれたことについてレフェリーに感謝する．

参考文献

[B1] J. Benedetto. 1992. "Irregular sampling and frames," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 445–507.

[B2] J. Benedetto. 1993. "Frame decompositions, sampling, a nd uncertainty principle inequalities," this volume, Chap. 7.

[Bu] P.L. Butzer. 1983. "A survey of the Whittaker–Shannon sampling theorem and some of its extensions," *J. Math . Res. Exposition* **3**: 185–212.

[EFr] J. Epperson and M. Frazier. 1992. "An almost orthogon al radial wavelet expansion for radial distributions," prep rint.

[FGr] H. Feichtinger and C. Gröchenig. 1993. "Theory and practice of irregular sampling," this volume, Chap. 8.

[FrJa1] M. Frazier and B. Jawerth. 1985. "Decomposition of Besov spaces," *Ind. Univ. Math. J.* **34**: 777–799.

[FrJa2] M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transf orm and decompositions of distribution spaces," *J. Fun ct. Anal.* **93**: 34–170.

[FrJaW] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss. 1991. *Lit tlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBM S Conf. Lect. Notes **79**, Providence: Amer. Math. Soc.

[FrKu] M. Frazier and A. Kumar. 1993. "An introduction to t he orthonormal wavelet transform on discrete sets," this vo lume, Chap. 2.

[G] R.P. Gosselin. 1963. "On the L^p theory of cardinal s eries," *Ann. Math.* **78**: 567–581.

[H] J.R. Higgins. 1985. "Five short stories about the cardi nal series," *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**: 45–89.

[Ho] M. Holschneider. 1990. "Wavelet analysis on the circle ," *J. Math. Phys.* **31**(1): 39–44.

[J] A.J. Jerri. 1977. "The Shannon sampling theorem—Its v arious extensions and applications: A tutorial review," ıt Proc. IEEE **65**: 1565–1596.

[K] I. Kluvánek. 1965. "Sampling theorem in abstract harm onic analysis," *Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vie d* **15**: 43–48.

[Ku] A. Kumar. 1990. "Time-frequency analysis and transform coding," Ph.D. dissertation, Electrical Eng. Dept., Washin gton Univ., St. Louis.

[KuFu] A. Kumar and D. Fuhrmann. 1990. "The Frazier–Jawert h transform," *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal P rocess.*, **5**: 2483–2486, Albuquerque, N.M.

[M1] Y. Meyer. 1989. "Wavelets and operators," in *Ana lysis at Urbana*, E. Berkson et al., eds., London Math. Soc. Lect. Note **137**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 256–364.

[M2] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, Paris : Hermann.

[OWe] C. Onneweer and S. Weiyi. 1989. "Homogeneous Besov sp aces on locally compact Vilenkin groups," *Studia Math.* **93**: 17–39.

[P] J. Price. 1985. "Uncertainty principles and sampling th eorems," in *Fourier Techniques and Applications*, J. P rice, ed., New York: Plenum Press, pp. 25–44.

[R] W. Rudin. 1962. *Fourier Analysis on Groups*, New Yo rk: Interscience Publishers.

[S] C.E. Shannon. 1949. "Communication in the presence of n oise," *Proc. IRE* **37**: 10–21.

[St] R. Strichartz. 1993. "Construction of orthonormal wave lets," this volume, Chap. 1.

[T] R. Torres. 1991. "Spaces of sequences, sampling theorem , and functions of exponential type," *Studia Math.* bf 100: 51–74.

第 7 章　フレーム分解，サンプリング，不確定性原理の不等式

John J. Benedetto

【概要】 信号解析における Gabor の方法は，いくつかの方法で定式化され，一般化されてきた．本章では，Gabor の方法により信号の再構成と不確定性原理を統合する．信号の再構成については，フレーム分解とサンプリング理論の面から述べており，特に局所サンプリングと効果的な不等間隔サンプリング定理およびアルゴリズムに力を入れている．不確定性原理については，Gabor 流の分散に対する不確定性原理とウェーブレット系に対する不確定性原理により定式化され，さらに，一般的な重みつき不確定性原理不等式を包含するよう展開されている．

例としては，情報平面の解体，リアルタイムサンプリング，オーディトリーモデル，定常な系，Plancherel–Pólya と Boas の理論，エイリアジング，ゼロクロッシング，エントロピーの不等式，一意性理論と対数積分，局所不確定性原理の不等式，Riesz 変換と A_p空間の役割にふれている．ここで述べる理論は，それらの概念のいくつかをウェーブレットやコヒーレント状態の用語で統一したものであり，種々の手法は，調和解析や関数解析から得られたものである．

7.1　序論

Gabor の分解公式 (1946) と彼が使用した古典的不確定性原理の不等式にもとづく信号解析の基本的な問題を取り上げることとしよう．なお，ここでいう古典的不確定性原理の不等式とは，この公式において基本信号として用いられるガウス関数の変調や平行移動に係る不等式のことである．ここで取り上げる基本的問題とその解は，サンプリング公式と不確定性原理の不等式に依存するものである．そして，これらの話題が，本章の主題である．

実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義される複素関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ のフーリエ変換$\hat{f}$は，次のように形式的に書き表される．

$$\hat{f}(\gamma)=\int f(t)e^{-2\pi it\gamma}\,dt$$

ここで，$\gamma\in\hat{\mathbb{R}}(=\mathbb{R})$ であり，積分は $\mathbb{R}$ において実行される．フーリエ変換は，次の二つの空間上において定義され意味を持つ．

$$L^1(\mathbb{R})=\left\{f:\|f\|_1=\int|f(t)|\,dt<\infty\right\}$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \|f\|_2 = \left(\int |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

古典的サンプリング定理は，$0 < 2T\Omega \leq 1$ の時，次の式が成り立つことを示している．

$$\text{任意の } f \in PW_\Omega \text{に対して}, f(t) = T \sum f(nT) s(t - nT) \tag{7.1}$$

ただし，収束は，$\mathbb{R}$ 上一様でありかつ $L^2(\mathbb{R})$ ノルムの意味ででも正しい．そして，

$$PW_\Omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega] \right\}$$

で，これは，Paley–Wiener 空間である．また，$s(t)$ は，次式で表される．

$$s(t) = \frac{\sin(2\pi\Omega t)}{\pi t} \equiv d_{2\pi\Omega}(t)$$

古典的不確定性原理の不等式は，次のように表現される．

$$\begin{gathered} \text{任意の } f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ 任意の } (t_0, \gamma_0) \in \hat{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \text{ に対して}, \\ \|f\|_2^2 \leq 4\pi \|(t - t_0) f(t)\|_2 \|(\gamma - \gamma_0) \hat{f}(\gamma)\|_2 \end{gathered} \tag{7.2}$$

なお，式 (7.2) において等号が成り立つのは，f が次式で表現されるときであり，かつそのときに限る．

$$\varphi(t) = Ce^{2\pi i t \gamma_0} e^{-s(t-t_0)^2} \tag{7.3}$$

ここで， $C \in \mathbb{C}$, $s > 0$.

これら二つの特別な公式，(7.1) と (7.2) は，ここで述べる基本的問題を定式化する基礎であり，工学，数学や理学における基礎的概念の一部を理解し発展させるのに適したものである．それらは，また，いわば「創造的な公式」であり，適用において相互に密接に関係している．創造的な公式としての (7.1)，(7.2) を用いた展開や相互関係に基づく理論がこの章の主題であり，基本的問題の文脈で書かれている．

さて，創造的な公式とは，どのようなものなのだろうか．ピタゴラスの定理は，そのような公式の一つの例である．それは，ユークリッド空間における 2 点間の距離の正確な定義を導き，曲線の長さや表面積などを定義する基礎である．拡張すれば，自乗可積分な関数空間における L^2 ノルムにより長さの概念を定義しうるものとなる．また，ヒルベルト空間における幾何学の基本的な指針を提供する．種々の非ユークリッド幾何学を論ずる背景でもある．エネルギーなどという概念や特殊相対性理論などの研究分野といった科学の新しい発展をもたらしている．同様に，サンプリング公式や不確定性原理の不等式は，深い一般化，拡張，新しい観点のもととなるものである．

基本的問題の理論的基礎として第三の公式がある．この公式は，よく知られており証明は簡

単であるが，以下のように表される．

$$S = L^* L \tag{7.4}$$

ただし，L は，次の写像である．

$$\begin{aligned} L : H &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n \rangle : n \in \mathbb{Z}^d\} \end{aligned}$$

$\langle .,. \rangle$ はヒルベルト空間 Hにおける内積であり，L^*は L の随伴行列，Sはフレーム $\{x_n\}$ のフレーム作用素である．これらの概念は，7.3 節と 7.4 節で説明されている．なお，ここでは，H はいつも，無限次元の可分な複素ヒルベルト空間であるとする．

基本的問題は，7.3 節で記述されている．7.4 節には，様々な種類の分解法による関数解析的方法を記している．フレームおよび完全なフレームは，L により定理 7.15 と定理 7.19 においてその特徴付けがなされている．そして，定常性や Plancherel–Pólya–Boas 理論等といった話題の役割について検討されている．

7.5 節から 7.8 節は，それぞれ独立に，7.3 節，7.4 節で展開された観点により理解することができる．それらの節においては，有効なサンプリング関数，アルゴリズムやさらに不確定性原理の不等式について説明している．

7.5 節の定理 7.22 は，フレームを用いて証明された，一般的でかつ十分な規則的サンプリングの定理である．そして，定理 7.26 は，この本における最初の建設的な規則的局所サンプリングに関する結論を提示しており，それらは多様な適用性を持っている．7.7 節では，不規則サンプリングのための類似の有効な結論について述べている．特に，定理 7.45 は，フレームを用いて証明された，一般的でかつ十分な不規則サンプリング定理について述べている．そして，アルゴリズム 7.51a は，定理 7.45 の十分な説明となっている．アルゴリズム 7.51b は，この章に述べる一般的な観点の重要な適用について概略的に述べたものとなっている．この適用は，不規則サンプリングによるデータの比較や信号の再構成のためのウェーブレット聴覚モデル (WAM) が，その基礎となっている．

7.6 節においては，古典的不確定性原理の不等式が，古典的な関数解析の方法によって分析されている．すなわち，定理 7.30，注 7.31 と定理 7.32 がそれである．7.6 節の残りの部分では，ウェーブレット系と Gabor 系における不確定性原理の役割について検討を加えている．7.8 節においては，重みつき不確定性原理の不等式を定式化し証明する際の調和解析の有用性について述べている．

Hörmander [Hö1], Schwarrtz [S], Stein and Weiss[StWei] らの本の中に見られる解析における通常の表記法に加えて，7.2 節で述べる表記を用いることとする．

7.2 表記法について

$\mathbb{R}^d$上の積分および$\mathbb{Z}^d$上の総和をそれぞれ "$\int$" と "$\sum$" で表すこととする．d次元のトーラス$\mathbb{T}^d$はコンパクトな群$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$であり，$\mathbb{T}_r \equiv \mathbb{R}/(r\mathbb{Z})$と記す．ただし，$r > 0$である．集合$S$の特性関数を$\mathbf{1}_S$とし，$S = [-\Omega, \Omega)$のとき$\mathbf{1}_{(\Omega)}$と記すこととする．そして，$S$のルベーグ測度を$|S|$とする．"card" は，基数を表すものとする．

fのL^1伸張を$f_\lambda(t) \equiv \lambda f(t\lambda)$とするとき，$\mathbf{1}_{(\Omega)}$のフーリエ変換は，$d_{2\pi\Omega}$となる．ただし，$d(t) \equiv (\sin t)/(\pi t)$とする．$g$のインボリューションを$\tilde{g}(t) \equiv \bar{g}(-t)$，$F$の逆フーリエ変換を$F^\vee$，$F$のサポートを$\mathrm{supp}\, F$と記し，$\delta_{m,n}$は$m = n$のとき1，$m \neq n$のとき0とする．

L^p空間において共役指数をpとp'で表し，Schwartz 空間を$\mathcal{S}$，有界な Radon 測度空間をM_b，絶対収束するフーリエ変換の空間をA，その双対空間，擬似測度空間をA'とする．

指数関数$e_b(t)$を$e^{2\pi itb}$，平行移動$\tau_a g(t)$を$g(t-a)$と表す．$\varphi_{m,n}(t) = e_{mb}(t)\tau_{na}g(t)$および$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$とする．ただし，このとき$t \in \mathbb{R}$である．もし，$\{\theta_n\}$が Banach 空間に含まれるとき，$sp\{\theta_n\}$は$\{\theta_n\}$の線形なスパンであり，$\bar{sp}\{\theta_n\}$は$\{\theta_n\}$の閉じた線形スパンである．

7.3 信号解析の基本的問題

1946 年，Dennis Gabor は，基本信号にもとづく信号分解の基本的手法を定式化した．その手法は，短時間フーリエ変換 (short time Fourier transforms, STFT)，Wigner 変換と曖昧関数 (ambiguity function)，ウェーブレット理論といった時間-周波数法によるスペクトル解析の一つの判例となっている．Gabor の考えは，次のように要約されている．

『基本信号は，... それが有効継続時間と有効な周波数幅の最小の積によるものなら，情報空間における最良の利用を約束するものである．』[Ga,437 頁]

さて，ここで，この考えを説明し，フレーム分解法，サンプリングや不確定性原理の不等式に関連する基礎として使用してみよう．(1947 年，Gabor はホログラフィーを考えだし，1971 年ノーベル物理学賞を受賞した．)

定義 7.1 **(a)** $g \in L^2(\mathbb{R})$でかつ$a, b > 0$とする．

i. Weyl-Heisenberg 系，あるいは，(コヒーレントな状態の) Gabor 系とは，数列$\{\varphi_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$である．ここで，

$$\varphi_{m,n}(t) = e^{2\pi itmb} g(t - na) = e_{mb}(t)\tau_{na}g(t)$$

であり，明らかに，

$$\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma) = e^{2\pi inamb}e^{-2\pi ina\gamma}\hat{g}(\gamma - mb) = \tau_{mb}(e_{-na}\hat{g})(\gamma)$$

である．

ii. gの Zak 変換 Zg とは，

$$Zg(x,\omega) = a^{1/2}\sum_k g(xa + ka)e^{2\pi ik\omega}$$

であり，この特性は，[BenWa] において展開されている．また，定理 7.8 にて用いるものである．

(b) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ とする．アフィン系，あるいは，ウェーブレット系とは，数列 $\{\psi_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ である．ここで，

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$$

であり，明らかに，

$$\hat{\psi}_{m,n}(\gamma) = 2^{-m/2}e^{-2\pi in(\gamma/2^m)}\hat{\psi}(\gamma/2^m) = 2^{-m/2}(e_{-n}\hat{\psi})(\gamma/2^m)$$

である．なお，ウェーブレット系に関する主要な論説，特に正規直交ウェーブレット基底についてのものは，[Me] に依っている．

例 7.2　（ガウス関数）

$C \in \mathbb{C}, s > 0, (t_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$とする．

$$\varphi(t) = Ce^{2\pi it\gamma_0}e^{-s(t-t_0)^2}$$

とすると，

$$\hat{\varphi}(\gamma) = C\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2\pi it_0(\gamma-\gamma_0)}e^{-(\pi^2/s)(\gamma-\gamma_0)^2}$$

となる．そして，式 (7.2) を考慮して，次の式を得る．

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_2^2 &= \frac{|C|^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2s}} \\
\|(t-t_0)\varphi(t)\|_2^2 &= \frac{|C|^2\sqrt{\pi}}{2(2s)^{3/2}} \\
\|(\gamma-\gamma_0)\hat{\varphi}(\gamma)\|_2^2 &= \frac{|C|^2\sqrt{s}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}
\end{aligned}$$

また，必然的に，式 (7.3) が得られる．

問題 7.3 （**Gabor 分解**）

$s>0$ とし，次式を満たす任意の $C \in \mathbb{C}$ を選ぶ．

$$|C|^2 = \sqrt{\frac{2s}{\pi}}$$

そのとき，変調され平行移動されたガウス関数 φ（例 7.2 において定義されている）は，$\|\varphi\|_2 = 1$ という特性を持つ．それら L^2 で正規化されたガウス関数から，次の式を得る．

$$\|(t-t_0)\varphi(t)\|_2^2 = \frac{1}{4s} \quad かつ \quad \|(\gamma-\gamma_0)\hat{\varphi}(\gamma)\|_2^2 = \frac{1}{4\pi^2}s$$

このとき，$\Delta^2 t_s \equiv 4\pi(1/4s) = \pi/s$ と $\Delta^2\gamma_s \equiv 4\pi(s/4\pi^2) = s/\pi$ は，それぞれ φ および $\hat{\varphi}$ に関する分散を表す．また，

$$\Delta^2 t_s \Delta^2 \gamma_s = 1$$

である．これは，式 (7.3) を記述するもう一つの方法となる（例 7.33 を参照）．

Gabor の方法は，時間-周波数領域を，中心が $(n\Delta^2 t_s, m\Delta^2\gamma_s) \in \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$，長さが $\Delta^2 t_s$，幅（高さ）が $\Delta^2\gamma_s$ の（半開の）矩形 $R_{m,n}$ で重複せずにおおうことを必要とした．Gabor の目標は，これは『スペクトル解析』の目標でもあるのだが，信号 f を『最適な』基本信号で離散的に分解することであった．

Gabor の最適化の考えは,『時間-周波数解析』を導く古典的不確定性原理の不等式に由来するものであった．彼は，最適な基本信号は情報平面（あるいは領域），すなわち時間-周波数領域あるいは相空間，の効果的な分解をもたらすと論じた．この効果的な分解は，情報平面に可算個の分割領域をもたらす．それぞれの領域は，時間および周波数領域において十分に局所化される．よって，領域 R に関する係数 c は，信号 f 内の R の情報量を特徴づけるものとなる．そして，R の異種の情報を区別するために，より小さい領域を必要とはしないのである．従って，情報平面において小さな領域を持つ基本信号の可算個からなる集合を見つけることが，要求される．

時間と周波数の分散の積は,『情報領域』の自然な概念であり，それで十分なものである．実際，もし，積 $\|(t-t_0)g(t)\|_2\|(\gamma-\gamma_0)\hat{g}(\gamma)\|_2$ が，他の信号と比較して小さいとしたら，そのとき g とそのスペクトル $\hat{g}$ は，(t_0,γ_0) の（相対的に）より近くに局所化される．つまり，g を特徴づけている情報は,（相対的に）より小さい領域 R に帰属するものとなる．この知見は，古典的不確定性原理の不等式と，式 (7.2) において等号が成立するのが，変調され平行移動されたガウス関数によってであるという主張を結び付けることにより，Gabor に信号分解における次の式を得るにいたらせた．

$$f(t) = \sum_{m,n} c_{m,n}\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/4} e^{2\pi i t m\Delta^2\gamma_s} e^{-s(t-n\Delta^2 t_s)^2} \tag{7.5}$$

なお，例 7.2 において $C=(2s/\pi)^{1/4}$ かつ $(t_0,\gamma_0)=(n\Delta^2 t_s, m\Delta^2\gamma_s)$ である φ は，$R_{m,n}$ と関連している．

Gabor は，また，$R_{m,n}$ に関する係数 $c_{m,n}$ を評価する方法も導いた．その方法については検討されてきているが，ここで詳しく記述することはしない．

定義/討論 7.4　**(a)** ヒルベルト空間 H における数列 $\{x_n\}$ がフレームであるとは，$A,B>0$ が存在して，

$$\text{任意の}\quad y\in H\quad\text{に対して，}\quad A\|y\|^2 \le \sum |\langle y,x_n\rangle|^2 \le B\|y\|^2 \tag{7.6}$$

ということである．ここで，$y\in H$ のノルムは，$\|y\|=\langle y,y\rangle^{1/2}$ である．A と B は，フレーム定数であり，$A=B$ のとき，それは，タイトなフレームであるという．フレームは，そのどの要素でも取り除かれたらもはやフレームたりえない時，完全という．この定義とそれに基づく結果は，[BenWa] の章の主題であり，本書のはじめの方で記述されている．フレームの理論は，Duffin と Schaeffer [DuSc] に依っている．[Y], [DGrMe], [HWa], [Ho] を参照されたい．

(b) フレーム $\{x_n\}$ によるフレーム作用素 $S:H\to H$ は，次式で定義される．$Sy=\sum\langle y,x_n\rangle x_n$

(c) $\{x_n\}\subseteq H$ を，フレームが A と B であるフレームとする．フレーム分解の定理によれば，S は位相同型（定義 7.14a）であり，その逆 $S^{-1}:H\to H$ について，$\{S^{-1}x_n\}$ はフレーム定数 B^{-1} と A^{-1} を持つフレームであり，さらに，次式が成り立つことが示される．

$$\text{任意の}\ y\in H\ \text{に対して}\qquad \begin{aligned} y &= \sum\langle y,S^{-1}x_n\rangle x_n \\ &= \sum\langle y,x_n\rangle S^{-1}x_n \end{aligned} \tag{7.7}$$

(d) $H=L^2(\mathbb{R}), g\in L^2(\mathbb{R}), a,b>0$ とする．もし，定義 7.1 で定義される Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ がフレームであるなら，それは，Gabor フレームであるという．

$H=L^2(\mathbb{R})$，$\psi\in L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき，もし，定義 7.1 で定義されるウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}\}$ がフレームなら，それは，ウェーブレット・フレームであるという．

問題 7.5　（基本的問題）

f を複素信号とする．離散信号や種々の他の領域において定義された信号を考えることもできるが，条件を明確にするため，仮に f を $\mathbb{R}$ 上で定義されているとする．

基本的問題とは，次式で示される f のフレーム分解を行うことである．

$$f=\sum c_n s_n \tag{7.8}$$

ここで，係数 c_n と調和子（あるいは基本信号）s_n は，以下に示す意味で『最適な』時間-周波数解析を与える．

式 (7.8) における係数は，信号解析の目的からするとまさしく計算可能で妥当なものであるべきである．それゆえ，信号の計算可能なサンプリング値は，まず最初に考慮されるべき係数である．古典的なサンプリング定理 (7.1) は，バンドリミテッドな信号や規則的なサンプルを扱う場合の分解公式を示しているが，この定理には重要な変形が存在する．それらの定理においては，規則的なサンプルは利用できず，また，利用できたとしても信号の再構築にとって十分な情報とはならない．実際，定理 (7.1) の考えのもとに，数多くのサンプリング定理が存在し，それらは物理的問題に応じて異なったタイプの手に入れやすいサンプル値を扱う定理となっている．それらの定理については，7.7 節において議論する．

式 (7.8) における基本信号は，信号解析の目的からするとまさしく基本的でかつ妥当な信号であるべきである．それゆえ，Gabor は，ガウス関数を変調，平行移動したものを基本信号として選んだ．なぜなら，それらの時間，周波数における分散の積は，古典的不確定性原理の不等式 (7.2) にとって最適なものだからである．この選択に関する詳細は，問題 7.3 Gabor 分解のところに記述されている．情報平面における最小の領域についての他の概念は，時間の長さや周波数の分散に関する規準によって規定されるが，それは，対処すべき問題に応じて信号の再構成に制約を与えることにもなる．それら多くの概念は，式 (7.2) に示される不確定性原理の不等式に基づく結果であり，種々の物理的結論を導き出している．それら種々の不等式は，7.8 節で議論されている．

式 (7.8) におけるサンプリングの役割や係数，調和子の不確定性に加え，この式において重要なことは，係数と調和子は適合したものでなければならないということである．実際，求めたい係数や調和子のある種のものには，式 (7.8) の形式の再構成を行うのにふさわしくないものもある．そこで，7.4 節において定量的に，この適合に関する問題をフレーム分解に適するように記述し，位相同型について議論している．

ここでのテーマは，古典的なサンプリング定理や古典的不確定性原理の不等式の一般化という面から，フレーム分解に基づく再構成という方法により基本的問題を理解することである．7.3 節の最初の段落に述べた時間-周波数法は，このような面から理解される．この方法は，理にかなったものと思われる．注意 7.7 を参照すること．参考文献は，[AU]．

例 7.6　（**Dirichlet** 核に対する情報平面）

(a) $g = d_{2\pi\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ を Dirichlet 核と呼び，次のように定義する．

$$d_{2\pi\Omega}(t) = \frac{\sin 2\pi\Omega t}{\pi t}$$

関数 d_λは，L^1ダイレーション $d_\lambda(t) = \lambda d(\lambda t)$ であり，ここで，$d(t) = (\sin t)/(\pi t)$ である．すると，明らかに，$\hat{d}_{2\pi\Omega} = \mathbf{1}_{(\Omega)}$となる．Fourier 変換における完全なフレームについての基準，例えば [BenWa, Theorem 3.51] 等により，$\Omega \geq 1/2$ であり，かつその場合にのみ，

$\{\tau_k g : k \in \mathbb{Z}\}$ は，$V_0 \equiv \bar{sp}\{\tau_k g\}$ の完全なフレームであることが分かる．さらに，Parseval の定理を用いると，$\Omega = 1/2$ であり，かつその場合にのみ，$\{\tau_k \varphi\}$ は，V_0 の正規直交基底であることが分かる．$\Omega > 1/2$ のとき，$\{\tau_k \varphi\}$ は，V_0の正規直交基底であり，ここで，

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \frac{\hat{g}(\gamma)}{(\sum |\hat{g}(\gamma + n)|^2)^{1/2}}$$

である．$\Omega < 1/2$ の場合には，[BenWa, Theorem 3.56] に記されているフレームの特徴付けにより，$\{\tau_k g\}$ が V_0のフレームであることが分かる．

(b) $a, b > 0$ とし，次式で定義される Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ を考える．

$$\varphi_{m,n}(t) = e^{2\pi itmb}\, d_{2\pi\Omega}(t - na)$$

そうすると，

$$\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma) = \tau_{mb}(e_{-na}\mathbf{1}_{(\Omega)})(\gamma)$$

となる．よって，

$$\|(t - na)\varphi_{m,n}(t)\|_2 = \infty$$

であり，これは，Gabor 分解について記した問題 7.3 において述べた分散の点から，情報平面の分解を妨げることを意味している．定理 7.35a と比較されたい．

一方，$t = \pm 1/(2\Omega)$ で $d_{2\pi\Omega}(t) = 0$ なので，$0 < s \leq 1$ と固定すると，区間

$$I_{m,n} = \left[na - s\left(\frac{1}{2\Omega}\right), na + s\left(\frac{1}{2\Omega}\right)\right)$$

は，$\varphi_{m,n}$の主要な突出部 (the major lobe) の領域に含まれている．それゆえ，$I_{m,n}$は，$d_{2\pi\Omega}$ が集中している集合の重要な部分であると言えるのである．この，区間 $I_{m,n}$は，s/Ωの長さを持っている．また，$\hat{\varphi}_{m,n}$は，区間

$$J_{m,n} = [mb - \Omega, mb + \Omega)$$

に集中していると言っても良い．ここで，半開矩形 $R_{m,n} = I_{m,n} \times J_{m,n}$を定義しよう．この矩形の面積 $2s$ は，時間と周波数において『集中していること』を表しており，それゆえ，その矩形は，問題 7.3 の内容に適合したものとなっている．

もし，$a \leq s/\Omega$かつ $b \leq 2\Omega$なら，すなわち，$na + s/(2\Omega) \geq (n+1)a - s/(2\Omega)$ かつ $mb + \Omega \geq (m+1)b - \Omega$なら，そのとき，$\{R_{m,n}\}$ により情報平面の分割が得られる．この分割は，もし $a = s/\Omega$かつ $b = 2\Omega$が成り立ち，かつその場合に限ってのみ重複しないものとなる．もし，$a > s/\Omega$あるいは $b > 2\Omega$なら，そのとき $\{R_{m,n}\}$ は，情報平面の分割ではない．

(c) $\psi = d_{2\pi\Omega}$とし，次式で定義されるウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}\}$ を考える．

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\, d_{2\pi\Omega}(2^m t - n)$$

すると，

$$\hat{\psi}_{m,n}(\gamma) = 2^{-m/2}(e_{-n} \quad \mathbf{1}_{(\Omega)})\left(\frac{\gamma}{2^m}\right)$$

となる．

$t = \pm 1/(2\Omega)$ で $d_{2\pi\Omega}(t) = 0$ だから，$d_{2\pi\Omega}$は，区間

$$\left[-s\left(\frac{1}{2\Omega}\right), s\left(\frac{1}{2\Omega}\right)\right)$$

に集中していると言うことができる．ここで，s は，$0 < s \le 1$ に固定されている．よって，$\psi_{m,n}$は，区間

$$I_{m,n} = \left[\frac{n}{2^m} - \frac{s}{2^m}\left(\frac{1}{2\Omega}\right), \frac{n}{2^m} + \frac{s}{2^m}\left(\frac{1}{2\Omega}\right)\right)$$

に集中し，この区間は，中心が $n/2^m$であり，次式で示される長さを持つ．

$$|I_{m,n}| = \frac{s}{2^{m-1}}\left(\frac{1}{2\Omega}\right)$$

また，ψは，区間 $[-\Omega, \Omega)$ に集中しているので，$\hat{\psi}_{m,n}$は，区間

$$J_{m,n} = [-2^m\Omega, 2^m\Omega)$$

に集中する．この区間は，中心が 0 で長さは $|J_{m,n}| = 2\Omega 2^m$である．半開矩形を $R_{m,n} = I_{m,n} \times J_{m,n}$と定義すると，その面積は $2s$ である．

もし，$s/(2\Omega) \ge 1$ なら，そのときにはどのような m に対しても，

$$\bigcup_n R_{m,n} = \mathbb{R} \times [-2^m\Omega, 2^m\Omega)$$

となる．この和集合は，$s/(2\Omega) = 1$ なら共通の元を持たない．よって，もし $s/(2\Omega) \ge 1$ なら，そのとき $\{R_{m,n}\}$ は，情報平面において重複した分割となる．[D2, 965 頁], [RioVe, 15–18 頁] と比較されたい．

注意 7.7 問題 7.5 において述べた基本的問題についての対処方法は，確かに数学的であり，この章では目覚ましく出現してきた理論の精神で記されている．しかしながら，Gabor のオリジナルな理論（これは，問題 7.3 に述べられている）を拡張するため問題 7.5 において結合されたそれらの概念は，表面上は全く別物のように見える種々の困難な工学の問題を統一するものとなっている．これについては，[Ma] と比較されたい．ここで，その例を二つ述べることと

する．

1. **計算に関する問題**　gを離散的信号，例えば，内耳の蝸牛管フィルターのインパルス応答としよう．xをgによって処理される（会話の）信号とすると，$x*g$が計算されるべきものとなる．この点については，7.2節と比較されたい．このとき，gとxは，$x*g$を計算する速さと正確さに見合うように選択されなければならない．$x*g$を計算することは，基本的問題における分解ということと同じことであり，ここで言う正確さ（情報の最小の損失）は，妥当なサンプリングによりもたらされ，速さは，そのサンプリングと不確定性原理による妥当な制約に反映される．
2. **リアルタイム・サンプリングの問題**　検知システム（センシングシステム），例えばアンテナ群のようなものは，データ集約的な信号を受信していると仮定しよう．問題は，入ってくるデータをリアルタイムにサンプリングすることであり，欲しい（あるいは欲しくない）信号がそのデータに内包されているかどうかを見極めることである．それゆえ，信号の限定（分解という面における基本的問題）という問題が存在することになる．その問題とは，適切なサンプリングにより情報の損失を最小限にすること，および適切に不確定性原理の基準を選択することにより処理時間を最小にすることである．不確定性原理は，『資源の配分』，つまりサンプリングによるコストの最適化の際にのみ問題となる．例えば，稲妻を解析する際，稲妻が存在しなければ通常はサンプリングを行う必要はないが，嵐のときにはその期間に渡って広範にデータをサンプリングする必要があるであろう，ということである．

問題7.3におけるガウス関数のGabor流の用法に照らして，ガウス関数を用いたGabor系の完全性と分解性の特質を以下に要約する．[Fo, 166–169頁]を参照されたい．

定理 7.8　$s>0$および$a,b>0$とし，$g(t)=(2s/\pi)^{1/4}e^{-st^2}$としよう．定義7.1にて述べた$g$に対してGabor系$\{\varphi_{m,n}\}$を定義する．

(a) スパン$sp\{\varphi_{m,m}\}$が$L^2(\mathbb{R})$において密であるのは，$ab\leq 1$のときでありかつその場合に限る．

(b) Gabor系$\{\varphi_{m,n}\}$が$L^2(\mathbb{R})$のフレームであるのは，$ab<1$のときでありかつその場合に限る．(従って，(b)より，$ab<1$なら$\overline{sp}\{\varphi_{m,n}\}=L^2(\mathbb{R})$であることが分かる）

ガウス関数についてのこの種の結論は，1930年代の初頭にvon Neumannによって先鞭をつけられたものであった[v, Section 5.4, 504–頁]．定理7.8aの証明は，[Baretal], [Pe] (1971)に見ることができる．もし$ab<1$なら，そのとき$\{\varphi_{m,n}\}$はフレームである，という定理7.8bの証明は，[SeWal]に依っている．[DGrMe], [D2]を参考にされたい．[SeWal]に述べられている内容および[Se]にある関連する研究は，*Beurling*密度を取り扱っている．例えば，定義7.42

がそれにあたる．また，$ab=1$ のときには $\{\varphi_{m,n}\}$ はフレームではない，ということの証明は，以下の事実に依っている．

$$Zg\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0 \tag{7.9}$$

$$Zg\text{は } \mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}\text{上連続} \tag{7.10}$$

Zak 変換 Zが不等式 $0<A\leq Z\leq B<\infty$ を満たし，かつその場合に限って与えられた L^2 関数に対する Gabor 系は，フレームである（この場合，$ab=1$ なら完全なフレームである）([BenWa, Section 3.4])．なお，式 (7.9) を証明する際には，次のことに気をつけること．

$$Zg\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=a^{1/2}\left(\frac{2s}{\pi}\right)^{1/4}\sum_k(-1)^k e^{-sa^2((1/2)+k)^2}\equiv C\sum a_k$$

ここで，

$$a_0=e^{-s(a/2)^2}, a_{-1}=-e^{-s(a/2)^2}, a_{-2}=e^{-s(3a/2)^2}, a_1=-e^{-s(3a/2)^2}$$

である．よって，級数 $Zg(1/2,1/2)$ が絶対収束しているので，式 (7.9) が得られることになる．さらに，式 (7.10) を証明するために，任意の $K\in\mathbb{N}$ に対し、次項が $[-K,K]$ 上，一様収束していることを証明することが必要である．

$$\sum e^{-sa^2(x+k)^2}$$

なぜなら，$x\in[-K,K]$, $k>K$ に対して $(x+k)^2>(k-K)^2>0$ であり，$x\in[-K,K]$, $k<-K$ に対して $(x+k)^2>(k+K)^2>0$ だからである．

$ab=1$ のケースは，Jacobi のテータ関数を用いて Zgを直接計算することによっても証明することができる．例えば，[DGrMe, 1274–1275 頁] を参照されたい．また，[Pe] と比較されたい．

問題 7.3 において動機付けられたように，定理 7.8 において $ab=1$ の場合，$a=\Delta t_s$かつ $b=\Delta\gamma_s$とすることができる．しかし，実際には，この結論は，$a,b>0$ の任意の値に対して成り立つものである．どのような場合においても，ガウス関数とその分散に基づく Gabor のオリジナルなアイディアは，$L^2(\mathbb{R})$ に対するフレームを導出しない．

一方，元 $f\in L^2(\mathbb{R})$ は，$ab=1$ の場合，計算可能な系 $\{c_{m,n}\}$ により $f=\sum c_{m,n}\varphi_{m,n}$と表現される Gaussian Gabor 系を持つ．なお，この分解の弱点は，$\{c_{m,n}\}$ が非有界数列であり収束の程度が $L^2(\mathbb{R})$ ノルムの位相よりかなり弱いことである [Ja1, Theorems 4.6, 4.7; Ja2, Section 4.4]． [Bas] を参考にされたい．

注意 7.9 **(a)** 時間-周波数解析は，物理学，音楽，数学やその他の分野において長い歴史を持っている．このことについては，例えば，[C], [Fo], [Ri] を参照されたい．Gabor [Ga] は，エ

学において最初に系統だった研究を行った．この分野における彼の貢献をここで強調しておきたい．なぜなら，彼のアイディアの自然な発展が，ここで述べる方法の基礎となっているからであり，信号処理が，我々の究極の目的であるからである．

(b) 近年，情報平面は，ウェーブレット理論を展開するフィールドになってきている．これは，例えば [D2] に見ることができる．この場合，もし，$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ が $[0,1)$ に集中しており，かつ$\hat{\psi}$が $[1,2) \cup (-2,-1]$ に集中しているなら，そのときウェーブレット系は，時間軸を除いて情報平面を重複せずに覆うことになる．この，ψに関する集中の仮定により，$\psi_{m,n}$が $[n/2^m,(n+1)/2^m)$ に集中しており，かつ$\hat{\psi}_{m,n}$ が $[2^m,2^{m+1}) \cup (-2^{m+1},-2^m]$ に集中していることを理解することができる．この方法以外の情報平面の分割は，[CMW2] において述べられている基本的事項や定理 7.40 を用いることで行うことができる．そして，情報平面は，実際，Gabor やウェーブレット系，それら同類のものを超える情報平面の，想像によるそしてときには適用可能な分割方法を与えるようないわゆる家内工業が存在するのである．

(c) 物理学の問題により誘因される分割にあたっては，情報平面の定義は，$\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$であり，ここで$\hat{\mathbb{R}}$は，$\mathbb{R}$ 上で定義されている関数のフーリエ変換の領域である．ウェーブレット理論においては，スケールと周波数を比較する自然な傾向があるため，ここでこの定義を述べたのであり，この比較に関して様々な観点が存在する．

7.4　フレーム分解

問題 7.5 では，信号 fの分解は，それら係数が計算可能でありかつ相互に関連した特性を持ち，また，基本信号（調和子）が，情報平面における最適な特性を持つように求められる．受け入れやすさのために，計算の可能性や関連性を解析する際，fについてある種のサンプリング法を用いるのは当然のことであり，7.3 節に示したように，情報平面における最適性を取り扱う際に，ある種の不確定性原理の不等式を用いることは妥当なことである．そして最後には，効果的な分解方法を得るために，サンプリング方法と不確定性原理の不等式が両立しなければならない．この節では，これら分解の構造をフレームの理論と信号と係数間の写像の理論により一般的に定式化する．サンプリングおよび不確定性原理の不等式における解析的結果については，後の節において述べる．

Hを無限次元の可分な複素 Hilbert 空間とする．無限次元の複素 Hilbert 空間は，可分であり，かつそのときに限って正規直交基底を含むことが良く知られている（例えば，[GoGol, 34–35 頁]）．

定理 7.10　$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を Hにおける正規直交列としよう．

(a) Besselの不等式．次の写像

$$L : H \to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \qquad y \mapsto \{\langle y, x_n\rangle\} \tag{7.11}$$

は連続である．実際，

$$\text{任意の } y \in H \text{に対して，} \quad \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \le \|y\|^2$$

である．

(b) どのような $y \in H$に対しても，$\sum \langle y, x_n\rangle x_n$は，$H$で収束している．

(c) $\sum c[n]x_n$は，$c = \{c[n] \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{Z}^d\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ であるとき，かつそのときに限り，Hで収束する．

(d) もし，$y = \sum c[n]x_n$が，Hで収束しているなら，$c[n] = \langle y, x_n\rangle$ である．

この「正規直交性」と「収束性」に関する結論は，古典的かつ基礎的なものである（[GoGol, 25–26 頁] を参照のこと）．現在，Bessel の不等式は,「Parseval–Plancherel の等式」と正規直交基底に関する等長写像にとって代わられている．この点については，例えば，[GoGol, 27–28 頁] を参照されたい．

定理 7.11 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を Hにおける正規直交列とする．その場合，以下は同等である．

i. $\{x_n\}$ は，Hの正規直交基底である．

ii. どのような n に対しても $\langle y, x_n\rangle = 0$ であるなら，$y = 0$ である．

iii. $\bar{sp}\{x_n\} = H$

iv. Parseval–Plancherelの等式．式 (7.11) に示した写像 Lは，線形の全射等長写像である．実際，

$$\text{任意の } y \in H \text{に対して，} \quad \|y\| = \left(\sum |\langle y, x_n\rangle|^2\right)^{1/2}$$

v. Parseval–Plancherel の公式．

$$\text{任意の } x, y \in H \text{に対して，} \quad \langle x, y\rangle = \sum \langle x, x_n\rangle \overline{\langle y, x_n\rangle}$$

定理 7.11 の ***iv*** に示した全射性は，もし $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ なら，定理 7.10 の (c)，(d) に示したことにより，$Ly = c$ となる $y \in H$が存在する，ということを意味している．

系 7.12 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を Hの正規直交基底とする．そのとき，

$$\text{任意の } y \in H \text{に対して，} \quad y = \sum \langle y, x_n\rangle x_n$$

となる．

証明　もし $y \in H$ なら，定理 7.10b により H においては，$\sum\langle y, x_n\rangle x_n = x$ となる．従って，定理 7.10d により，どのような n に対しても $\langle x, x_n\rangle = \langle y, x_n\rangle$ となる．この結論は，定理 7.11 の ***iv*** によっても導かれる．∎

以下に述べる結論は，実際に定理 7.11 の ***iv*** と同様のものである．

定理 7.13　$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ と $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を，それぞれ H と $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ の正規直交基底とすると，次の写像が定義され，線形全射等長写像である．

$$\begin{aligned} L : H &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \sum\langle y, x_n\rangle e_n \end{aligned}$$

証明　線形写像 L は，定理 7.10 の a および c によって定義される．その等長性，特に L の単射性は，Parseval–Plancherel の等式，系 7.12 と定理 7.10d の帰結である．

$$\|Ly\|^2 = \sum|\langle Ly, e_n\rangle|^2 = \sum|\langle y, x_n\rangle|^2 = \|y\|^2$$

その全射性に関しては，$c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ とし，$Lx_m = e_m$ に留意して，以下の計算を行う．

$$c = \sum\langle c, e_n\rangle e_n = \sum\langle c, e_n\rangle Lx_n = L\left(\sum\langle c, e_n\rangle x_n\right)$$

ここで，定理 7.10c により，$y = \sum\langle c, e_n\rangle x_n \in H$ である．よって，$Ly = c$ となる．∎

定義/注意 7.14　**(a)** 線形写像 $L : H_1 \rightarrow H_2$ は，それが全単射であり連続であるなら，位相同型であると言い，この場合，その逆写像 L^{-1} もまた連続である．

(b) H の列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ は，もし次に示す内積が $k \in \mathbb{Z}^d$ に依存しなければ，定常であると言われる．

$$R_n = \langle x_{n+k}, x_k\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}^d$$

(c) 列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$ は，次式が成り立つ場合には，極小列であると言われる．

$$\text{任意の } n \in \mathbb{Z}^d \text{ に対して，} \quad x_n \notin \bar{sp}\{x_k : k \neq n\}$$

(d) 列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}, \{y_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$ は，次式が成り立つ場合には，双直交列であると言われる．

$$\text{任意の } m, n \in \mathbb{Z}^d \text{ に対して，} \quad \langle x_m, y_n\rangle = \delta_{m,n}$$

Hahn–Banach の議論により，与えられた列 $\{x_n\} \subseteq H$ には次のような数列 $\{y_n\} \subseteq H$ が存

在することが分かる．すなわち，$\{x_n\}, \{y_n\}$ は，$\{x_n\}$ が極小であり，かつその場合に限って，双直交列となる．さらに，$\{y_n\}$ は，$\{x_n\}$ が Hにおいて極小であり，かつ$\bar{sp}\{x_n\} = H$ であり，その場合に限って，一意に求められる．

(e) 列 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$は，次式で示される Bessel 写像が定義された線形写像であるときには，Bessel 列と言われる．

$$\begin{aligned} L : H &\to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n \rangle\} \end{aligned}$$

$\{x_n\}$ は，次が成り立つ場合には，Hilbert 列であると言われる．

任意の $c = \{c[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ に対して $y_c \in H$が存在して次を満たす

任意の $n \in \mathbb{Z}^d$に対して，$c[n] = \langle y_c, x_n \rangle$ が成り立つ

以上より，明らかに Bessel 写像 L が全射であるのは Bessel 列が Hilbert 列のときであり，そのときに限る．

(f) $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$を Bessel 写像 L を持つ Bessel 列とする．そうすると，L は連続である．つまり，

$B > 0$ が存在し，任意の $y \in H$に対して，

$$\sum |\langle y, x_n \rangle|^2 \leq B\|y\|^2 \tag{7.12}$$

であり，

任意の $c = \{c[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ に対して，

Hにおいて $y \equiv L^*c = \sum c[n]x_n$が存在する (7.13)

ということである．ここで，$L^* : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to H$は L の随伴行列であり，式 (7.13) 中にある総和のノルム収束の「幾何」は，下記の s_nにより記述される．式 (7.4) と比較されたい．

式 (7.12) を証明するため，まず，次の線形写像を定義する．

$$\begin{aligned} L_N : H &\to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n \rangle : |n| \leq N\} \end{aligned}$$

ここで，$n = (n_1, \ldots, n_d)$ であり，$|n|^2 \equiv \sum |n_j|^2$である．どのような L_Nも明らかに連続で

あり，$y \in H$に対して $Ly \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ であることから，次式を得る．

$$\|L_N y - Ly\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |\langle y, x_n \rangle|^2$$

この値は，L の定義により，$N \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，

$$\text{任意の } y \in H \text{に対して } \ell^2(\mathbb{Z}^d) \text{ において } \lim_{N\to\infty} L_N y = Ly$$

であり，L は，一様有界性原理により有界となる．

$$\sup_N \|L_N\| \equiv B^{1/2} < \infty$$

式 (7.13) を証明するため，ここで，式 (7.12) を次の方法に従って利用する．$c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ とし，

$$s_N = \sum_{|n|\le N} c[n] x_n$$

とする．そのとき，$N > M$の場合には，ノルムの定義と Hölder の不等式から次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\|s_N - s_M\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{M<|n|\le N} c[n] \langle x_n, y \rangle \right|^2 \\
&\le \sup_{\|y\|=1} \sum_{M<|n|\le N} |c[n]|^2 \sum_{M<|n|\le N} |\langle x_n, y \rangle|^2 \\
&\le B \sup_{\|y\|=1} \|y\|^2 \sum_{M<|n|\le N} |c[n]|^2
\end{aligned}$$

以上から，$\{s_N\} \subseteq H$は Cauchy 列となり，式 (7.13) が従う．$y \equiv \lim s_N$とすることで $L^* c = y$は，直ちに分かる．

(g) ここで定式化した概念には，長く連関した歴史がある．それについては，例えば，[Ben3, Definition 2.14–Theorem 2.17] で扱われている．なお，そこでは，Bessel 列と Hilbert 列が，$\{x_n\}$ が極小で完備である数列の場合の $\{y_n\}$ により定義されていることに注意する必要がある．

$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$が極小で完備な数列であり，$\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq H$が双直交数列であるなら，必ずしも$\bar{sp}\{y_n\} = H$ではない．また，$d = 1$ の場合には，Kaczmarz と Steinhaus (1935) による一つの反例がある ([Hi1, 19–20 頁])．一方，Masani と Rozanov([Mas]) は，$\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ が極小，完備であり，かつ定常な列の場合，$\bar{sp}\{y_n\} = H$であることを証明した．この結論は，また，$d > 1$ の場合にも正しく，次の写像が線形な等長同型であることに依っている．

$$U : L^2_\mu(\mathbb{T}^d) \to \bar{sp}\{x_n\}$$

ここで，

$$\text{任意の } n \in \mathbb{Z}^d \text{ に対して，} \quad U(e^{2\pi i n\cdot\gamma}) \equiv x_n$$

であり，$\{x_n\}$ は定常であって，μは，$\mu^\vee[n] = R_n$で定義されるパワースペクトル測度である．[Ben3, Theorem 2.5] を参照されたい．

定理 7.15 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$とする．列 $\{x_n\}$ が，A と B のフレーム定数を持つ Hのフレームであるための必要十分条件は，

$$\begin{aligned} L : H &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n\rangle\} \end{aligned} \tag{7.14}$$

が定義され，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ の閉じた部分空間上への位相同型であることである．このとき，

$$\|L\| \le B^{1/2} \text{ および } \|L^{-1}\| \le A^{-1/2}$$

が成り立つ．ここで L^{-1}は，値域 $L(H)$ 上で定義されるものである．

証明 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ をフレームと仮定する．そのとき，

$$\text{任意の } y \in H \text{ に対して，} \quad \|Ly\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \le B\|y\|^2$$

である．特に，L は，定義され，有界な線形作用素であって，$\|L\| \le B^{1/2}$である．もし，ある $y \in H$に対して $\{\langle y, x_n\rangle\} = 0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ であるなら，フレームの下界の条件により $y = 0$ となり，L は単射となる．よって，L^{-1}は，$L(H)$ 上の線形な単射として存在する．そのとき，

$$\text{任意の } c \in L(H) \text{ に対して，} \quad \|L^{-1}c\|^2 = \|y_c\|^2 \le \frac{1}{A} \sum |\langle y_c, x_n\rangle|^2$$

であり，ここで，$Ly_c = c$ および $c = \{\langle y_c, x_n\rangle\}$ である．よって，L^{-1}は，連続であり，$\|L^{-1}\| \le A^{-1/2}$である．$L(H)$ は，一般的な原理からすると $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ において閉じていることになるが，このことを明確に以下に示すこととする．$\{c_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L(H)$ は，$c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ に収束するものとし，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $Ly_n = c_n$とする．このとき，$\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ は，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ における Cauchy 列であり，よって $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ は，L^{-1}が（一様に）連続であることから，Hにおける Cauchy 列である．そして，それゆえ，Hにおいて $\lim_{n\to\infty} y_n = y$が存在する．最後に，$L$ の連続性から $Ly \in L(H)$ であって，$\lim_{n\to\infty} \|c_n - c\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = 0$ であることから，$c = Ly$である．

逆に，もし L が，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ の閉じた空間 $L(H)$ 上の位相同型であれば，

$$\text{任意の } y \in H \text{ に対して，} \quad \|Ly\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \le \|L\|\|y\| \tag{7.15}$$

かつ，

$$\text{任意の } c = Ly_c \in L(H) \text{ に対して，} \quad \|L^{-1}c\| \le \|L^{-1}\|\|c\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \tag{7.16}$$

である．$\|Ly\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sum |\langle y, x_n\rangle|^2$であるので，式 (7.15) および式 (7.16) より，

$$\text{任意の } y \in H \text{ に対して，} \quad \|L^{-1}\|^{-2}\|y\|^2 \le \sum |\langle y, x_n\rangle|^2 \le \|L\|^2\|y\|^2$$

よって，$\{x_n\}$ は，A と Bがフレーム定数であるフレームである．ここで，$A \le \|L^{-1}\|^{-2}$および $\|L\|^2 \le B$である． ∎

定理 7.16　**(a)** $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$を Hのフレームとする．$\{x_n\}$ は，それが極小のとき，そして，その場合に限って，完全なフレームである．証明に際しては，例えば，[Ben3, Theorem 4.6] を参照されたい．

(b) $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$を，Bessel 単射写像 L を持つ定常で極小，完全な数列とする．もし，$\{x_n\}$ が，Hilbert 列であるなら，$\{x_n\}$ は Hの完全なフレームである．

証明　定理 7.16 の (b) を証明する．もし $\{x_n\}$ が Hilbert 列なら，$L^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to H$は，定義され，さらに L が連続であることから，開写像定理を適用する．これらのことから，$\{x_n\}$ がフレームであることがわかり，極小性の仮定と定理 7.16 の (a) から，そのフレームの完全性を得ることができる． ∎

定常性は，以下に述べるように，Gabor 系とウェーブレット系を区別するために使用される．

例 7.17　（**定常性と Gabor 系**）

(a) $g \in L^2(\mathbb{R})$ および $a, b > 0$ とし，Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ を考えることとする．もし，$ab = 1$ なら，$x(m,n) = \varphi_{m,n}$ $((m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2)$ により定義される列 $x : \mathbb{Z}^2 \to H = L^2(\mathbb{R})$ は，定常な列である．なお，定常な Gabor 系のさらなる性質や解析におけるその他の問題に関連する性質については，例えば [Ben3, Section 4] を参照されたい．フレームの場合には，$ab = 1$ のとき Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ は，完全であることを想起せよ．

(b) もし，$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ であるなら，ウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}\}$ は，定常ではない．

定理 7.18　$L : H \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ を Hから $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ の閉じた部分空間 $L(H)$ への位相同型とし，$\{e_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq L(H)$ とする．

(a) 列 $\{e_n\}$，列 $\{L^{-1}e_n\}$ が Hのフレームのとき，その場合に限って Hilbert 空間 $L(H)$ のフ

レームである．$\{e_n\}$ が，A および Bのフレーム定数を持つフレームのとき，

$$A_H = A\|L\|^{-2}, \quad B_H = B\|L^{-1}\|^2$$

は，$\{L^{-1}e_n\}$ のフレーム定数となる．

(b) もし $\{e_n\}$ が $L(H)$ の正規直交基底なら，すべての $y \in H$に対して，

$$L(H)\text{で} \quad Ly = \sum \langle Ly, e_n\rangle e_n, \quad \{\langle Ly, e_n\rangle\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

および

$$H\text{で} \quad y = \sum \langle Ly, e_n\rangle L^{-1}e_n \tag{7.17}$$

である．

(c) もし $H \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ であり，$\{e_n\}$ が $L(H)$ の正規直交基底なら，$\{L^{-1}e_n\}$ は，Hの完全なフレームである．

証明　(c) は，Riesz 基底の定義から，(b) は仮定や定理 7.10，系 7.12 から直ちにわかる．そこで，(a) の一方向のみを証明することとする．もう一方向も同様に証明することができる．

$\{e_n\} \subseteq L(H)$ を，フレーム定数 A と Bを持つフレームとする．そのとき，$y \in H$に対し，

$$\sum |\langle y, L^{-1}e_n\rangle|^2 = \sum |\langle e_n, (L^{-1})^* y\rangle|^2$$

および

$$A\|(L^{-1})^* y\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \le \sum |\langle (L^{-1})^* y, e_n\rangle|^2 \le B\|(L^{-1})^* y\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}$$

となる．また，

$$\|(L^{-1})^* y\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \le \|(L^{-1})^*\|\|y\| = \|L^{-1}\|\|y\|$$

および

$$\|y\| = \|L^*(L^*)^{-1}y\| \le \|L^*\|\|(L^*)^{-1}y\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \|L\|\|(L^{-1})^* y\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}$$

である．それゆえ，これらの式を統合することで，$\{L^{-1}e_n\}$ がフレーム定数 A_H，B_Hを持つフレームであることが分かる．∎

問題 7.5 や 7.4 節の最初に述べたここで扱う一般的な問題とは，位相同型 $L : H \to L(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ および $L(H)$ の（正規直交）基底 $\{e_n\}$ を以下を満たすように構成することである．すなわち，式 (7.17) における係数列 $\{\langle Ly, e_n\rangle\}$ は，得やすく必要な特質を反映し，基本信号の数

列 $\{L^{-1}e_n\}$ は，情報平面において必要な継続時間に関する特質を反映したものとなるように $\{e_n\}$ を構成することである．

次に，定理 7.15 の精神で，完全なフレームに対する次の結論を得る．

定理 7.19　$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$ を H のフレームとする．数列 $\{x_n\}$ は，次の写像が定義され，全射な位相同型であるとき，その場合に限って，H の完全なフレームとなる．

$$\begin{aligned} L : H &\to \ell^2(\mathbb{Z}^d) \\ y &\mapsto \{\langle y, x_n\rangle\} \end{aligned} \tag{7.18}$$

証明の概略

(a) $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を完全なフレームとする．そのとき，$\{x_n\}$ は H の Riesz 基底であり ([BenWa, Section 3.3])，これは，ただ一つの双直交列 $\{y_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ を持っている．また，双対性により，$\{y_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ もまた H の Riesz 基底である．式 (7.7) より，

$$H\text{において任意の } y \in H \text{に対し，}\quad y = \sum \langle y, x_n\rangle y_n \tag{7.19}$$

となる．ここで，$\{\langle y, x_n\rangle\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ である．

$\{x_n\}$ がフレームなので，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ の部分空間上で定義された位相同型として L が求められる．この作業は，まさに定理 7.15 において行ったものである．

最後に L が，全射であることを示さなければならない．$c = \{c[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ としよう．そのとき，式 (7.13) を用いると，

$$H\text{で}\quad y_c \equiv \sum c[n] y_n \tag{7.20}$$

である．$\{y_n\}$ は基底であることから，式 (7.20) の表現は一意的であり，それゆえ，式 (7.19) のすべての n に対して $c[n] = \langle y_c, x_n\rangle$ となる．よって，$Ly_c \equiv \{\langle y_c, x_n\rangle\} = c$ である．

(b) L を全射と仮定しよう．この点については定理 7.15 と比較されたい．この仮定から，L^* は単射であり，$c = 0$ のとき，かつそのときに限り $L^*c = 0$ となる．次に任意に $m \in \mathbb{Z}^d$ をとり，$S_m = \{x_n : n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{m\}\}$ について考察してみよう．もし，この数列がフレームであるなら，$\sum d[n]x_n = x_m$ となる $\{d[n] : n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{m\}\}$ が存在することになる．よって，$c = \{c[n] : c[n] = d[n], \text{ for } n \neq m, \text{ and } c[m] = -1\}$ に対する単射性と矛盾する．以上から，S_m はフレームではなく，$\{x_n\}$ が完全なフレームであることがわかる．　▮

例/注意 7.20　(**Paley–Wiener 空間上の Bessel 写像**)

(a) 古典的な Plancherel–Pólya の定理の内容は，以下のようなことである．もし $f \in PW_\Omega$ であ

り $\{t_n : n \in \mathbb{Z}\}$ が一様に離散な数列であるなら，つまり，$\inf\{|t_m - t_n| : m \neq n\} = d > 0$ であるなら，そのときには，次式が成り立つ．

$$\sum |f(t_n)|^2 \leq B\|f\|_2^2 \tag{7.21}$$

ここで，Bは次のような値をとる．

$$B = \frac{4}{\pi^2 \Omega d^2}(e^{\pi\Omega d} - 1)$$

この内容に関しては，例えば，[Ben2, Lemma 42] を参照されたい．また，[Bo2, 97–103 頁] と比較されたい．よって，写像 $PW_\Omega \to \ell^2(\mathbb{Z})$ は，$f \in PW_\Omega$を $\{\langle f, \tau_{-t_n} d_{2\pi\Omega}\rangle\} = \{f(t_n)\}$ に写すものであるが，Bessel 列 $\{\tau_{-t_n} d_{2\pi\Omega}\} \subseteq PW_\Omega$に対応する Bessel 写像である．Boas [Bo1, Theorems 1,2,3] (1940) は，Plancherel と Pólya の議論とは異なるやり方で式 (7.21) の証明を行っている．Boas の方法の魅力的な特徴は，式 (7.21) を重みつきフーリエ変換のノルム不等式，すなわち $\|f\|_{2,\nu}^2 \leq B\|\hat{f}\|_{2,\mu}^2$に書き換えることを可能にした点である．
式 (7.21) において，νは離散測度$\sum \delta_{t_n}$,μは絶対連続測度で$\mu = \mathbf{1}_{(\Omega)}$ (通常は，より分かりやすく $d\mu(\gamma) = \mathbf{1}_{(\Omega)}(\gamma)d\gamma$のように記す)，そして PW_Ωは重みつき L^2空間 $L_\mu^2(\hat{\mathbb{R}})$ である．
$\mu = \mathbf{1}_{(\Omega)}$といった重み係数は，1960 年代初期に端を発する Bell Labs の不確定性原理の理論において重要な役割を演じている ([L2])．また，測度による重み係数は，一般的な不確定性原理の理論において重要な役割を演じている．それらの点については，例えば [Ben1]，[Bo2, Chapter 10] や 7.8 節を参照されたい．
Boas と Plancherel–Pólya は，また，式 (7.21) の対局にある不等式をも得ている． [Bo2, 196–199 頁] と比較されたい．上記のすべてをまとめることで，非調和フーリエ級数や Duffin と Schaeffer の研究の精神で，指数関数 $\{e_{t_n}(\gamma)\}$ に対するフレームに似た不等式を得ることができる．

(b) もし $T, \Omega > 0$ かつ $2T\Omega \leq 1$ であるなら，次に示す写像

$$\begin{aligned} L : PW_\Omega &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \{\sqrt{T} f(nT)\} \end{aligned} \tag{7.22}$$

は，$\ell^2(\mathbb{Z})$ の閉部分空間 $L(PW_\Omega)$ 上への（単射）等長同型写像である．L は，$2T\Omega = 1$ の場合に全射となる．
その等長性は，$f \in PW_\Omega$に対する以下の計算により導かれる．

$$\sqrt{T}\|f\|_2 \quad = \quad \left(T \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma\right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(T\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} |G(\gamma)|^2\, d\gamma\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum |\hat{G}[n]|^2\right)^{1/2} = T\left(\sum |f(nT)|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

ここで，G は $[-\Omega,\Omega)$ において $\hat{f}$ と等しい $1/T$-周期関数として定義され，$[-1/2T,1/2T)\setminus[-\Omega,\Omega)$ において 0 となる．G のフーリエ級数は$\sum\hat{G}[n]e^{-\pi in(2T)\gamma}$であり，$\hat{G}[n]=Tf(nT)$ である．

さらに，$\{\sqrt{T}\tau_{nT}d_{2\pi\Omega}\}\subseteq PW_\Omega$は，Bessel 写像 L（式 (7.22) において定義されている）を持つ Bessel 列である．なぜなら，任意の $f\in PW_\Omega$に対して，

$$
\langle f,\sqrt{T}\tau_{nT}d_{2\pi\Omega}\rangle=\sqrt{T}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\gamma)e^{2\pi inT\gamma}\,d\gamma=\sqrt{T}f(nT)=(Lf)(n)
$$

なお，$\|\sqrt{T}\tau_{nT}d_{2\pi\Omega}\|_2=(2T\Omega)^{1/2}$に留意しておくこと．また，もし $c=\{c[n]\}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ であれば，式 (7.13) により次式が成り立つ．

$$
PW_\Omega\text{で}\quad f(t)=\sum c[n]\sqrt{T}d_{2\pi\Omega}(t-nT)
$$

この式と古典的なサンプリング定理（式 (7.1)）とをあわせると，次式がいえる．

$$
PW_\Omega\text{で}\quad \sum\left(\sqrt{T}c[n]-Tf(nT)\right)d_{2\pi\Omega}=0 \tag{7.23}
$$

式 (7.23) を使用することで，$2T\Omega=1$ のとき L が全射であることを得る．なぜなら，この場合，$\{(1/2\Omega)e^{\pi in\gamma/\Omega}\}$ は，$L^2(\mathbb{T}_{2\Omega})$ の正規直交基底であるからである．

$2T\Omega=1$ の場合に全射であることを計算により証明するために，ここで $c=\{c[n]\}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ とし，関数 $F\in L^2(\mathbb{T}_{1/T})$ を，そのフーリエ級数が$\sum c[n]e^{-\pi in\gamma(2T)}$であるものと定義する．そして，$G\in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ を，$[-\Omega,\Omega)=[-1/2T,1/2T)$ において Fであり，その他の領域で 0 であるものと定義する．加えて，$\hat{f}=G$ となる $f\in PW_\Omega$が存在することに留意すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
c[n]=\hat{F}[n] &= \int_{\mathbb{T}_{1/T}} F(\gamma)e^{\pi in\gamma/\Omega}\,d\gamma \\
&= \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma)e^{\pi in\gamma/\Omega}\,d\gamma=\frac{1}{2\Omega}f(\frac{n}{2\Omega});
\end{aligned}
$$

よって，$\sqrt{T}$の因子を持つ L は，全射である．

なお，この計算は，$2T\Omega<1$ のときには正しくはない．この本質的な理由は，$\{e^{2\pi inT\gamma}\}$ が $L^2[-\Omega,\Omega]$ の基底ではないからである．

7.5 古典的なサンプリング定理

この章では，均等な間隔でサンプリングされた数列 $\{nT\}$ に対するサンプリング定理について述べることとする．この問題に関しては，Bützer 他 [BuSpSte] や Higgins [Hi2] によるすばらしい解説や研究が存在する．また，局所コンパクト・アーベル群についての Kluvánek のサンプリング定理のような，素晴しい研究論文もある [Kl], [Hi2], [Pr2]．さらに，当然のことではあるが，Gabor 系やウェーブレット系に関連する論文，記述が多数存在している．それらは，例えば，[Ben2], [BenHel1], [D2], [DGrMe], [FeGrö], [FrTo], [W] などである．

定理 7.22 において，有効でかつ一般的なサンプリング定理を導くために Gabor フレームを用いることとする [BenHel1]．そして，実際の適用の段階において出現する局所サンプリングの問題を取り上げ，定理 7.26 において，特別ではあるが有効なケースについてのその問題の解を与えることとしよう [BenKar]．

まず，古典的なサンプリング定理 (7.1) を，書き改めることから始める．

定理 7.21 $T, \Omega > 0$ は，$2T\Omega \leq 1$ を満たす一定の値とする．そのとき，

$$\text{任意の } f \in PW_\Omega \text{に対して，} \quad f = T \sum f(nT) \tau_{nT}\, d_{2\pi\Omega} \tag{7.24}$$

である．ここで，収束は，$\mathbb{R}$ 上一様であり，$L^2(\mathbb{R})$ においても収束する．

この定理およびそれを一般化したもの，定理 7.22 と定理 7.24，にはいくつか証明があり，それらはフーリエ級数とフーリエ変換の関係に依存している．また，ここでは，エイリアジングやノン-バンドリミテッドなサンプリング公式を扱うことの意味を表すために定理 7.22 のフレーム的証明を行う．エイリアジングや古典的な証明については，[Ben2, Section 2, Section 10, and Definition/Discussion 28] や [BuSte] と比較されたい．

定理 7.21 のサンプリング関数 $d_{2\pi\Omega}$は，定理 7.22 において，より一般的なサンプリング関数 s に置き換えられている．このようにすることはオーバーサンプリングとなるが，実際の適用に当たってはより早く収束させることが可能となる．この定理の仮定は技術的なもののように思えるが，その本質的仮定は，$2T\Omega \leq 1$ と $[-\Omega, \Omega]$ 上で $\hat{s} = 1$ であることである．

定理 7.22 **([BenHel1])**

$T, \Omega > 0$ を，$0 < 2T\Omega \leq 1$ の条件を満たす定数とする．また，$g \in PW_{1/(2T)}$は，次の特性をもつものとする．$\hat{g} \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ は，

$$[-\Omega, \Omega] \text{上} \quad \hat{g} = 1$$

であり，$2T\Omega < 1$ のとき$\hat{g}$は連続で

$$\left(-\frac{1}{2T}, -\Omega\right] \cup \left[\Omega, \frac{1}{2T}\right) \text{上} \quad |\hat{g}| > 0$$

である．ここで，

$$G(\gamma) \equiv \sum |\hat{g}(\gamma - mb)|^2 \text{および}\ s(t) \equiv \left(\frac{\hat{g}}{G}\right)^{\vee}(t)$$

であるとしよう．なお，$2T\Omega < 1$ のとき$\Omega + 1/2T \le b < 1/T$で，もし $2T\Omega = 1$ なら$\Omega + 1/2T = b$ である．そのとき，

$$\text{ある}\ A, B > 0\ \ \text{が存在し，殆どいたるところ}\ A \le G(\gamma) \le B$$

である．$s \in PW_{1/(2T)}$, $\hat{s} \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$, $[-\Omega, \Omega]$ において$\hat{s} = 1$ であり，

$$\text{任意の}\ f \in L^2(\mathbb{R})\ \text{に対して}\ L^2(\mathbb{R})\ \text{で} \quad f = T \sum \langle \hat{f}, e_{nT}\tau_{mb}\hat{g}\rangle \tau_{-nT}(e_{mb}s) \tag{7.25}$$

および

$$\text{任意の}\ f \in PW_\Omega \text{に対して}\ L^2(\mathbb{R})\ \text{で} \quad f = T \sum f(nT)\tau_{nT}s \tag{7.26}$$

である．

証明

(a) $2T\Omega < 1$ とする．すると，

$$\Omega = \Omega + \frac{1}{2T} - \frac{1}{2T} \le b - \frac{1}{2T} < \frac{1}{T} - \frac{1}{2T} = \frac{1}{2T}$$

となる．従って，$\operatorname{supp} \tau_b \hat{g}$の左側の「端点」は，半開区間 $[\Omega, \frac{1}{2T})$ となる．そして，この場合，$\hat{g}$の仮定により殆ど至るところ $A \le G \le B$を得る．

また，$2T\Omega = 1$ の場合には，$G = 1$ を得る．

s の定義および G の特性により，$\hat{s} = \hat{g}/G \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ および $s \in PW_{1/(2T)}$が得られる．また，ここでの b の選び方により，$[-\Omega, \Omega]$ において $G = 1$，そして $[-\Omega, \Omega]$ において$\hat{s} = 1$ となる．上界 $G \le B$を定めるためには$\hat{g} \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ が必要であり，下界 $A \le G$ のためには$\hat{g}$が正であるという仮定が必要となる．これらについては，[Hel] と比較されたい．なお，[Hel] においては，下界についての仮定は弱められている．

どの場合においても，G および s についてのここでの記述は，b の選択に依っている．

(b) $a = T$とすると，$|\operatorname{supp} \hat{g}| = \frac{1}{T} = \frac{1}{a}$となる．そして，殆ど至るところ $A \le G \le B$という事実と Gabor フレームについての基本的な十分条件 ([BenWa, Section 3.4]) により，$\{e_{na}\tau_{mb}\hat{g}\}$が $L^2(\hat{\mathbb{R}})$ のフレームであることを得る．さらに，$\operatorname{supp} \hat{g}$がコンパクトであることから，逆フ

レーム作用素の基本的特性 ([BenWa, Section 3.4]) により，

$$\text{任意の } h \in L^2(\mathbb{R}) \text{ に対して，} \quad S^{-1}\hat{h} = T\frac{\hat{h}}{G}$$

を得ることができる．以上より，フレーム分解を次式のように記述しうることがわかる．

$$\text{任意の } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ に対して } L^2(\hat{\mathbb{R}}) \text{ で} \quad \hat{f} = T\sum\langle\hat{f}, e_{nT}\tau_{mb}\hat{g}\rangle e_{na}\tau_{mb}\hat{s}$$

なお，この式を導出する際には，$S^{-1}(e_{na}\tau_{mb}\hat{g}) = e_{na}\tau_{mb}S^{-1}\hat{g}$ ([BenWa, Section 3.4]) ということを用いている．従って，基本的なフレーム分解公式 (7.7) により，

$$\text{任意の } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ に対して } L^2(\mathbb{R}) \text{ で} \quad f = T\sum\langle\hat{f}, e_{nT}\tau_{mb}\hat{g}\rangle\tau_{-na}(e_{mb}s)$$

となる．これは，まさしく式 (7.25) である．

もし，$f \in PW_\Omega$なら，そのとき，

$$\langle\hat{f}, e_{nT}\tau_{mb}\hat{g}\rangle = \begin{cases} f(-nT) & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

となる．この場合に，式 (7.25) は式 (7.26) のようになる． ∎

技術的には，定理 7.22 に $b = 2\Omega$という特別な選び方をすることで定理 7.21 を得ることになるわけである．

例 7.23 （滑らかなサンプリング関数）

定理 7.22 における関数 $s \in PW_{1/(2T)}$は，$2T\Omega < 1$ のとき，Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 内で選択できる．では，信号の構成について記述するにあたり，まず，次式を定義しよう．

$$\psi_\epsilon(\gamma) = \frac{\varphi(\epsilon - |\gamma|^2)}{\int\varphi(\epsilon - |\lambda|^2)d\lambda}$$

ここで，$\varphi \in C^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ は，$(-\infty, 0]$ において 0 をとり，$[0, \infty)$ において $e^{-1/\gamma}$となる．よって，$\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ は偶関数であり，$\operatorname{supp}\psi_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]$ および$\int\psi_\epsilon(\gamma)\,d\gamma = 1$ という条件を満足する．次に，

$$\psi_{U,V} = \frac{1}{|V|}\mathbf{1}_V * \mathbf{1}_{U-V}, \quad U, V \subseteq \hat{\mathbb{R}}$$

とする．ここで，$0 < |V| < \infty$ であり Uはコンパクトである．よって，$\psi_{U,V}$は U上で 1 であり，$U + V - V$の外では 0 となる．また，定理 7.22 における関数 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は，$\hat{g} = \psi_{U,V} * \psi_\epsilon$をみたすものとして定義される．ただし，$\epsilon$，$U$，$V$は，次のようにとる．任意の $u \in (\Omega, 1/2T)$ をとり，$U = [-u, u]$，$\epsilon = u - \Omega$とする．$w = 1/2T - \epsilon$に対し $v = (w - u)/2$ とおき，$V = [-v, v]$

ととる．これらの値を選択することは，単純な幾何学的議論により必然的であり，結果として得られる関数$\hat{g}$は，定理 7.22 の条件および$\hat{g} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ を満足する．定理 7.22 における s の定義は，信号の構成を完全なものにするものである．

以下に述べることは基礎的なことであるが，定理 7.21 を美しく一般化したものでもある．[Bo2, 220 頁], [K], [Pl] と比較されたい．

定理 7.24　$E \subseteq \hat{\mathbb{R}}$が，正の有限な Lebesgue 測度を持っているとする．また，$PW_E \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}) :$ E の外で殆ど至るところ$\hat{f} = 0\ \}$ とし，$\{g_n : n \in \mathbb{Z}\}$ を Hilbert 空間 PW_Eの正規直交基底とする．任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $f \in PW_E$となるのは，$f = \sum c[n]g_n$ が $\mathbb{R}$ 上一様に収束する時，そしてその場合に限る．ここで $c = \{c[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ である．今の場合，

$$\text{任意の } n \text{ に対して}\quad c[n] = \int_E \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}_n(\gamma)}\, d\gamma \equiv \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle$$

である．この式について，定理 7.10 および系 7.12 と比較されたい．

証明

(a) $f \in PW_E$とする．次の形式的な評価により一様に収束することが分かる．

$$\begin{aligned}\left| f(t) - \sum_{-M}^{N} c[n]g_n(t) \right| &= \left| \int_E \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}\, d\gamma - \sum_{-M}^{N} c[n] \int_E \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}\, d\gamma \right| \\ &\leq |E|^{1/2} \left\| \hat{f} - \sum_{-M}^{N} c[n]\hat{g}_n \right\|_{L^2(E)}\end{aligned}$$

なお，この式の最後の項は，$c[n] = \langle \hat{f}, \hat{g}_n \rangle$ のとき $M, N \to \infty$ とすると 0 となる．

PW_Eの要素が連続であることと各点における逆変換公式が真であることが分かれば，この計算は正しい．

このために，まず，$PW_E^\wedge = L^2(E) \subseteq L^1(E)$ であることに留意しよう．なお，この集合の包含関係は，Hölder の不等式と $|E| < \infty$ という仮定に基づいている．よって，もし $f \in PW_E$ であれば，

$$g(t) = \int \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}\, d\gamma \in A(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

である．あとは，殆ど至るところ $f = g$ であることを示さなければならない．もし，$h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であるなら，超函数の意味で，

$$\begin{aligned}\langle \hat{g}, \hat{h} \rangle &= \langle g, h \rangle = \int \int_E \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}\bar{h}(t)\, d\gamma dt \\ &= \int \hat{f}(\gamma) \left(\int \bar{h}(t)e^{2\pi i t\gamma}\, dt \right) d\gamma = \langle \hat{f}, \hat{h} \rangle\end{aligned}$$

である．なお，ここでの積分順序の交換は，$\hat{f}\bar{h} \in L^1(\hat{\mathbb{R}} \times \mathbb{R})$ であるということに依っている．よって，緩増加超函数に対する Fourier の一意性定理により殆ど至るところ$\hat{g} = \hat{f}$であり，殆ど至るところ $g = f$となることが分かる．(Fourier 逆変換は，$f, \hat{f} \in L^1$あるいは fが可積分かつ有界変動であるときに正しいことに留意しておくべきである．L^2版もあるので，これについては，例えば [Ti2, 83 頁] を参照されたい．)

(b) 逆の証明をする．まず，$f \in L^2(\mathbb{R})$ とする．次の $g \in PW_E$の存在を示すために，$\sum |c[n]|^2$ が収束することおよび Riesz–Fischer の定理（定理 7.10 の c，d）を用いる．ここで，gは，

$$PW_E \text{で } g = \sum c[n] g_n$$

であり，$c[n] = \langle g, g_n \rangle$ である．仮定により，$f = \sum c[n] g_n$は $\mathbb{R}$ 上一様収束する．よって，(a) により，

$$|f(t) - g(t)| \leq \left| f(t) - \sum_{-M}^{N} c[n] g_n \right| + |E|^{1/2} \left\| \hat{g} - \sum_{-M}^{N} c[n] \hat{g}_n \right\|_{L^2(E)}$$

となる．従って，$f = g$となることが分かる．

∎

定理 7.24 は，$\mathbb{R}^d$に対して明らかに真である．また，もし $E = [-\Omega, \Omega]$ および $g_n = \tau_{n/(2\Omega)} d_{2\pi\Omega}$ であるなら，定理 7.24 は定理 7.21 のサンプリングのナイキスト率，つまりサンプリングの周期 $T = 1/2\Omega$，に関する前提条件となる．なお，もし $f \in PW_E$であり

$$|\{t : f(t) \neq 0\}| < \infty$$

なら $f = 0$ であることは，良く知られていることである [Bene1]．

問題 7.25 （局所的問題）

(a) 局所サンプリングの問題とは，サンプル $\{Tf(nT)\}$ により区間 I上の信号 fを表現することである．なお，ここで nTは，Iの近傍に値をとる．
この問題を定量化する方法はいくつかある．例えば，周波数域を$\Omega > 0$ とし，誤差の幅あるいは閾値を$\epsilon > 0$ とする．この問題は，サンプリング関数 s とできるだけ小さな数 $r > 0$ を次を満たすように構成することにある．

$$\text{任意の } I \text{ および任意の } f \in PW_\Omega \text{ に対して，} \quad \left\| f - T \sum_{nT \in I_r} f(nT) \tau_{nT} s \right\| < \epsilon \qquad (7.27)$$

ここで，$2T\Omega = 1$ であり，$\|\cdot\|$ は以前に定義したノルムを表し，$I \subseteq \mathbb{R}$ は区間を示す．そ

して，

$$I_r \equiv \{t \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(t, I) < r\}$$

である．

(b) 定理 7.22 の観点から，次式で表現されるサンプリング関数 s について考察してみる．

$$s = \frac{1}{\|g\|_2^2}(g * \tilde{g})\, d_{2\pi(\Gamma+\Omega)} \tag{7.28}$$

ここで，$g \in PW_\Gamma$である．そのとき，$\hat{s}$は $[-\Omega, \Omega]$ において 1 であり，$[-(2\Gamma+\Omega), 2\Gamma+\Omega]$ の外で 0 となる．

ここで，Γとナイキスト率（サンプリング周波数）$1/T = 2\Omega$（オーバーサンプリングになる $2T\Omega < 1$ のときにも）を結び付けてみよう．その方法を以下に示すことにする．supp $\hat{s}$により，

$$\frac{1}{2T} = 2\Gamma + \Omega$$

とおく．よって，もし，$2T\Omega \leq 1$ となる $T, \Omega > 0$ が与えられるとすると，$\Gamma = 1/2(1/2T - \Omega)$ と定義することができる．これは，拡張されたオーバーサンプリングのケースにおいては，可能な限り大きくとることができるものである．同様に，$\Gamma \geq 0$，$\Omega > 0$ が与えられたとき，$T = [2(2\Gamma + \Omega)]^{-1}$と定義できる．よって，$2T\Omega \leq 1$ である．もちろん，もし$\Gamma = 0$ なら，そのとき $PW_0 = \{0\}$ である．なぜなら，$\delta^{(k)} \notin L^2(\hat{\mathbb{R}})$ だからである．

次に示すことは，Gabor 系を用いて証明できる結果のうちで典型的なものである．ここで，s は，式 (7.28) にあるものとし定理 7.26 において示したように$\hat{g} = \mathbf{1}_{(\Omega)}$とする．

定理 7.26　**([BenKar])**

$\epsilon > 0$ および$\Omega > 0$ とする．もし $r > 0$ が，次式のように定義されるなら，

$$r \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{6}\pi^2\epsilon\Omega}\right)^{2/3}$$

そのとき，$\|f\|_2 = 1$ なるすべての $f \in PW_\Omega$，そして，有界区間 Iに対して，I上一様に，

$$\left| f(t) - \frac{1}{2\Omega}\sum_{\frac{n}{2\Omega}\in I_r} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right)\tau_{\frac{n}{2\Omega}} s(t)\right| < \epsilon$$

となる．$\hat{g} = 1_{(\Omega)}$であり，s が式 (7.28) のように定義された場合，次式を得ることができる．

$$\tau_{\frac{n}{2\Omega}} s(t) = \frac{(-1)^n \cos 2\pi t\Omega}{\Omega} d_{2\pi\Omega}^2\left(t - \frac{n}{2\Omega}\right)$$

注意 7.27　局所サンプリングの問題は，実際問題における不確定性原理を自然に表現するものでもある．

Γがたいへん大きく，かつ$\hat{g}$がたいへんに滑らかな場合，$g \in PW_\Gamma$をδに近く，急減少するものと考えることができる．よって，式 (7.28) のサンプリング関数 s の形により，式 (7.27) のような局所サンプリング公式は，(t 軸上の) 局所的な信号の再構成のすぐれた方法を与えるものとなる．しかし，この公式は，再構成の段階において，(Γに依存する) たいへん高い周波数の信号を発生させるものでもある．

定理 7.26 において$\Gamma = \Omega$とすると，サンプリング間隔は，$\hat{g}$を軟化させる以外のものではあり得ないが，バンド幅はΩの適度の倍数を超えるものではない．このことは，制限されたバンド幅が有用なときには重要なことである．

例 7.28　エイリアジングと線形時間不変系

(a) 定理 7.22 において，もし $f \notin PW_\Omega$なら，エイリアジングが発生すると言う．これについては，例えば [Ben2] を参照されたい．これは，式 (7.25) の $m \neq 0$ の項からなる位相の情報が，信号のフレーム分解においては必要である，ということを意味している．このことを定量的に表現するため，ここで，エイリアジング擬測度$\alpha_{t,\Omega}$を $\mathbb{R}$ 上で（ローパス・インパルス応答 $s = d_{2\pi\Omega}$，および，$2T\Omega = 1$ に対して）超函数の意味のフーリエ変換$\alpha_{t,\Omega} = A^{\vee}_{t,\Omega}$によって定義する．ここで，$t$ は固定された値であり，

$$A_{t,\Omega} \equiv \sum \left(e^{2\pi i(2m\Omega)t} - 1\right) \tau_{2m\Omega}\mathbf{1}_{(\Omega)} \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$$

である．もし，$f \in L^2(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ であるなら，そのとき式 (7.25) から次式を得る．

$$L^2(\mathbb{R})\text{ で}\quad f(t) = T\sum f(nT)\tau_{nT}d_{2\pi\Omega}(t)$$
$$+T\sum (f * \alpha_{t,\Omega})(nT)\tau_{nT}d_{2\pi\Omega}(t)$$

ここで，この第 1 項は通常のサンプリング公式であり，第 2 項はエイリアジングの項である．

(b) Xと Yを有界な Radon 測度のコンボリューション代数 $M_b(\mathbb{R})$ の部分 Banach 代数とし，$\delta \in X$とする．さらに，$X \subseteq Y$と仮定し，$L : X \to Y$を連続線形写像とする．Lは，もしインパルス応答 $L\delta = h$ が次の特徴をもっているのなら，時間不変の線形系である．

$$\text{任意の } f \in X\text{に対して，}\quad Lf = h * f$$

フーリエ変換$\hat{h}$は，その系の周波数応答，あるいは変換関数であり，L あるいは h は，もし $\mathrm{supp}\,\hat{h} \subseteq \hat{\mathbb{R}}$であればフィルターと呼ばれる．次に示す形式的内容の証明は，自然な仮定があれば，定理 7.21 の古典的証明や，ここで示した定理 7.22 の証明に沿って行われる．$L : X \to Y$を，インパルス応答 $h \in Y$および周波数応答$\hat{h}$を持った線形な時間不変の系とす

る．$T, \Omega > 0$ および $2T\Omega \leq 1$ を満たすと仮定し，次の関数を定義する．

$$s(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{\hat{h}(\gamma)} e^{2\pi i t\gamma}\, d\gamma$$

もし，$f \in X$が $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$ を満たすなら，

$$Y \text{ で } f = T \sum (Lf)(nT) \tau_{nT} s$$

となる．

例 7.29　（ゼロクロス）

PW_Ωの要素は，指数型の整関数である．零点の値によって完全に規定されるということは，そのような関数 fの重要な特徴である．例えば，Titchmarsh [Ti1] は，次のような結論を導いた．

$F \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ がコンパクトなサポート $\operatorname{supp} F = [-\Omega, \Omega]$ を持つとし，そのサポートは「タイト」であると仮定する．つまり，

$$\text{任意の} \epsilon > 0 \text{ に対して，} \int_{-\Omega}^{-\Omega+\epsilon} |F(\gamma)|\, d\gamma \neq 0 \text{ および } \int_{\Omega-\epsilon}^{\Omega} |F(\gamma)|\, d\gamma \neq 0$$

であるとする．整関数 $f(z) \equiv F^{\vee}(z)$，$z \in \mathbb{C}$ を定義し，一般性を失うことなく，$f(0) \neq 0$ であると仮定してよい．もし $\{z_n : n = 1, \ldots\} \subseteq \mathbb{C}$ が，fの零点集合であり，振幅の増加によって「順序づけられている」とすると，

$$f(z) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

となる．ただし，この無限の積は，絶対収束ではない．

この結論から，零点の値により $f \in PW_\Omega$を再構成するには，すべての零点の値を必要とすることが分かる．$f \in PW_\Omega$の零点の値で実数のものが fのゼロクロス値であるが，fが零点で複素数を持つ場合には，ゼロクロス値では fを完全に再構成することはできない．ただし，これは，ゼロクロスのアルゴリズムが実際問題に対しては役に立たないと言っているわけではないのである．この点に関しては，例えば，[Ke] を参照されたい．

7.6　古典的不確定性原理の不等式

この節では，式 (7.2) のような古典的不確定性原理の不等式について述べる．これは，本質的には，分散により決まるものである．

そのような古典的な不等式を音楽の問題にあてはめて述べると，以下に示す理想化されたピアノの実験のようなものになる．演奏会用の標準音では，中音のハ音の上のイ音は，一秒間に 440 回の振動数をもっている．よって，4 オクターブ下のイ音（つまり，ピアノの最後の白鍵）

は，一秒間に 27.5 回の振動数を持つことになる．ここで，この白鍵を 1/30 秒間隔にたたくと仮定する．つまり，ハンマーはピアノ線をたたき，1/30 秒後にダンパーがピアノ線に作用する，すなわち音を止めると仮定するのである．すると，この実験からは，時間に関するたいへん正確な情報を得ることができるものの，周波数に関する情報は不正確ということになる．なぜなら，発せられた音は，この低いイ音の真の周期ではないからである．よって，もし音 fが時刻 t_0において発せられ，ほんの短い間に終わるとしたなら，(少々理想的な数値化により）式 (7.2) は，f の周波数範囲が非常に広いことを表すことになる．特に，fは，周波数γ_0が表す真の音程には近くはない．もし近ければ，$\|(t-t_0)f(t)\|_2$と同様 $\|(\gamma-\gamma_0)\hat{f}(\gamma)\|_2$は，音の強さ $\|f\|_2$に比べて小さくなるからである．

式 (7.2) は，ある種の特殊な信号に対しては有益な情報を与えないことに留意すべきである．それは，例えば，式 (7.2) の右辺が，例題 7.6b における信号 f に対して，あるいは，$a\in[-3/2,-1/2)$ であるとき，$|t|\to\infty$ で $|t|^a$となるような信号 $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して，無限となることからも分かる．7.8 節で述べる重み付けの方法の他にも，式 (7.2) の限界を扱う種々の方法が提案されてきている．最近の「サンプリング」に関して研究したものには，[DoSta], [F], [L2], [Pr2] がある．

定理 7.30 $(t_0,\gamma_0)\in\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}}$とする．すると，

$$\text{任意の } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ に対して，} \quad \|f\|_2^2\le 4\pi\|(t-t_0)f(t)\|_2\|(\gamma-\gamma_0)\hat{f}(\gamma)\|_2 \tag{7.29}$$

となる．式 (7.29) の等号は，次の式が成り立つ時に限り成立する．

$$f(t)=Ce^{2\pi it\gamma_0}e^{-s(t-t_0)^2} \tag{7.30}$$

ここで，$C\in\mathbb{C}$ であり $s>0$ である．

証明 写像 $f(t)\mapsto f(t+t_0)e^{-2\pi it\gamma_0}$により，式 (7.29) において $(t_0,\gamma_0)=(0,0)$ であるとしてよい．

次の計算により，$(t_0,\gamma_0)=(0,0)$ の場合について式 (7.29) が導かれる．

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^4 &= \left(\int t|f(t)^2|'\,dt\right)^2\le\left(\int |t||f(t)^2|'\,dt\right)^2\\
&\le 4\left(\int |t\bar{f}(t)f'(t)|\,dt\right)^2\le 4\|tf(t)\|_2^2\|f'(t)\|_2^2\\
&= 16\pi^2\|tf(t)\|_2^2\|\gamma\hat{f}(\gamma)\|_2^2
\end{aligned} \tag{7.31}$$

もし，fが式 (7.30) により定義されるとすると，式 (7.29) の等号は，直接計算することにより得られる．例えば，例 7.2 を参照されたい． ∎

式 (7.31) で重要なことは，部分積分であり，Hölder の不等式や Plancherel の定理である．こ

こで，定理 7.30 をいくつかの方法で拡張し，洗練したものとすることとしよう．その内容については，7.8 節と比較されたい．また，それらの証明で重要なことも同様に，部分積分もしくは Hardy の不等式の一般化のような本質的には似たアイディア，Hölder の不等式，フーリエ変換に関する重み付きノルムの不等式である．その中でも，Plancherel の定理は，特別なものである．

定理 7.30 は，全ての $f \in L^2(\mathbb{R})$ について言及したものではないが，その結論は，実際には $L^2(\mathbb{R})$ に対しても正しいものである．その証明には，注意 7.31 に記述されている考察や結果が必要である．ここでの記述は，7.8 節における議論と比較すると一般的なものである．

注意 7.31　**(Closure theory)**

(a) $m, n \geq 0$ を整数とし，$1 \leq p \leq \infty$ とする．Sobolev 空間 L^p_mは，次式をノルムとする関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ からなる Banach 空間である．

$$\|f\|_{m,p} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p < \infty$$

重みつき空間 $L^p_{0,n}$は，次式をノルムとする関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ からなる Banach 空間である．

$$\|f\|_{p,n} \equiv \sum_{|\beta| \leq n} \|t^\beta f(t)\|_p < \infty$$

そして，Bi-Sobolev 空間 $L^p_{m,n}$は，次式をノルムとする関数 $f \in L^p_m \cap L^p_{0,n}$からなる Banach 空間である．

$$\|f\|_{m,p,n} \equiv \|f\|_{m,p} + \|f\|_{p,n} < \infty$$

(b) $m, n \geq 0$ とする．$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ は，次の内積を持つ

$$[f, g] = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle + \sum_{|\beta| \leq n} \langle t^\beta f, t^\beta g \rangle$$

Hilbert 空間 $(L^2_{m,n}, \|\cdot\|_{m,2,n})$ において稠密である．ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上での通常の内積である．この証明は，Young の定理，Leibniz の公式や同程度連続性を用いる議論などの古典的なテクニックを含む ([Ben1, Theorem A.1.2])．

(c) $\mathcal{S}_0 \equiv \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \hat{f}(0) = 0\}$ とし，$v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ が殆ど至る所正の値をとるものとする．さらに，$p \in (1, \infty)$ とする．もし，$v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ であるなら，$\mathcal{S}_0 \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$ は $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ において稠密である．ここで，$L^p_v(\mathbb{R}^d)$ は，$\mathbb{R}^d$における Borel 可測関数 fで，$\|fv^{1/p}\|_p < \infty$ を満たすものからなっている．これらについては，7.8 節および [BenHe] と比較されたい．また，この結論は，$p = 1$ のときには真ではない．事実，$v = 1$ のとき，$L^1(\mathbb{R}^d)$ における $\mathcal{S}_0$ の閉包は，$L^1(\mathbb{R}^d)$ における（閉じた）極大のイデアルである．すなわち，$L^2_{1,1}$における $\mathcal{S}_0$

の閉包は，$\{f \in L^2_{1,1} : \hat{f}(0) = 0\}$ である．

定理 7.32　A, Bを複素 Hilbert 空間 H上の自己随伴行列作用素とする（AとBは，連続でなくともよい）．交換子を $[A, B] \equiv AB - BA$，$x \in D(A)$ での Aの予測値あるいは期待値を $E_x(A) \equiv \langle Ax, x\rangle$（$D(A)$ は Aの領域である），$x \in D(A^2)$ での Aの分散を$\Delta_x^2(A) \equiv E_x(A^2) - \{E_x(A)\}^2$と定義する．もし，$x \in D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(i[A, B])$ であり，$\|x\| \leq 1$ なら，

$$\{E_x(i[A, B])\}^2 \leq 4\Delta_x^2(A)\Delta_x^2(B) \tag{7.32}$$

である．

証明　自己随伴性により，まず，次の式を得る．

$$\begin{aligned} E_x(i[A, B]) &= i\{\langle Bx, Ax\rangle - \langle Ax, Bx\rangle\} \\ &= 2Im\langle Ax, Bx\rangle \end{aligned} \tag{7.33}$$

また，$D(A^2) \subseteq D(A)$ である．

次に，$\|x\| \leq 1$ であること，および $\langle Ax, x\rangle, \langle Bx, x\rangle \in \mathbb{R}$ であること（自己随伴性より）から，

$$\|(B + iA)x\|^2 - |\langle (B + iA)x, x\rangle|^2 \geq 0 \tag{7.34}$$

および

$$|\langle (B + iA)x, x\rangle|^2 = \langle Bx, x\rangle^2 + \langle Ax, x\rangle^2 \tag{7.35}$$

が得られる．また，$\|\cdot\|$ の定義から，次式を得る．

$$\|(B + iA)x\|^2 = \|Bx\|^2 + \|Ax\|^2 - 2Im\langle Ax, Bx\rangle \tag{7.36}$$

そして，式 (7.35) および式 (7.36) を式 (7.34) に代入することで次の不等式を得る．

$$\begin{aligned} &\|Ax\|^2 - \langle Ax, x\rangle^2 + \|Bx\|^2 - \langle Bx, x\rangle^2 \\ &\qquad \geq 2Im\langle Ax, Bx\rangle \end{aligned} \tag{7.37}$$

$r, s \in \mathbb{R}$ とすると，rA および sBもまた自己随半であり，不等式 (7.37) は，

$$\begin{aligned} &r^2\left(\|Ax\|^2 - \langle Ax, x\rangle^2\right) + s^2\left(\|Bx\|^2 - \langle Bx, x\rangle^2\right) \\ &\qquad \geq 2rsIm\langle Ax, Bx\rangle \end{aligned} \tag{7.38}$$

となる．$r^2 = \|Bx\|^2 - \langle Bx, x\rangle^2$，$s^2 = \|Ax\|^2 - \langle Ax, x\rangle^2$とおき，式 (7.38) に代入して，次式

を得ることができる．

$$\left(\|Ax\|^2 - \langle Ax, x\rangle^2\right)\left(\|Bx\|^2 - \langle Bx, x\rangle^2\right) \geq \left(Im\langle Ax, Bx\rangle\right)^2$$

不確定性原理の不等式 (7.32) は，この不等式と式 (7.33) から得られるのである．　▮

例 **7.33**　（古典的不確定性原理の不等式とエントロピー）

(a) 式 (7.29) は，$H = L^2(\mathbb{R})$ の場合に対応する定理 7.32 の系である．ここで，作用素 A と B は，次のように定義される．

$$A(f)(t) \equiv (t - t_0) f(t)$$

$$B(f)(t) \equiv i(2\pi i\left(\gamma - \gamma_0)\hat{f}(\gamma)\right)^{\vee}(t)$$

直接的な計算により，A と Bが自己随伴であることおよび以下の式を得ることができる．

$$\begin{aligned}
E_f(A) &= \int (t - t_0)|f(t)|^2\,dt \\
E_f(B) &= -2\pi \int (\gamma - \gamma_0)|\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma \\
\Delta_f^2(A) &= \int |t - t_0|^2|f(t)|^2\,dt - \left(\int (t - t_0)|f(t)|^2\,dt\right)^2 \\
\Delta_f^2(B) &= 4\pi^2\left(\int |\gamma - \gamma_0|^2|\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma - \left(\int (\gamma - \gamma_0)|\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma\right)^2\right) \\
\{E_f(i[A, B])\}^2 &= \|f\|_2^4
\end{aligned}$$

問題 7.3 の分散と比較されたい．そこでは，変調し平行移動されたガウス関数の期待値は，0 となる．なぜなら，それらは，t_0およびγ_0について対称だからである．

(b) Fast Wavelet Packet Transform (FWPT) は，Coifman や Meyer そして Wickerhauser ([CoMeWi]) によって展開，発展され，データ圧縮問題に適用されてきた．重大な一歩，特別な問題への適用についてのより深い研究のための一歩は,『最適な基底』を選ぶことである．基本的問題の精神に基づき，この『最適な基底』は，[CoMeWi] の中で次を満たす $H = \mathbb{R}^{2^d}$ の正規直交基底 $\{x_n\}$ として選択されている．すなわち，既知の信号 $c \in \mathbb{R}^{2^d}$は，$\{x_n\}$ に関する最小のエントロピー

$$-\sum_n |\langle c, x_n\rangle|^2 \log |\langle c, x_n\rangle|^2$$

を持つ．

式 (7.29) との関連づけるため，$f \in H = L^2(\mathbb{R})$ のエントロピーを次のように定義することとする．

$$\epsilon(f) = -\int |f(t)| \log |f(t)|\, dt$$

Hirschman [Hir] は，$\|f\|_2 = 1$ を満たす $f \in L^2(\mathbb{R})$ に関し，

$$\epsilon(|f|^2) + \epsilon(|\hat{f}|^2) \geq 0$$

であることを証明した．この点については，[DeCovTh] と比較されたい．彼は，また，次の不等式

$$\epsilon(|f|^2) + \epsilon(|\hat{f}|^2) \geq 1 - \log 2 \tag{7.39}$$

が妥当であること，および [ShWe, 55–57 頁] における考察により式 (7.39) が式 (7.29) を包含することを指摘した．

式 (7.39) が真であることが明らかになり [F]，加えて式 (7.39) が Hausdorff–Young–Titchmarsh の不等式の形に依存していることも判明した．なお，Hausdorff–Young–Titchmarsh の不等式は，次の式である．もし $1 \leq p \leq 2$ および $1/p + 1/p' = 1$ なら，

$$\text{任意の } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，} \quad \|\hat{f}\|_{p'} \leq B_d(p)\|f\|_p \tag{7.40}$$

ここで，$B_d(p)$ は，Babenko–Beckner の定数であり，次のように記述される．

$$B_d(p) = \left(p^{1/p}(p')^{-1/p'}\right)^{d/2} \tag{7.41}$$

この点については，[Be] と比較されたい．

記号 7.34 "σ^2" が，分散の一般的な記号である．しかし，ここでは，不確定性原理に関する古典的な記号に基づき，"Δ^2" を使用する．具体的には，次のような記号を用いることとする．

$$\Delta^2(f, t_0) \equiv \int |t - t_0|^2 |f(t)|^2\, dt - \left(\int (t - t_0)|f(t)|^2\, dt\right)^2$$

$$\Delta^2(\hat{f}, \gamma_0) \equiv 4\pi^2 \left(\int |\gamma - \gamma_0|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma - \left(\int (\gamma - \gamma_0)|\hat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma\right)^2\right)$$

例 7.33a と比較されたい．

さらに，与えられた関数$\theta_{m,n}$に対する期待値の記号を次のようにする．

$$t_{m,n} = \int t|\theta_{m,n}(t)|^2\, dt \text{and} \gamma_{m,n} = \int \gamma |\hat{\theta}_{m,n}(\gamma)|^2\, d\gamma$$

以下に示す結論の証明は，簡単な計算により可能である．

定理 7.35　**(a)** $g \in L^2(\mathbb{R})$ を，$\|g\|_2 = 1$，$tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$ および $\gamma\hat{g}(\gamma) \in L^2(\mathbb{R})$ という条件を満たすものとする．そして，$\{\varphi_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ を対応する Gabor 系と仮定する．すると，$t_{m,n}, \gamma_{m,n} \in \mathbb{C}$ であり，

$$\begin{gathered}\text{任意の } (t_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}} \text{ および任意の } (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ に対して} \\ \Delta^2(\varphi_{m,n}, t_0) = \Delta^2(\varphi_{0,0}, 0) = \|(t - t_{m,n})\varphi_{m,n}\|_2^2 < \infty\end{gathered} \tag{7.42}$$

および

$$\Delta^2(\hat{\varphi}_{m,n}, \gamma_0) = \Delta^2(\hat{\varphi}_{0,0}, 0) = 4\pi^2 \|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\varphi}_{m,n}\|_2^2 < \infty$$

となる ($\varphi_{0,0} = g$)．

(b) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ を，$\|\psi\|_2 = 1$，$t\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ および $\gamma\hat{\psi}(\gamma) \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ という条件を満たすものとする．そして，$\{\psi_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ を対応するウェーブレット系と仮定する．すると，$t_{m,n}, \gamma_{m,n} \in \mathbb{C}$ であり，

$$\begin{gathered}\text{任意の } (t_0, \gamma_0) \in \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}} \text{ および任意の } (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ に対して} \\ \Delta^2(\psi_{m,n}, t_0) = 2^{-2m}\Delta^2(\psi_{0,0}, 0) = \|(t - t_{m,n})\psi_{m,n}(t)\|_2^2 < \infty\end{gathered} \tag{7.43}$$

および

$$\Delta^2(\hat{\psi}_{m,n}, \gamma_0) = 2^{2m}\Delta^2(\hat{\psi}_{0,0}, 0) = 4\pi^2 \left\|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\psi}_{m,n}(\gamma)\right\|_2^2 < \infty$$

となる ($\psi_{0,0} = \psi$)．

系 7.36　定理 7.35 の前提条件が満足されると仮定すると，

$$\text{任意の } n \text{ に対して，} \quad \sup_m \|(t - t_{m,n})\psi_{m,n}(t)\|_2 = \infty \tag{7.44}$$

および

$$\text{任意の } n \text{ に対して，} \quad \sup_m 2\pi \left\|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\psi}_{m,n}(\gamma)\right\|_2 = \infty \tag{7.45}$$

となる．一方，

$$\sup_{m,n} 2\pi \|(t - t_{m,n})\psi_{m,n}(t)\|_2 \left\|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\psi}_{m,n}(\gamma)\right\|_2 < \infty \tag{7.46}$$

である．

例 7.37　（一意性と古典的不確定性原理の不等式）

(a) 式 (7.42) が成り立つとしても，原点からの平行移動の考え方を用いることにより，次式が

成り立つことを容易に理解することができる．

$$\text{任意の } (t_0,\gamma_0)\in\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}} \text{ に対して，} \quad \sup_{m,n} 2\pi \left\|(t-t_0)\varphi_{m,n}(t)\right\|_2 \left\|(\gamma-\gamma_0)\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma)\right\|_2 = \infty \tag{7.47}$$

Balian–Low の定理（定理 7.38）に関する未解決の問題により，式 (7.47) の複雑な証明を得ることとしよう．その証明は，sup を $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ における種々の道により置き換えることで，式 (7.47) をより洗練されたものとしている．

第一に，もし f が $\mathbb{R}\times(0,b)$ において正則であり，$\mathbb{R}$ 上で殆ど至る所非接な極限をもち，$|K|>0$ なる $K\subseteq\mathbb{R}$ において $f=0$ であるなら，f は，零関数である，という事実がある．この一般論において，David Hamilton は，Privalov の定理風の位相幾何学的考察を，式 (7.47) の証明に使用しうることを指摘した．別のやり方では，以下に示す写像を構成することにより，Jensen の定理に基づく通常の方法をとることが可能である．$C\subseteq K, |C|>0$ を次のように選ぶ．すなわち，$\cup T_\gamma$ 上で $|f(z)|\leq A$ である．ここで，$\gamma\in C$ に対し $T_\gamma\subseteq\mathbb{R}\times[0,b)$ は三角形であり，$T_\gamma\backslash\{\gamma\}\subseteq\mathbb{R}\times(0,b)$ であるとする．そして，適切な集合 $B\supseteq\cup T_\gamma$ に対して，B から単位円の上への双絶対連続な写像を選び，Koosis [Ko, 76–77] や Levinson [Le, 74] の本にあるような Jensen の定理を適用する．

第二に，もし $F\in L^2(\hat{\mathbb{R}})\backslash\{0\}$ であり，supp F が半直線に含まれるなら，$\hat{F}=f\in H^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ であり，f は境界として $\mathbb{R}$ を持つ正則な関数である，という事実がある．これは，Paley–Wiener の定理から簡単に得られるものである．

上記二つの事実を用い，式 (7.47) の証明を次のように展開することができる．まず，次のように書き表す．

$$\begin{aligned} v(m,n) &\equiv \left\|(t-t_0)\varphi_{m,n}(t)\right\|_2^2 \left\|(\gamma-\gamma_0)\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma)\right\|_2^2 \\ &= \int \left|(u-t_0+na)g(u)\right|^2 du \int \left|(\gamma-\gamma_0+mb)\hat{g}(\gamma)\right|^2 d\gamma \end{aligned}$$

ケース 1 として，supp g が半直線に含まれないとすると，すべての $n\geq 0$ に関して，

$$v(m,n)\geq (na)^2\int_{t_0}^{\infty}|g(u)|^2\,du\int\left|(\gamma-\gamma_0+mb)\hat{g}(\gamma)\right|^2\,d\gamma$$

となる．よって，

$$\text{任意の } m \text{ に対して，} \quad \varphi \lim_{n\to\infty} v(m,n)=\infty$$

次に，ケース 2 として，supp g が半直線の場合，すべての $m\geq 0$ に関して，

$$v(m,n)\geq (mb)^2\int\left|(u-t_0+na)g(u)\right|^2\,du\int_{\gamma_0}^{\infty}|\hat{g}(\gamma)|^2\,d\gamma$$

となる．上記の二つの事実により $\int_{\gamma_0}^{\infty} |\hat{g}(\gamma)|^2\, d\gamma > 0$ なることが分かり，

$$\text{任意の } n \text{ に対して，}\quad \varphi \lim_{m\to\infty} v(m,n) = \infty$$

が得られる．

(b) 解の一意性とは，(a) において述べたが，もし f が十分大きな集合において 0 であり，$\hat{f}$ が十分小さな集合によりサポートされているなら，$f \equiv 0$ である，ということである．あるいは，信号の減衰の面から記述するなら，f と $\hat{f}$ の両者ともが極めて早く減衰することはあり得ない，ということである．この相互作用が，調和関数解析における不確定性原理に係る現象の中心にあるものである．

次に述べることは，F. Riesz と M. Riesz による初期の一意性の定理の "$H^1(\mathbb{R})$" に関するものである．もし，$f \in L^1(\mathbb{R})$, $|\{t : f(t) = 0\}| > 0$ であり，$\hat{f} \in A(\hat{\mathbb{R}})$ が有界な測度で $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\Omega, \infty)$ であるなら，$f \equiv 0$ である．この結論は，サポートの条件を次の条件に変換することで一般化することができる．

$$\text{任意の} \gamma \le 0 \text{ に対して，}\quad |\hat{f}(\gamma)| \le Be^{2\pi b\gamma}$$

ここで，$B, b > 0$ である．このケースにおける一意性を証明するため，$z \in \mathbb{C}$ で定義されている $f(z)$ および $f'(z)$ の積分形を評価すると，f が $\mathbb{R} \times (0,b)$ において正則であることを得る．$f \in L^1(\mathbb{R})$ であることから，(a) において述べたものよりもより直接的な Jensen の定理に関する考察が，$f \equiv 0$ という結論を導き出してくれるのである．

この問題に関する対数積分の役割は，次の定理により表現される．この内容については，例えば，[Le, Chapter V]，[Beu, Volume 1, 405–412 頁] を参照されたい．重み関数 $u \ge 1$ を $\hat{\mathbb{R}}$ 上での連続関数で，$\log u$ が $\hat{\mathbb{R}}$ 上で一様連続な関数とし，

$$\int \frac{\log u(\gamma)}{1+\gamma^2} d\gamma = \infty$$

とする．もし，f が，条件

$$\int u(\gamma)\, d\mu(\gamma) < \infty$$

を満たす有界な測度 $\hat{f} \equiv \mu$ の逆フーリエ変換であり，$|\{t : f(t) = 0\}| > 0$ なら，$f \equiv 0$ である．なお，この問題に対する Beurling の貢献は，彼の Stanford lectures (1961) の中で述べられている．そこには deBranges による結果と比較するに値する内容がある．また，より最新の一意性の定理は，Benedicks [Bene2] や Gabardo [Ga] により導出されている．

Hardy は，調和解析における不確定性原理に係る現象について，次のような結論を導出した．

それは，もし，$a, b > 0$，$ab > \pi^2$であり，

$$|f(t)| \leq Ae^{-at^2} \text{かつ} |\hat{f}(\gamma)| \leq Be^{-b\gamma^2}$$

であるなら，$f \equiv 0$ である，というものである．この内容については，[PWie, 64–67 頁] と比較されたい．この考えに基づき，Beurling [Beu, Volume 2, 372 頁] (1942) は，次の事項を証明した．その内容とは，もし $f \in L^1(\mathbb{R})$ かつ

$$\int\int |f(t)\hat{f}(\gamma)|e^{|t\gamma|}\, dt d\gamma < \infty$$

であるなら，$f \equiv 0$ である，というものである．この詳細については，例えば，[Hö2] を参照されたい．さらに系として，Beurling は，もしφ およびψが共役な凸関数であり，

$$\int |f(t)|e^{\varphi(t)}\, dt < \infty \text{かつ} \int |\hat{f}(\gamma)|e^{\psi(\gamma)}\, d\gamma < \infty$$

であるなら， $f \equiv 0$ である，ということを証明した．これについては，式 (7.51) と比較されたい．

ここで扱っている信号解析に係る基本的問題や定理 7.35a に鑑みて，Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ のフレーム特性を明らかにすることは，自然なことである．この分野における最も重要な結論は，Balian–Low の定理である．その内容は，最初に Balian [Bal] (1981) により記述され，全く別に Low [Lo] (1985) によっても述べられたのである．そして，それについての考察や証明が [BenWa] においてなされている．

定理 7.38 $g \in L^2(\mathbb{R})$ かつ $ab = 1$ とする．ここでは，$a, b > 0$ である．そのとき，もし Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ がフレームである（$ab = 1$ で完全なフレームである）なら，

$$\begin{aligned}\sup_{m,n} 4\pi^2 \|(t - t_{m,n})\varphi_{m,n}(t)\|_2^2 \|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\varphi}_{m,n}(\gamma)\|_2^2 \\ = \Delta^2(\varphi_{0,0}, 0)\Delta^2(\hat{\varphi}_{0,0}, 0) = \infty\end{aligned}$$

である．つまり，$tg(t) \notin L^2(\mathbb{R})$ であるか，あるいは$\gamma\hat{g}(\gamma) \notin L^2(\hat{\mathbb{R}})$ である，ということである．

問題 7.39 定理 7.38 に対して，ウェーブレット正規直交基底 $\{\psi_{m,n}\}$ の最も初期の例でさえ，式 (7.46) を満足することに留意されたものであった．これについては，例えば，[Me] や Meyer's Seminaire Bourbaki, 1985–1986, number 662 を参照されたい．これに関連して，また定理 7.38 と同様に式 (7.44) や式 (7.45) をも考慮することで，次式で表される条件を満足する $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $\{\theta_{m,n}\}$ が存在するかどうかを決定する問題が出現する．その条件とは，

$$\sup_{m,n} \|(t - t_{m,n})\theta_{m,n}(t)\|_2 < \infty \text{および} \sup_{m,n} \|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\theta}_{m,n}(\gamma)\|_2 < \infty \tag{7.48}$$

であり，ここで，$t_{m,n}, \gamma_{m,n}$は記号 7.34 において定義されている期待値である．この特別な問

題は，定理 7.38 との関連で Balian [Bal] によって提起された．明らかに，この問題には，関連する諸問題が存在する．この特別な問題は，式 (7.48) による制約条件を持っているが，以下に述べる方法で Bourgain [Bou] により解かれたのである．これに関しては，[By]，[Sha] と比較されたい．

定理 7.40 すべての $\epsilon > 0$ に対し，期待値 $(t_{m,n}, \gamma_{m,n}) \in \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$ を持つ $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $\{\theta_{m,n}\}$ で，次の不等式を満足するものが存在する．

$$\sup_{m,n} \|(t - t_{m,n})\theta_{m,n}(t)\|_2 \quad < \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}} + \epsilon \tag{7.49}$$

および

$$\sup_{m,n} \left\|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\theta}_{m,n}(\gamma)\right\|_2 \quad < \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}} + \epsilon$$

従って，式 (7.29) を援用することで，次式が得られる．

$$\begin{aligned} \text{任意の } m,n \text{ に対して，}\quad 1 \quad &= \quad \|\theta_{m,n}\|_2^2 \le 4\pi \|(t - t_{m,n})\theta_{m,n}(t)\|_2 \left\|(\gamma - \gamma_{m,n})\hat{\theta}_{m,n}(\gamma)\right\|_2 \\ &< \quad 4\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \epsilon\right)^2 \end{aligned} \tag{7.50}$$

さて，ここで，Bourgain の関数とその分散をもとに，情報平面における『タイル分割』について考えて見よう．式 (7.49)，式 (7.50)，および古典的不確定性原理の不等式からすると，この『タイル分割』は，本質的に最小な正方形ということができる．

例 7.41 （ウェーブレット系における **Balian–Low** の現象と **Gabor** 系における不完全性）

(a) 問題 7.39 の最初に述べたように，定理 7.38 のアナロジーは，ウェーブレット系の場合には成り立たない．Meyer が最初に示したウェーブレット正規直交基底 $\{\psi_{m,n}\}$ の例は，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ および $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ という特性をもっている．従って，ウェーブレット系に関する問題は，Balian–Low の現象の観点から，次のような $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ が存在するか否かを決定することである．すなわち，ウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}\}$ の要素は，互いに直交しており，また，次の関係が成り立つものである．

$$\|e^{|t|}\psi(t)\|_2 \|e^{|\gamma|}\hat{\psi}(\gamma)\|_2 < \infty \tag{7.51}$$

Battle [Bat] は，これがあり得ないことであることを証明した．続いて，Heil，Walnut および筆者は，定理 7.38 における $ab = 1$ という仮定をはずした，完全なフレームを定めるための簡単な拡張を行った．Battle の結果は，$\{\psi_{m,n}\}$ の完全性に依存しない．彼はその証明において，次に示す基本的な，しかしながら有用な事実を利用したのである．その事実とは，もし $\psi, \hat{\psi} \in L^1 \cap L^2$ であり，ウェーブレット系 $\{\psi_{m,n}\}$ の要素が相互に直交しているなら，

$\hat{\psi}(0)=0$ である，ということである．この事実の仮定の部分は，基礎的なウェーブレット理論におけるこの結論の部分の役割を考えると，興味深いものであるといえる．これらについては，例えば，[Mal]，[Me] を参照されたい．

(b) 定理 7.8a において，ガウス関数を基礎とした Gabor 系に関し，もし $ab>1$ であるなら $\bar{sp}\{\varphi_{m,n}\}\neq L^2(\mathbb{R})$ であることを記した．この結論は，任意の Gabor 系に関する類似の結論と同様，情報平面においてすき間が存在するということから予想されたものであった．実際，もし $ab>1$，$g\in L^2(\mathbb{R})$ であり，$\{\varphi_{m,n}\}$ が a,b および gに関する Gabor 系であるなら，$\bar{sp}\{\varphi_{m,n}\}\neq L^2(\mathbb{R})$ である，ということは真である．Rieffel [R] (1981) による証明は，驚くほど抽象的である．また，Baggett [B] は，3×3 の整数行列の離散的な Heisenberg 群Γの表現$\rho^{a,b}$を研究することにより，その結論を得た．ここで，Γの要素は，次のようである．

$$\begin{pmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さらに，与えられた gとそれに対応する Gabor 系 $\{\varphi_{m,n}\}$ に関して，$L^2(\mathbb{R})$ におけるΓの表現$\rho^{a,b}$は，次のように定義される．

$$\rho^{a,b}_{m,n,p}g(t)=e^{2\pi iabp}\varphi_{m,n}(t)$$

よって，gが，$\rho^{a,b}$に関する巡回ベクトルであるとき，およびそのときに限り $\bar{sp}\{\varphi_{m,n}\}=L^2(\mathbb{R})$ である．

Rieffel の定理に関連する古典的解析における最も重要な寄与は，H. Landau [L3] によりなされている．彼は，彼自身の以前の研究 [L1] や Daubechies の定理 [D2, Theorem 3.1] を用いて，もし gおよび$\hat{g}$が十分はやく減衰する関数であり，$\{\varphi_{m,n}\}$ が $L^2(\mathbb{R})$ に関する Gabor フレームであるなら，$ab\leq 1$ であることを証明した．これは，もちろん，Rieffel の定理よりも弱いものである．しかし，その方法は，複雑であるけれども，建設的なものである．なお，次に示すものは，Daubechies の定理の条件をみたす減衰に関する条件である．定数 $C>0$ および$\alpha>1/2$ で次を満足するものが存在する，すなわち，

$$\text{任意の } (t,\gamma)\in\mathbb{R}\times\hat{\mathbb{R}} \text{ に対して，}\quad |g(t)| \;\leq\; \frac{C}{(1+t^2)^{\alpha}} \tag{7.52}$$

および

$$|\hat{g}(\gamma)| \;\leq\; \frac{C}{(1+\gamma^2)^{\alpha}}$$

もちろん，もし$\alpha>3/4$ かつ $ab=1$ であるなら，定理 7.38 により，$\{\varphi_{m,n}\}$ が Gabor 系であるような g は存在しない．ここでは，$g(t)\equiv H(t)\sqrt{t}e^{-t}$ ($H\equiv$ Heaviside 関数) が，定理 7.38 の

結論とともに，$\alpha = 3/4$ に対し式 (7.52) をも満足することに注目しておくこと．なぜなら，

$$\hat{g}(\gamma) = Cu(\gamma)/(1+\gamma^2)^{3/4}, \quad |u(\gamma)| \equiv 1$$

だからである．

7.7　サンプリング定理

この節では，不規則に間隔のあいたサンプリング数列 $\{t_n\}$ に関するサンプリング定理について述べる．この主題についての広範な内容が，[Ben2] に存在する．そこでは，フレームの考え方に基づいた新しい結果や公式，文献の紹介がなされている．ここでの目標は，一般的かつ建設的な不規則サンプリングの公式（定理 7.45）および実行可能なアルゴリズム（アルゴリズム 7.51，[Ben2, Algorithm 50] と比較されたい）を示すことである．なお，ここでの議論は，例や他の方法との比較により豊富なものとなっている．

定義 7.42　$\{t_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ を狭義単調増加数列とし，$\lim_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$ および次式を満たすものとする．

$$\text{ある } d>0 \text{ が存在し，任意の } m \neq n \text{ に対して，} \quad |t_m - t_n| \geq d \tag{7.53}$$

式 (7.53) を満たす数列は，一様に離散な数列である．例/注意 7.20 と比較されたい．

(a) 数列 $\{t_n\}$ が，一様密度 $\Delta > 0$ を持つ一様に密な数列であるとは，

$$\text{ある } L>0 \text{ が存在し，任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対して，} \quad |t_n - \frac{n}{\Delta}| \leq L$$

となることをいう．

(b) 数列 $\{t_n\}$ が，自然密度 $\Delta \geq 0$ を持つとは，

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_0(r)}{r} = \Delta$$

となることをいう．ここで，

$$n_0(r) \equiv \mathrm{card}\left\{t_n \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]\right\}$$

である．たとえ，数列が自然密度を持っていないとしても，$\overline{\lim}$および$\underline{\lim}$で定義される（有限あるいは無限の）上限および下限自然密度を常に持っている ([Bo2, Section 1.5])．一様密度と自然密度の比較は，[Ben2, Example 37] においてなされている．

(c) 数列 $\{t_n\}$ が，下限の一様 Beurling 密度$\Delta^- \geq 0$ および上限の一様 Beurling 密度$\Delta^+ \geq 0$ を持つとは，

$$\Delta^- = \lim_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{r} \quad \text{および} \quad \Delta^+ = \lim_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{r} \tag{7.54}$$

であることをいう．ここで，すべての間隔 $I \subseteq \mathbb{R}$ および $r > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} n^-(r) &\equiv \inf_I n_I(r),\ n^+(r) \equiv \sup_I n_I(r) \\ n_I(r) &\equiv \sharp\{t_n \in I : |I| = r\} \end{aligned}$$

である．式 (7.54) の極限は存在するが，その理由は $n^-(r_1 + r_2) \geq n^-(r_1) + n^-(r_2)$ および $n^+(r_1 + r_2) \leq n^+(r_1) + n^+(r_2)$ であることにある．

なお，Beurling 密度とこの節で述べる他の項目との関係は，[Ben2, Section 9] において議論されている．また，この分野における Beurling の基本定理に関しては，[Beu, Volume2, 341–頁] を参照した．[L1] と比較されたい．

(d) $\{t_n\}$ のフレーム半径とは，次式で表されるものである．

$$\Omega_r \equiv \sup\left\{\Omega \geq 0 : \{e_{-t_n}\} \ \text{は}\ L^2[-\Omega, \Omega] \ \text{のフレーム}\ \right\} \in [0, \infty]$$

不規則サンプリングに関する最近の理論の中心となる結果は，Duffin–Schaeffer の定理である [DuSc]．

定理 7.43　$\{t_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ を，一様密度Δを持つ一様に密な数列とする．そのとき，もし，$0 < 2\Omega < \Delta$であるなら，$\{e_{-t_n}(\gamma)\}$ は $L^2[-\Omega, \Omega]$ に関するフレームである．

出現してから 40 年が経つが，この定理 7.43 は，いまだに証明することが難しいものである．この定理の証明は，他の概念や評価の中でも，Plancherel–Pólya や Boas の研究と関連する指数関数型整関数についての基本的な性質を含むものとなっている．なお，Plancherel–Pólya や Boas の研究については，例題/注意 7.20 において引用した．また，定理 7.43 を，もし $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ が一様密度$\Delta > 0$ を持っているなら，$2\Omega_r \geq \Delta$である，という表現に改めることが可能なことは容易に理解される．

Duffin–Schaeffer の定理 (定理 7.43) および式 (7.21) を一方向に対して使用することで，Jaffard [J] は，次に示すような $L^2[-\Omega, \Omega]$ に関するフレーム $\{e_{-t_n}\}$ の特性を導いた．

定理 7.44　$\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ を，$\lim_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$ を満たす狭義単調増加数列であるとする．そして，$I \subseteq \mathbb{R}$ を区間を表すものとする．

(a) 次の二つは，同値である．

i. $\{e_{-t_n}\}$ が $L^2(I)$ に関するフレームであるような $I \subseteq \mathbb{R}$ が存在する．

ii. 数列 $\{t_n\}$ は，一様密度 Δ を持つ一様に密な数列と，有限個の一様に離散な数列の互いに素な和集合である．

(b) (a) の ii が成り立っているなら，$\{e_{-t_n}\}$ は，$|I| < \Delta$ を満たすどのような $I \subseteq \mathbb{R}$ に対しても，$L^2(I)$ に関するフレームである．(それゆえ，$2\Omega_r \geq \Delta$ である．)

以下に示す一般的な不規則サンプリング公式は，[BenHel1] により創始されたものである．その実用面については，アルゴリズム 7.51 において取り扱うこととする．これらについては，[BenHel1] や [Hel] と比較されたい．

定理 7.45　$\Omega > 0$ および $\Omega_1 > \Omega$ と仮定し，$\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ を，$\lim_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$ を満たす狭義増加数列とする．数列 $\{t_n\}$ を，一様密度 $\Delta > 2\Omega_1$ を持つ一様に密な数列と，有限個の一様に離散な数列の互いに素な和集合とする．そして，$s \in L^2(\mathbb{R})$ が，$\hat{s} \in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$，$\operatorname{supp} \hat{s} \subseteq [-\Omega_1, \Omega_1]$，$[-\Omega, \Omega]$ において $\hat{s} = 1$ という性質を持つものとする．

(a) 数列 $\{e_{-t_n}\}$ は，フレーム作用素 S を持つ，$L^2[-\Omega_1, \Omega_1]$ に関するフレームである．

(b) どのような $f \in PW_\Omega$ も

$$L^2(\mathbb{R}) \text{ で } \quad f = \sum c_f[n] \tau_{t_n} s$$

と表せる．ここで，

$$c_f[n] \equiv \langle S^{-1}(\hat{f} \mathbf{1}_{(\Omega_1)}), e_{-t_n} \rangle_{[-\Omega_1, \Omega_1]}$$

であり，

$$\{c_f[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

である．

証明　(a) は，定理 7.44 を言い換えたものである．

(b) に関して言うと，$\{e_{-t_n}\}$ が $L^2[-\Omega_1, \Omega_1]$ のフレームであることおよび $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$ から，次式を得る．

$$L^2[-\Omega_1, \Omega_1] \text{ で } \hat{f} = \hat{f} \mathbf{1}_{(\Omega_1)} = \sum \langle S^{-1}(\hat{f} \mathbf{1}_{(\Omega_1)}), e_{-t_n} \rangle_{[-\Omega_1, \Omega_1]} e_{-t_n} \tag{7.55}$$

式 (7.55) は，式 (7.7) および正の作用素 S^{-1} が自己随伴であるということの直接的な帰結である．ここで，$f \in PW_\Omega$ という仮定を使うことにより，式 (7.55) を次の様に書き改めることができる．

$$L^2(\hat{\mathbb{R}}) \text{ で } \quad \hat{f} = \sum c_f[n](e_{-t_n} \mathbf{1}_{(\Omega_1)}) \tag{7.56}$$

実際，

$$\left\|\hat{f} - \sum_{-M}^{N} c_f[n](e_{-t_n} \quad \mathbf{1}_{(\Omega_1)})\right\|_2^2$$

$$= \int_{-\Omega}^{\Omega} \left|\hat{f}(\gamma) - \sum_{-M}^{N} c_f[n] e_{-t_n}(\gamma)\right|^2 d\gamma$$

$$= \left\|\hat{f} - \sum_{-M}^{N} c_f[n] e_{-t_n}\right\|_{L^2[-\Omega_1,\Omega_1]}^2$$

次に，$\hat{f} = \hat{f}\hat{s}$であることから，次式が得られる．

$$\left\|\hat{f} - \sum_{-M}^{N} c_f[n](e_{-t_n}\hat{s})\right\|_2^2$$

$$= \|\hat{f}\hat{s} - \sum_{-M}^{N} c_f[n](e_{-t_n}\mathbf{1}_{(\Omega_1)})\hat{s}\|_2^2$$

$$\leq \|\hat{s}\|_\infty^2 \|\hat{f} - \sum_{-M}^{N} c_f[n](e_{-t_n}\mathbf{1}_{(\Omega_1)})\|_2^2$$

そして，この評価と式 (7.56) および s に関する仮定を用いることで，次式を得ることができる．

$$L^2(\hat{\mathbb{R}}) \text{ で } \hat{f} = \sum c_f[n](e_{-t_n}\hat{s}) \tag{7.57}$$

式 (7.57) のフーリエ変換を行うことにより証明が完成する．　∎

定理 7.45 は，係数 $c_f[n]$ が，サンプリングされた値の集合 $\{t_m\}$ における fの値で記述することができる，という通常使われているサンプリング定理である．しかしながら，既知のサンプリング値の集合は，定理 7.45 においては不規則な間隔を持っているので，一般に $c_f[n] = f(t_n)$ と記すことはできない．ある特殊なケースや近似方法については，[Ben2]，[Hel] の中で取り扱われている．そして，より完全な解析については，[BenHel2] に存在する．

注意 7.46　（比較と実行）

$$T \equiv \sup_n (t_{n+1} - t_n) < \frac{1}{2\Omega_1} \tag{7.58}$$

の場合の実行可能な不規則サンプリング定理を予測し，かつそれを証明することができる．このことに関しては，例えば，[Ben2, Lemma 47, Theorem 48, Theorem 51]，[BenHel1]，[FeGrö]，[Hel] などを参照し，また [OSe] と比較されたい．一方，定理 7.45 は，$(t_{n+1}-(n+1)/\Delta), (n/\Delta - t_n) \geq 0$ のとき，および定義 7.42a における L がいくらでも大きくとれる（ただしそれは固定されてい

る）場合，次式で示される範囲のギャップの存在を許す．

$$t_{n+1} - t_n = 2L + \frac{1}{\Delta} < 2L + \frac{1}{2\Omega_1}$$

いずれの場合も，明示的なフレーム定数の計算や定量的な誤差解析，サンプリング値の分布に関する有効な局所解析が，定理の実行に関しての本質的な問題である．そこで，アルゴリズム 7.51 において，アダプティブ・サンプリング関数や関連するフレーム作用素の分解（[BenT], [T]）により，上記の問題の特徴を取り扱う手続きについて概括する．

定理 7.45 において，素早く減少するサンプリング関数 s を選択することは，サンプリング公式において $d_{2\pi\Omega}$ のような古典的な関数を用いる場合よりも良い収束をもたらす．この点については，サンプリング公式において係数 $c_f[n]$ の取り扱いを論じている例 7.47b と比較されたい．

例 **7.47**　（定理 **7.45** に関して）

(a) $\{t_{1,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ が，一様密度 $\Delta = 1$，上限 $L \in \mathbb{N}$，一様に離散なデータの間隔を規定する下限 d（定義 7.42 を参照）を持つと仮定する．さらに，$\{t_n\} = \{t_{1,n}\} \cup \{t_{2,n}\}$ とする．ここで，$\{t_{2,n}\}$ を一様離散なデータ列とする．そのようなデータ列に関し，ここで言及しておくべき二つの現象が存在する．

第一は，次のことである．もし d が十分に小さいなら，$\{t_{1,n}\}$ は，次のような性質を持つ．すなわち，$\mathbb{Z}$ の部分数列で，そのどの要素もそれに近い $2L+1$ 個の $\{t_{1,n}\}$ の要素をもつ部分列が存在する．例えば，$L = 3$，$d = 1/10$ とし，説明を簡単にするため，$\{u_n\} \equiv \{t_{1,n}\}$ を対称とする．そして，$u_1 = 1, u_2 = 5 - 3d, u_3 = 5 - 2d, u_4 = 5 - d, u_5 = 5, u_6 = 5 + d, u_7 = 5 + 2d, u_8 = 5 + 3d$ と置く．ゆえに，$\{u_n\}$ の $2L + 1 = 7$ 個の要素は，$n = 5$ より $Ld = 3d = 3/10$ の距離の範囲に存在する．この場合には，もちろん，$u_9 \geq 6$ であることが必要である．

第二は，適切に選ばれた数列 $\{t_{2,n}\}$ に関して，数列 $\{t_n\}$ は，$\lim_{|n|\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$ という特性を持つことができる，というものである．

(b) オーバーサンプリングの状態にもかかわらず，一様に稠密な数列に対し，さらに一様離散なデータ列を加えることにより，定理 7.45 における係数 $c_f[n]$ をより微妙に制御することが可能になる．その方法を以下に示す．

定理 7.43 に基づいて，A_1を既知の一様に稠密な数列 $T_1 \equiv \{t_{1,n}\}$ のフレームの下界とする．そのとき，$T_2 \equiv \{t_{2,n}\}$ を一様に離散な数列とすると，定理 7.54 および 7.55 により，数列 $T \equiv T_1 \cup T_2$のフレームの下界 A は，A_1と予想される．この理由は，以下の通りである．

$$A_1 \|f\|_2^2 \leq A_1 \|f\|_2^2 + \sum_{t \in T_2} |\langle \hat{f}, e_{-t} \rangle|^2 \leq \sum_{t \in T} |\langle \hat{f}, e_{-t} \rangle|^2$$

つまり，

$$A_1\|f\|_2^2 \leq A\|f\|_2^2 \leq A_1\|f\|_2^2 + \sum_{t\in T_2} |\langle \hat{f}, e_{-t}\rangle|^2$$

のときには，$A \geq A_1$を満たすような A が存在することが期待される，ということである．式 (7.21) により，数列 Tおよび T_1のフレームの上界 Bおよび B_1は，不等式 $B \geq B_1$を満足することも分かる．
係数 $c_f[n]$ の制御については，適当な数列 T_2を選択することで，次の不等式がその役割をなす．(そのような適当な数列をいくつか選択できるであろう．)

$$\frac{B}{B_1} < \frac{A}{A_1} \tag{7.59}$$

これを理解するため，定理 7.54 および 7.55 においてと同様に，S を数列 T とフレームの限界 A, Bに関するフレーム作用素とする．これから，次の式が容易に導かれる．

$$\left\| I - \frac{2}{A+B}S \right\| \leq \frac{B-A}{A+B} < 1 \tag{7.60}$$

そして，Neumann 展開により次の式を得る．

$$S^{-1} = \frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{\infty}\left(I - \frac{2}{A+B}S\right)^k \tag{7.61}$$

これについては，例えば [Ben2, Algorithm 50] を参照されたい．従って，S^{-1}の収束，$c_f[n]$の計算は，式 (7.60) によって制御されるのである．明らかに，S^{-1}の収束は，$(B-A)/(A+B) < (B_1 - A_1)/(A_1 + B_1)$ の場合における数列 T_1に付随した逆フレーム作用素よりはよいであろう．なお，ここで示した不等式は，式 (7.59) のから得られたものである．

式 (7.4)，すなわち $S = L^*L$，とそれから派生した結果は，信号の再構成に関する初期の研究に基本的な考え方を与えるものであった ([DGrMe], [D2])．それに続いて，多くの実際問題への適用の際に登場する基本的な作用素を，関数解析の方法により分離，解析することは，自然であり生産的なことであった．これについては，例えば，[Hö1], [v] を参照されたい．以下に示すものは，7.4 節において示したものと同様なものであるが，式 (7.4) や一般的な連続線形作用素についての基本的な事実をまとめたものであり，それらを示すことは，この章で述べてきた方法を不規則なサンプリングに適用することを目的としている．

定理 7.48　$\{x_n : n \in \mathbb{Z}^d\} \subseteq H$を Bessel 写像 $L : H \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ を持つ Bessel 数列であるとする．そして，$L^* : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to H$をその随伴写像とする．なお，以下の項目における収束の形態については，定義/注意 7.14 の **(f)** の項と比較されたい．

(a) $L, L^*, R \equiv LL^*$ および $S \equiv L^*L$ は，連続線形作用素である．R および S は，自己随伴であり，$\|L\| = \|L^*\|$ および $\|R\| = \|S\|$ である．

(b) $R : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ は，次の式から導出される．

$$\text{任意の } c = \{c[n]\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \text{ に対して，} \quad Rc[m] = \sum_n c[n]\langle x_n, x_m\rangle \text{ となる}$$

(c) $S : H \to H$ は，次の式から導出される．

$$\text{任意の } y \in H \text{ に対して，} \quad Sy = \sum \langle y, x_n\rangle x_n$$

(d) L^* が全射写像であることと，L^{-1} が存在し，それが L の値域上連続であることとは同値である．L が全射写像であることと，$(L^*)^{-1}$ が存在し，それが L^* の値域上連続であることとは同値である．

(e) $(L^*)^{-1}$ が存在し，それが H 上で連続であることと，L^{-1} が存在し，$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上で連続であることとは同値である．この場合，

$$(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$$

(f) もし $\{x_n\}$ が H に関するフレームであるなら，L は単射であり，これは，$L^*(\ell^2(\mathbb{Z}^d))$ が H において稠密であることと同値である．もちろん，定理 7.15 により，L^{-1} は L の閉じた値域において連続である．そして，もし L が全射であるなら，$\{x_n\}$ は，定理 7.19 により，フレームとなる．

(g) もし $\{x_n\}$ が H の基底であるなら，L^* は単射であり，これは，$L(H)$ が H において稠密であることと同値である．この場合，L^* が全射であるなら，$(L^*)^{-1}$ は連続である．

もし $L : H_1 \to H_2$ が，連続線形作用素でさえあれば，定理 7.48 の a，d，e は正しく，それらから以下の結論を得ることができる．

定理 7.49　$L : H_1 \to H_2$ を H_1 上の連続で線形な作用素とし，$R \equiv LL^*$ とする．さらに，L^{-1} が存在し L の値域上で連続であると仮定する．

(a) L^* は全射写像であり，$\text{Range } L = \text{Range } R$ である．

(b) もし $(L^*)^{-1}$ が存在し H_1 上で連続であるなら，L は全射写像であり，$R^{-1} \equiv (L^*)^{-1}L^{-1}$ が存在するとともに H_2 上で連続である．

(c) もし R^{-1} が存在し，値域 $R \subseteq H_2$ 上で連続なら，$(L^*)^{-1} \equiv R^{-1}L$ が存在し H_1 上で連続である．そして，L は全射写像である．

証明　前述の結論を使うことにより，確かめるべき事項は $\text{Range } L \subseteq \text{Range } R$ だけであり，それは L^* の全射性から得られることがわかる．∎

定理 7.50 $\Omega > 0$ および$\Omega_1 \geq \Omega$と仮定する．そして，$\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ が，一様に離散な数列であるとする．

(a) もし $g \in A'(\mathbb{R})$ であるとすると，つまりフーリエ変換$\hat{g}$が $L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ の元であるなら，写像

$$\begin{aligned} L_g : PW_\Omega &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \{f * \tilde{g}(t_n)\} \equiv \{\langle f, \tau_{t_n} g\rangle\} \end{aligned}$$

は，連続線形作用素であり，

$$\text{任意の } f \in PW_\Omega \text{に対して，} \quad \|Lf\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq B\|\hat{g}\|_\infty \|f\|_2$$

である．なお，ここで，Bは，式 (7.21) により定義されるものである．

(b) もし $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ であるなら，$f * \tilde{g} \in A(\mathbb{R})$ および $t \in \mathbb{R}$ に対して $\langle \hat{f}, \hat{g}e_{-t}\rangle = f * \tilde{g}(t)$ である．

(c) もし $g \in A'(\mathbb{R}) \cap PW_{\Omega_1}$であり，$\{\tau_{t_n} g\}$ が PW_{Ω_1}において完備であるなら，あるいは，$g \in A'(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であり，$\{\hat{g}e_{-t_n}\}$ が $L^2[-\Omega, \Omega]$ において完備であるなら，L_gは単射である．

(d) $\{e_{-t_n}\}$ を，限界 A_1, B_1を持つ $L^2[-\Omega_1, \Omega_1]$ に関するフレームとする．もし $g \in A'(\mathbb{R}) \cap PW_\Omega$ であり，$[-\Omega, \Omega]$ において殆ど至る所 $C \geq \hat{g} \geq c > 0$ である（従って$\hat{g}$は$\hat{\mathbb{R}}$上で連続ではない）なら，あるいは，$g \in A'(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ であり，$[-\Omega, \Omega]$ において殆ど至る所 $C \geq \hat{g} \geq c > 0$ であるなら，$\{\hat{g}e_{-t_n}\}$ は $L^2[-\Omega, \Omega]$ に関するフレームであり，その限界は，$A = c^2 A_1, B = C^2 B_1$ である．

証明 (a) は，Plancherel–Pólya の定理（式 (7.21)）より導出される．(b) は，Parseval の公式の基本的な帰結であり，この点については，[Ti2, 90 頁] を参照されたい．また，定理 7.11 と比較されたい．

(c) に関しては，次のように考える．$\{\tau_{t_n} g\}$ を PW_{Ω_1} において完備であるとする．もし $L_g f = 0$ であるなら，どのような n に対しても $\langle \hat{f}, \hat{g}e_{-t_n}\rangle = 0$ となる．よって，$\Omega_1 \geq \Omega$であることとその完備性から$\hat{f} = 0$ となる．もし $\{\hat{g}e_{-t_n}\}$ が $L^2[-\Omega, \Omega]$ において完備であるなら，同様な考察を行いうる．

(d) は，$\sum |\langle \hat{f}, \hat{g}e_{-t_n}\rangle|^2$上で下界，上界を明確にすることにより導かれるものである．なお，ここで，内積は，$[-\Omega, \Omega]$ における積分とする． ∎

次に示すアルゴリズムは，不規則なサンプリングデータから信号を再構成するために設計されている．それは，定理 7.45 を実際問題へ適用可能にしたものである．このアルゴリズムに関するいくつかの派生形は，一般的には厳密なものではないが，ここでの目標は，実際問題に広く適用しうるアルゴリズムを提示することである．ここに示す，ウェーブレット聴覚モデル

WAMを使用したアルゴリズムの音声処理やデータ圧縮への適用は，多大な成果を上げてきている [BenT].

アルゴリズム **7.51**　**(a)** 定理 7.50 から $R = L_g L_g^*$および $S = L_g^* L_g$と定義する．よって，次の式を得る．

$$\begin{aligned} L_g f &= \{f * \tilde{g}(t_n)\} \\ L_g^* c(t) &= \sum c[n]\tau_{t_n} g(t) \\ Sf(t) &= \sum \langle f, \tau_{t_n} g\rangle \tau_{t_n} g \end{aligned}$$

また，Rは，次のように行列の形で表現することができる．

$$R = (\langle \tau_{t_n} g, \tau_{t_m} g\rangle) = (g * \tilde{g}(t_m - t_n)) \equiv (r_{m,n})$$

ここで，信号 $f \in PW_\Omega$は，次のように記述される．

$$f = S^{-1} S f = L_g^* R^{-1} L_g f \tag{7.62}$$

そして，式 (7.61) においてのように，$\|I - \lambda S\| < 1$ のときには，

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (I - \lambda S)^k (\lambda S) f$$

と記述できる．これについては，式 (7.60) と比較されたい．基礎的な計算により，

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} L_g^* (I - \lambda L_g L_g^*)^k L_g f = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (I - \lambda L_g^* L_g)^k L_g^* L_g f$$

であることを確認できるので，

$$f = \lambda L_g^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} (I - \lambda L_g L_g^*)^k \right) L_g f \tag{7.63}$$

となる．この式を式 (7.62) と比較されたい．

式 (7.63) の実行は，次のように行う．まず，既知の信号 $f \in PW_\Omega$に関して，$f_0 = 0$ および $c_0 = L_g f$と置く．そして，$h_n = L^* c_n$，$c_{n+1} = c_n - \lambda L_g h_n$および $f_{n+1} = f_n + h_n$と定義する．

第 1 段階では，c_0，h_0，f_1を計算する．第 2 段階では，c_1，h_1，f_2を計算する，そして，第 n 番目の段階では，c_{n-1}，h_{n-1}，f_nを計算するのである．よって，

$$f_{n+1} = L_g^* \left(\sum_{k=0}^{n} (I - \lambda L_g L_g^*)^k \right) c_0 \tag{7.64}$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} \lambda f_n = f \tag{7.65}$$

と表される．

(b) WAM の非線形な，そして生理学を基礎とした構造の詳細に立ち入ることなく，このアルゴリズムが，このような状況においてどのように適用されるのかを明らかにしよう．(音声) 信号 fは，WAM により処理され，聴覚における時間と大きさの平面上の点で表現される，不規則にサンプリングされたデータ列 $\{t_{m,n}(f)\}$ となる．聴覚システムにおけるこの平面は，7.3 節において述べた情報平面の概念に対応している．$\{t_{m,n}(f)\}$ とともに，データ列 $\{\theta_{m,n}\}$ が存在するが，これは蝸牛管の作用に基づいたものであり，加えて $\{t_{m,n}(f)\}$ における WAM の出力 $w_{m,n}(f)$ が存在する．これは，生理学的にみて現実的な側方抑制網に基づいたものである．$\{\theta_{m,n}\}$ は，フレームの候補である．

また，WAM の出力である $\{w_{m,n}\}$ がまさしく $\{\langle f, \theta_{m,n}\rangle\} \equiv Lf$であることは，顕著な事実である．

聴覚システムの初期の段階での過剰性にもかかわらず，脳が高い分解能でもってたいへん小さな WAM の出力を処理していると予想することは，妥当なことである．このように，閾値$\epsilon > 0$ を選択することによって，閾値以下の WAM の出力を捨て，点 $t_{m,n}(f,\epsilon)$ を保持するフレーム作用素 $Sf = \sum w_{m,n}\theta_{m,n}$を定義するのである．

典型として，$\{t_{m,n}(f,\epsilon)\}$ に対応する小さなデータ列 $\{w_{m,n}\}$ を伝達することを考える．このように，受信者は，前述のアルゴリズムを用いて，つまり式 (7.64)，式 (7.65) により，そのデータから信号 fを再構成するのである．WAM についての全てとその実際の適用についての記述は，[BenT] に見ることができる．

注意 **7.52**　Daubechies [D1, 911 頁] は，$L^2(\mathbb{R})$ に関するフレーム $\{\theta_{m,n}\}$ の過剰性が高くなるほど，部分空間 $L(L^2(\mathbb{R}))$ は小さくなることを発見した．ただし，ここで，$LF = \{\langle f, \theta_{m,n}\rangle\}$ である．重要なことは，この特性が，計算によるノイズの低減という目的のためには，まさしく望むべきものであるということである．この点について，$2T\Omega < 1$ の場合の例/注意 7.20 と比較されたい．擬逆作用素を含む解析に対応して，Teolis [T] は，L^*の核が大きければ大きいほど，信号の再構成は安定したものとなるであろう，という類似の計算を導出した．

7.8　不確定性原理の不等式

この節では，問題 7.3 において記述した Gabor 流の考え方を一般化するための基礎を扱う．古典的不確定性原理の不等式の代わりに，ここでは，重み付き不確定性原理の不等式を定理 7.55

と 7.62 において証明する．実際問題への適用において大切なものである分散を最小化することの他に多くの基準があることから，そのような不等式を証明することは，妥当なことである．一旦，重み付き不確定性原理の不等式を得たなら，目的は，ガウス関数が古典的不確定性原理の不等式を最小化するように，この不等式を最小化するものを定めることにある．そして，7.3 節において情報平面の分割によって動機づけられたように，その計画は，それら不等式を最小化するものに関わる分解やサンプリングの理論を発展させるものである．

定義 7.53　u および vを，それぞれ$\hat{\mathbb{R}}$および $\mathbb{R}$ における非負の Borel 可測関数とする．ここでは，その u と vを重みと考える．もし $1 < p, q < \infty$ であり，定数 $K > 0$ が存在して，

$$\sup_{s>0} \left(\int_0^{1/s} u(\gamma)\, d\gamma \right)^{1/q} \left(\int_0^s v(t)^{-p'/p}\, dt \right)^{1/p'} = K \tag{7.66}$$

ならば，$(u, v) \in F(p, q)$ と書く．また，$L^p_v(\mathbb{R})$ は，Borel 可測関数 fで

$$\|f\|_{p,v} \equiv \left(\int |f(t)|^p v(t)\, dt \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすもの全体である．

次に，重み付き Hausdorff–Young–Titchmarsh の不等式について記す．これについては，式 (7.40)，式 (7.41) と比較されたい．また，H. Heinig と筆者は，1982 年に定理 7.54 を証明しているが，より最新の文献や一般化に関することについては [BenHe] を参照されたい．

定理 7.54　$1 < p \le q < \infty$ とし，u および vを$\hat{\mathbb{R}}$および $\mathbb{R}$ における偶の重みとする．なお，$(u, v) \in F(p, q)$ で，式 (7.66) のように定数 Kを持つとする．$1/u$ および vを $(0, \infty)$ における増加関数と仮定すると，定数 $C(K)$ が存在し，

$$\text{任意の } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap L^p_v(\mathbb{R}) \text{ に対して，} \quad \|\hat{f}\|_{q,u} \le C(K) \|f\|_{p,v} \tag{7.67}$$

である．

注意 7.31 における議論は，式 (7.67) の不等式がより大きな関数空間に対しても成り立つことを証明する際に使用することができる．そのような拡張に関しては，フーリエ変換の正確な定義を考察する場合でさえ，微妙な問題が出現することもある ([BenLa])．

もし $p = 1$ で $q > 1$ なら，定理 7.54 は，任意の重み u に対して真である．この証明は，常套の方法ででき，また，定数 $C(K)$ は明示的である．もし $p > 1$ であれば，定数 $C(K)$ は明示的ではなくなるが，Calderón の配列不等式 (Studia Math. 26 (1966), 273–299 頁) の証明を考察することにより，定数を評価することが可能である．なお，その証明は，定理 7.54 の証明を行うにあたって使用したものである．

定理 7.54 を完全なものにした後，Heinig と筆者は，次に示す重み付き不確定性原理の不等式の証明を行った．

定理 7.55　$1 < p \le q < \infty$ とし，u および v を，それぞれ $\hat{\mathbb{R}}$ および $\mathbb{R}$ における偶の重みとする．なお，重み係数は，$(u, v) \in F(p, q)$ であり定数 K を持つ（式 (7.66) のように）とする．そして，$1/u$ および v が，$(0, \infty)$ における増加関数であると仮定する．そのとき，定数 $C(K)$ が存在し（定理 7.54 の場合と同様に），

$$\text{任意の } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ に対して，} \quad \|f\|_2^2 \le 4\pi C(K)\|tf(t)\|_{p,v}\|\gamma\hat{f}(\gamma)\|_{q',u^{-q'/q}} \tag{7.68}$$

である．

証明　式 (7.31) の第 1 項（f の代わりに $\hat{f}$ を適用する），Hölder の不等式および定理 7.54 により，次の式を得る．

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \|\hat{f}\|_2^2 \le \int |\gamma(\bar{\hat{f}})(\gamma)(\hat{f})'(\gamma)|\,d\gamma \\
&= 2\int \left|\gamma(\bar{\hat{f}})(\gamma)u(\gamma)^{-1/q}\right|\left|(\hat{f})'(\gamma)u(\gamma)^{1/q}\right|\,d\gamma \\
&\le 2\left(\int \left|\gamma(\bar{\hat{f}})(\gamma)\right|^{q'} u(\gamma)^{-q'/q}\,d\gamma\right)^{1/q'}\left(\int \left|(\hat{f})'(\gamma)\right|^{q} u(\gamma)\,d\gamma\right)^{1/q} \\
&\le 2C(K)\|((\hat{f})')^{\vee}(t)\|_{p,v}\|\gamma\hat{f}(\gamma)\|_{q',u^{-q'/q}}
\end{aligned}$$

そして定理 7.55 の結論は，$((\hat{f})')^{\vee}(t) = 2\pi i t f(t)$ から得る．　∎

定理 7.30 の後で指摘したように，このような不等式で重要な事柄は，部分積分，Hölder の不等式，Plancherel の定理およびそれらの一般化されたものである．定理 7.55 の場合においては，Plancherel の定理の代わりに定理 7.54 を使用した．そして，この節での次の目標である定理 7.62 は，若干ではあるがより洗練された記述となっており，また，$\mathbb{R}^d$ において証明される．

定理 7.56　**([Si, Theorem 4.1])**

$1 < q < \infty$ とし，u および v を $\mathbb{R}^d$ における重みとする．

(a) 定数 $C > 0$ が存在して，

$$\text{任意の } g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，} \quad \|g\|_{q,u} \le C\|t \cdot \nabla g(t)\|_{q,v} \tag{7.69}$$

と次の式が成り立つこととは同値である．

$$\sup_{s\in\mathbb{R}^d}\left(\int_0^1 u(xs)x^{d-1}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_1^\infty (v(xs)x^d)^{-q'/q}x^{-1}\,dx\right)^{1/q'}\equiv K<\infty$$

なお，定数 C および K は，不等式 $K\le C\le Kq^{1/q}(q')^{1/q'}$ を満足する．

(b) 定数 $C>0$ が存在して，

$$g(0)=0 \text{ なる任意の } g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，}\quad \|g\|_{q,u}\le C\|t\cdot\nabla g(t)\|_{q,v}$$

となることと，次の式が成り立つこととは同値である．

$$\sup_{s\in\mathbb{R}^d}\left(\int_1^\infty u(xs)x^{d-1}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_0^1 (v(xs)x^d)^{-q'/q}x^{-1}\,dx\right)^{1/q'}=K<\infty$$

定義 7.57　$1<p<\infty$ とし，w を $\mathbb{R}^d$ における重みとする．もし，

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-p'/p}\,dx\right)^{p/p'}\equiv K<\infty$$

であれば，w は A_p ウェイトであり，$w\in A_p$ と記述される．ここで，Q は座標軸に平行な面をもつコンパクトな立方体であり，内部は空でないとする．

定理 7.58　$1<p\le q\le p'<\infty$ とし，w を $\mathbb{R}^d$ における重み係数とする．そして，$w(|t|)$ は，$(0,\infty)$ における増加関数と仮定する．そのとき，$w\in A_p$ であることと，定数 $C>0$ が存在して，

任意の $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\left(\int|\hat f(\gamma)|^q|\gamma|^{d((q/p')-1)}w\left(\frac{1}{|\gamma|}\right)^{q/p}d\gamma\right)^{1/q}\le C\|f\|_{p,w} \tag{7.70}$$

が成り立つこととは同値である．

（$d=1$ の場合については，[BenHeJo] を参照されたい．上述した $d>1$ の場合についての記述は， [HeSi, Theorem 2.10] に存在する．）

注意 7.59　定理 7.58 をある種の興味深い古典的な解析の頂点にあたるものと考える．$d=1$ とする．$p=q$ および $w=1$ の場合，式 (7.70) は Hardy， Littlewood，Paley の定理 (1931) となり，それは次のように表される．

$$\left(\int|\hat f(\gamma)|^p|\gamma|^{p-2}\,d\gamma\right)^{1/p}\le C\|f\|_p$$

もし $q=p'$ および $w=1$ であれば，式 (7.70) は Hausdorff–Young の定理を表す．もし $w(t)=|t|^\alpha, 0\le\alpha<p-1$ なら，式 (7.70) は Pitt の定理 (1937) に帰着され，それは次のように表さ

れる．

$$\left(\int |\hat{f}(\gamma)|^q |\gamma|^{-\beta}\, d\gamma\right)^{1/q} \le C\left(\int |f(t)|^p |t|^\alpha\, dt\right)^{1/p}$$

ここで，$\beta = q/p(\alpha+1)+1-q$である．フーリエ変換の不等式が A_pウェイトによってその特徴を記述されるということは，最初は驚きであった．なぜなら，A_p条件が最大関数と特異積分のノルムの不等式に関連していたからである．

定義 7.60 d 次元の Riesz 変換は，奇の核 $k_j(x) = \Omega_j(x)/|x|^d$，$j = 1,\dots,d$ により定義される d 個の特異積分作用素 $R_1,\dots,R_d$ で表される．なお，ここで，$\Omega_j(x) = c_d x_j/|x_j|$ および $c_d = \Gamma((d+1)/2)/\pi^{(d+1)/2}$である．つまり，

$$(R_j f)(x) = \lim_{T^{-1},\epsilon\to 0} \int_{\epsilon\le|t|\le T} f(x-t)k_j(t)dt$$

が，それぞれの $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$，$1<p<\infty$ に関して，殆ど至る所存在し，さらに，$C = C(p)$ が存在して，

$$\text{任意の } f \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，}\quad \|R_j f\|_p \le C\|f\|_p, \quad j = 1,\dots,d$$

となる．$C = C(p)$ は，d に依存しない [GarFra, 223 頁]．また，

$$\hat{k}_j(\gamma) = -i\frac{\gamma_j}{|\gamma|}, \quad j = 1,\dots,d$$

である．

定理 7.61 **(Hunt, Muckenhoupt, Wheeden, 1973)**
$1<p<\infty$ とし，$w \in A_p$と仮定する．そのとき，

$$R_j : L^p_w(\mathbb{R}^d) \to L^p_w(\mathbb{R}^d)$$

は，$j = 1, \dots, d$ に対して連続な線形写像である．[GarFra, 196, 204, 411–413 頁] を参照されたい．

定理 7.62 $1<r\le 2$ と，$w(|t|)$ が $(0,\infty)$ における増加関数であるような $\mathbb{R}^d$における非負の動径方向にしかよらない重み $w \in A_r$が与えられているとせよ．

$$\begin{aligned}\sup_{s\in\mathbb{R}^d} &\left(\int_0^1 \frac{w(xs)^{-r'/r}}{|xs|^{r'}} x^{d-1} dx\right)^{1/r'} \\ &\times \left(\int_1^\infty w\left(\frac{1}{|xs|}\right)^{-1} |xs|^r x^{-\frac{dr}{r'}-1} dx\right)^{1/r} \equiv K < \infty \qquad (7.71)\end{aligned}$$

を仮定すると，定数 $C = C(K) > 0$ が存在して，

$$\text{任意の } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，} \quad \|f\|_2^2 \leq C \||t|f(t)\|_{r,w} \||\gamma|\hat{f}(\gamma)\|_{r,w}$$

となる．

証明

(a) $1 < r < \infty$ に対して，次の式を得る．

$$\|f\|_2^2 \leq \||t|f(t)\|_{r,w} \|f\|_{r',u} \tag{7.72}$$

ここで，

$$u(t) = |t|^{-r'} w(t)^{-r'/r}$$

(b) 式 (7.72) の右辺第 2 成分は，定理 7.56a により評価される．ここで，式 (7.69) における q および v は，それぞれ $q = r'$,

$$v(t) = |t|^{-r'} w\left(\frac{1}{|t|}\right)^{r'/r}$$

である．よって，式 (7.71) が成り立つとき，その場合に限って，

$$\|f\|_{r',u} \leq C_1 \|t \cdot \nabla f(t)\|_{r',v} \tag{7.73}$$

となる．

(c) Minkowski の不等式により，式 (7.73) の右辺は，次の値で上からおさえられる．

$$C_1 \sum_{j=1}^{d} \left(\int |(R_j G_j)^\vee(t)|^{r'} w\left(\frac{1}{|t|}\right)^{r'/r} dt \right)^{1/r'} \tag{7.74}$$

ここで，$G_j^\vee(t) = \partial_j f(t)$ である．式 (7.73) と式 (7.74) を組み合わせ，定理 7.58 を $p = r$ および $q = p'$（従って $1 < r \leq 2$）とおいて適用することで次の式を得る．

$$\|f\|_{r',u} \leq C_1 C_2 \sum_{j=1}^{d} \|R_j G_j\|_{r,w} \tag{7.75}$$

(d) そして最後に，式 (7.72) と式 (7.75) を組み合わせ，式 (7.75) の右辺に対し定理 7.61 を適用することで，次の結論を得る．

$$\|f\|_2^2 \quad \leq \quad C_1 C_2 C_3 \||t|f(t)\|_{r,w} \sum_{j=1}^{d} \|(\partial_j f)^\wedge(\gamma)\|_{r,w}$$

$$\leq 2\pi d^{1/r'} C_1C_2C_3 \||t|f(t)\|_{r,w} \left(\int |\hat{f}(\gamma)|^r \left(\sum_{j=1}^{d} |\gamma_j|^r \right) w(\gamma)d\gamma \right)^{1/r} \quad (7.76)$$

$$\leq 2\pi d^{1/2} C_1C_2C_3 \||t|f(t)\|_{r,w} \||\gamma|\hat{f}(\gamma)\|_{r,w}$$

∎

系 7.63　与えられた $1 < r \leq 2$ および $d > r'$ に対し，次をみたす $C > 0$ が存在する．

$$\text{任意の } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ に対して，} \quad \|f\|_2^2 \leq C \||t|f(t)\|_r \||\gamma|\hat{f}(\gamma)\|_r \quad (7.77)$$

注意 7.64　**(a)** 式 (7.76) の考え方に基づくと，系 7.63 における定数 C は，次のように表される．

$$C = 2\pi d^{1/2} C_1(r,d) B_d(r) C_3(r)$$

d の増加にともなう C の推移を測定することが興味の対象であるから，$C_1(r,d)$ の値を，任意の w に対して式 (7.71) の K により評価できることに留意しておこう．

(b) 定理 7.56b より定理 7.62 の類似なものが導かれる．これから，$w = 1$ とし，$d < r'$ に対する式 (7.77) が導かれる．

例 7.65　**(局所不確定性原理の不等式)**

7.5 節で議論した局所サンプリングに関する結論と同様に，局所的な不確定性原理の不等式も存在する．それらがどのようなことを意味するのかを理解するために，古典的不確定性原理の不等式が，f が集中するなら $\hat{f}$ はしみ出すということを意味していることを思い出してみよう．局所不確定性原理の不等式は，このしみ出しがなめらかであり，$\hat{f}$ が原点から離れた孤立したピークを持っているためにおこる現象ではないことを定量化するものである．例えば，Faris [F, (3.2)] は，任意の固定した Borel 集合 $E \subset \hat{\mathbb{R}}$ に対して，

$$\text{任意の } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ に対して，} \quad \int_E |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\gamma \leq 2\pi |E| \|tf(t)\|_2 \|f\|_2 \quad (7.78)$$

であることを証明した．従って，もし $\hat{f}$ が $\gamma_0 \in E_j$ についてのピークを持っているなら，$\|\hat{f}\mathbf{1}_{E_j}\|_2$ は，$|E_j| \to 0$ のとき多少なりとも一定であることになる．これは，式 (7.78) と矛盾するものである．これら局所不確定性原理の不等式は，まず Price [P1] により，続いて Heinig と筆者により証明された．参考文献やそれらの詳細については，[Ben1] を参照されたい．

謝辞　この研究は，Prometheus Inc. の援助を受けたものであった（DARPA Contract DAA-H01-91-CR212）．筆者は，Maryland 大学の数学の教授でもある．専門的な知識を与え，この文章に有益な助言をしてくれた Dr. Sam Earp，Sandra Saliani，そして Georg Zimmermann に感謝するものである．

参考文献

[AU] A. Aldroubi and M. Unser. "Families of multiresolution and wavelet spaces with optimal properties," preprint, 1992.

[B] L. Baggett. 1990. "Processing a radar signal and representations of the discrete Heisenberg group," *Coll. Math.* **60/61**: 195–203.

[Bal] R. Balian. 1981. "Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique," *C. R. Acad. Sci.* **292**: 1357–1362.

[Baretal] V. Bargmann, P. Butero, L. Girardello, and J. Klauder. "On the completeness of coherent states," *Rep. Mod. Phys.*, 1971. **2**: 221–228.

[Bas] M. Bastiaans. "Gabor's expansion of a signal into Gaussian elementary signals," *Proc. IEEE* 1980. **68**: 538–539.

[Bat] G. Battle. 1989. "Phase space localization theorem for ondelettes," *J. Math. Phys.* **30**: 2195–2196.

[Be] W. Beckner. 1975. "Inequalities in Fourier analysis," *Ann. Math.* **102**: 159–182.

[Ben1] J. Benedetto. 1990. "Uncertainty principle inequalities and spectrum estimation," in *Recent Advances in Fourier Analysis and Its Applications*, NATO-ASI Series C **315**, J.S. and J.L. Byrnes, eds., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 143–182.

[Ben2] J. Benedetto. 1992. "Irregular sampling and frames," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 445–507.

[Ben3] J. Benedetto. 1992. "Stationary frames and spectral estimation," in *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis*, NATO-ASI-1991, J.S. Byrnes, ed., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 117–161.

[BenHe] J. Benedetto and H. Heinig. 1992. "Fourier transform inequalities with measure weights," *Adv. Math.* **96**: 194–225.

[BenHeJo] J. Benedetto, H. Heinig, and R. Johnson. 1987. "Fourier inequalities with A_p-weights" *ISNM* **80**: 217–232.

[BenHel1] J. Benedetto and W. Heller. 1990. "Irregular sampling and the theory of frames," *Mat. Note* **10**(Suppl. 1): 103–125.

[BenHel2] J. Benedetto and W. Heller. "Irregular sampling and the theory for frames, II," preprint, 1993.

[BenKar] J. Benedetto and C. Karanikas. "Local sampling theory and the Gabor transform," preprint, 1993.

[BenLa] J. Benedetto and J. Lakey. 1993. "The definition of the Fourier transform for weighted inequalities," *J. Funct. Anal.*, to appear.

[BenT] J. Benedetto and A. Teolis. 1993. "Wavelet auditory models and data compression," *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, to appear.

[BenWa] J. Benedetto and D. Walnut. 1993. "Gabor frames for L^2 and related spaces," this volume, Chap. 3.

[Bene1] M. Benedicks. 1985. "On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure," *J. Math. Anal. Appl.* **106**: 180–183.

[Bene2] M. Benedicks. 1984. "The support of functions and distributions with a spectral gap," *Math. Scand.* **55**: 285–309.

[BerWa] E. Bernstein and D. Walnut. "A wavelet based phoneme discriminator," preprint, 1992.

[Beu] A. Beurling. 1989. *Collected Works*, vols. 1 and 2, Boston: Birkhäuser.

[Bo1] R. Boas. 1940. "Entire functions bounded on a line," *Duke J. Math.* **6**: 148–169.

[Bo2] R. Boas. 1954. *Entire Functions*, New York: Academic Press.

[Bou] J. Bourgain. 1988. "A remarks on the uncertainty principle for Hilbertian basis," *J. Funct. Anal.* **79**: 136–143.

[BuSpSte] P. Butzer, W. Splettstösser, and R. Stens. 1988. "The sampling theorem and linear prediction in signal analysis," *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **90**: 1–70.

[BuSte] P. Butzer and R. Stens. 1992. "Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview," *SIAM Rev.* **34**: 40–53.

[By] J. Byrnes. "A low crest factor complete orthonormal set," preprint, 1992.

[C] L. Cohen. 1989. "Time-frequency distributions-a review," *Proc. IEEE* **77**: 941–981.

[CoMeWi] R. Coifman, Y. Meyer, and V. Wickerhauser. 1992. "Wavelet analysis and signal processing," in *Wavelets and Their Applications*, M. Ruskai, ed., Boston: Jones and Bartlett, pp. 153–178.

[D1] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Comm. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[D2] I. Daubechies. 1990. "The wavelet transform, time-frequency localization, and signal analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory* **36**: 961–1005.

[DGrMe] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. 1986. "Painless nonorthogonal expansions," *J. Math. Phys.* **27**: 1271–1283.

[DeCovTh] A. Dembo, T. Cover, and J. Thomas. 1991. "Information theoretic inequalities," *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**: 1501–1518.

[DoSta] D. Donoho and P. Stark. 1989. "Uncertainty principles and signal recovery," *SIAM J. Appl. Math.* **49**: 906–931.

[DuSc] R. Duffin and A. Schaeffer. 1952. "A class of non-harmonic Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**: 341–366.

[F] W. Faris. 1978. "Inequalities and uncertainty principles," *J. Math. Phys.* **19**: 461–466.

[FeGrö] H. Feichtinger and K. Gröchenig. 1993. "Theory and practice of irregular sampling," this volume, Chap. 8.

[Fo] G. Folland. 1989. *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[FrTo] M. Frazier and R. Torres. 1993. "The sampling theorem, φ-transform, and Shannon wavelets for $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, and $\mathbb{Z}_N$," this volume, Chap. 6.

[Ga] J.-P. Gabardo. 1989. "Tempered distributions with spectral gaps," *Math. Proc. Cambr. Philos. Soc.* **106**: 143–162.

[Ga] D. Gabor. 1946. "Theory of communication," *J. IEE London* **93**: 429–457.

[GarFra] J. Garcia-Cuerva and J. Rubio de Francia. 1985. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Amsterdam: North-Holland.

[GoGol] I. Gohberg and S. Goldberg. 1981. *Basic Operator Theory*, Boston: Birkhäuser.

[HWa] C. Heil and D. Walnut. 1989. "Continuous and discrete wavelet transforms," *SIAM Rev.* **31**: 628–666.

[HeSi] H. Heinig and G. Sinnamon. 1989. "Fourier inequalities and integral representations of functions in weighted Bergman spaces over tube domains," *Ind. Univ. Math. J.* **38**: 603–628.

[Hel] W. Heller. 1991. "Frames of exponentials and applications," Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, Md.

[Hi1] J. Higgins. 1977. *Completeness and Basis Properties of Sets of Special Functions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[Hi2] J. Higgins. 1985. "Five short stories about the cardinal series," *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**: 45–89.

[Hir] I. Hirschman. 1957. "A note on entropy," *Amer. J. Math.* **79**: 152–156.

[Hö1] L. Hörmander. 1983. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vols. I and II. New York: Springer-Verlag.

[Hö2] L. Hörmander. 1991. "A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs," *Ark. Mat.* **29**: 237–240.

[Ho] C. Houdrè. 1993. "Wavelets, probability, and statistics: Some bridges," this volume, Chap. 9.

[J] S. Jaffard. 1991. "A density criterion for frames of complex exponentials," *Mich. Math. J.* **38**: 339–348.

[Ja1] A. Janssen. 1981. "Gabor representation of generalized functions," *J. Math. Anal. Appl.* **83**: 377–394.

[Ja2] A. Janssen. 1982. "Bargmann transform, Zak transform, and coherent states," *J. Math. Phys.* **23**: 720–731.

[K] J. Kampé de Fériet. 1950–1951. "Mathematical methods used in the statistical theory of turbulence: harmonic analysis," Inst. Fluid Dynamics, U. of Maryland **1**: 1–108.

[Ke] B. Kedem. 1986. "Spectral analysis and discrimination by zero-crossings," *Proc. IEEE* **74**: 1477–1493.

[Kl] I. Kluvánek. 1965. "Sampling theorem in abstract harmonic analysis," *Mat. Fyz. Casopsis Sloven. Akad. Vied.* **15**: 43–48.

[Ko] P. Koosis. 1980. *Introduction to H_p Spaces*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[L1] H. Landau. 1967. "Necessary density condition for sampling and interpolation of certain entire functions," *Acta Math.* **117**: 37–52.

[L2] H. Landau. 1985. "An overview of time and frequency limiting," in *Fourier Techniques and Applications*, J. Price, ed., New York: Plenum Press, pp. 201–220.

[L3] H. Landau. 1989. "On the density of phase-space expansions," preprint.

[Le] N. Levinson. 1940. *Gap and Density Theorems*, Colloq. Publ. **26**, Providence: Amer. Math. Soc.

[Lo] F. Low. 1985. "Complete sets of wavepackets," in *A Passion for Physics: Essays in Honor of Geoffrey Chew*, C. DeTar et al., eds., Singapore: World Scientific, pp. 17–22.

[Mal] S. Mallat. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–87.

[Ma] F. Marvasti. "A unified approach to zero-crossings and non-uniform sampling," ISBN 09618167-08, 1987.

[Mas] P. Masani. 1960. "The prediction theory of multivariate stochastic processes, III," *Acta Math.* **104**: 141–162.

[Me] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, vols. I, II, and III, Paris: Hermann.

[OSe] P. Olsen and K. Seip. 1992. "A note on irregular discrete wavelet transform," *IEEE Trans. Inform. Theory* **38**: 861–863.

[OpWil] A. Opperheim and A. Willsky. 1983. *Signals and Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc.

[PWie] R. Paley and N. Wiener. 1934. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Colloq. Publ. **19**, Providence: Am. Math. Soc.

[Pa] A. Papoulis. 1977. *Signal Analysis*, New York: McGraw-Hill.

[Pe] A. Perelomov. 1971. "On the completeness of the system of coherent states," *Theor. Math. Phys.* **6**: 156–164.

[Pl] M. Plancherel. 1949. "Intégrales de Fourier et fonctions entières," *Colloq. sur l'analyse harmonique, Nancy*: 31–43.

[Pr1] J. Price. 1983. "Inequalities and local uncertainty principles," *J. Math. Phys.* **24**: 1711–1714.

[Pr2] J. Price. 1985. "Uncertainty principles and sampling theorems," in *Fourier Techniques and Applications*, J. Price, ed., New York: Plenum Press, pp. 25–44.

[R] M. Rieffel. 1981. "Von Neumann algebras associated with pairs of lattices in Lie groups," *Math. Ann.* **257**: 403–418.

[Ri] A. Rihaczek. 1985. *Principles of High-Resolution Radar*, Los Altos, Calif: Peninsula Publishing.

[RioVe] O. Rioul and M. Vetterli. 1991. "Wavelets and signal processing," *IEEE Signal Process. Mag.* October: 14–38.

[S] L. Schwartz. 1966. *Théorie des Distributions*, Paris: Hermann.

[Se] K. Seip. 1992. "Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space," *Bull. Amer. Math. Soc.* **26**: 322–328.

[SeWal] K. Seip and R. Wallstén. 1990. *Sampling and Interpolation in the Bargmann–Fock Space*, Djursholm: Report Mittag-Leffler.

[ShWe] C. Shannon and W. Weaver. 1949. *A Mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois Press.

[Sha] H. Shapiro. 1991. "Uncertainty principles for bases in $L^2(\mathbb{R})$," preprint.

[Si] G. Sinnamon. 1989. "A weighted gradient inequality," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **111**: 329–335.

[StWei] E. Stein and G. Weiss. 1971. *An Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[T] A. Teolis. 1992. "Implementation of irregular sampling algorithms," Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, Md.

[Ti1] E. Titchmarsh. 1926. "The zeros of certain integral functions," *Proc. London Math. Soc.* **25**: 283–302.

[Ti2] E. Titchmarsh. 1948. *Theory of Fourier Integrals*, 2nd ed., Oxford: Oxford Univ. Press.

[v] J. von Neumann. 1932, 1949, and 1955. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[W] G. Walter. 1992. "A sampling theorem for wavelet subspaces, Part II," *IEEE Trans. Inform. Theory* **38**: 881–884.

[Y] R. Young. 1980. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, New York: Academic Press.

第 8 章　不規則サンプリングの理論と実際

Hans G. Feichtinger and Karlheinz Gröchenig*

【概要】 本章では不規則なサンプルからバンドリミテッド関数 (周波数帯域が限定された区間の中にあるような関数) を再構成する方法を示す．第 I 部では不規則なサンプリング問題の構成的な解法のアルゴリズムを論ずる．これらのアルゴリズムの重要な側面は内在する定数に関する明示的に与えられた知識と，効率的な誤差の推定である．第 II 部ではこれらのアルゴリズムの数値的な実現方法について議論し，さまざまな再構成方法の性能を比較する．

すでに大部分の内容は出版されているが，以下にあげるいくつかの新しい結果も含まれている．(a) フレーム限界の新しい推定方法，(b) サンプル値以外の部分的な情報からバンドリミテッド関数を再構成する方法，(c) バンドリミテッド関数を局所平均値から完全に再構成する方法の最新結果，(d) 最近の実験結果の体系的な解説．

8.1　はじめに: 不規則なサンプリング問題

サンプリングは信号解析の基本的な問題のひとつである．信号 $f(x)$ 全体を完全に記録することはできないので，時刻列 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ でサンプリングすることになる．そこで，f をサンプル値 $f(x_n)$ からいかにして再構成，あるいは少なくとも近似するかという問題が発生する．

実際には有限個のサンプル値しか計測，蓄積できない．この場合，不規則なサンプリング問題は有限次元の問題となり，線形代数の方法が適用可能となる — 本章第 II 部を参照のこと．

理論的なモデルでは，無限のサンプル値が与えられるものと仮定する．この場合，任意の信号の再構成は明らかに, うまく定義されない問題 (ill-défined problem) である．しかしながら，ほとんどの応用問題において，信号のバンド (帯域) は限定されている，すなわち高周波成分を含まないと仮定することができる．

もしサンプル値が等間隔でサンプリングされていれば，Shannon, Whittaker, Kotel'nikov 等による有名なサンプリング定理が明示的な再構成を与える．$f \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\omega, \omega]$ とす

---

*Feichtinger は,「実験的信号解析」プロジェクトを通じてオーストリア国立銀行から,「 Hochschuljubiläumspreis」を通じて Kammer der Gewerblichen Wirtschaft von Wien から，援助を部分的に受けた．最終稿はオーストリア科学財団 (FWF) のプロジェクト PO8784 の一部として準備された．Gröchenig は DARPA 助成金 AFOSR-90-0311 の援助を部分的に受けた．

ると，任意の $\delta \le \pi/\omega$ について，信号 f は次のように表される．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\delta) \frac{\sin \omega(x - n\delta)}{\omega(x - n\delta)} \tag{8.1}$$

ここで級数は $L^2(\mathbb{R})$ の意味で収束し、かつコンパクト一様収束する．等間隔サンプリングの場合は詳しく研究されており，無数の変形が導かれている．これらについては文献 [GuSpSte], [Hi2], [Je] に任せる．

これに対して，不規則なサンプル $x_n, n \in \mathbb{Z}$ の問題はより難しい．この難しさは，Poisson 公式がもはや適用できないという事実に由来する．また，非常に不規則なサンプリング集合に関しては，無限級数の収束性に，より多くの注意を払う必要があることにも由来する．

不規則なサンプリング問題は，A.Beurling, P.Maliavin, H.Landau の業績 [Be], [BeMal], [L] で実を結んだ数多くの難解かつ深遠な定理が生まれる契機となった．本章ではこれら多くの理論的進展についてはあまり触れていないことを，あらかじめお断りする．かわりに J. Benedetto の優れた概説 [B] を挙げておく．

本稿の目的はまったく異なる．効率的な再構成アルゴリズムの開発とその数値的実装である．このためには定量的な不規則なサンプリング理論が必要である．単に「〜という定数が存在する」という定性的な説明では現実のアプリケーションには不十分である．また, たとえいわゆる明示的な再構成公式が与えられたとしても，その構成要素が非常にこみいっていたならばほとんど使えないだろう．

そうではなく数値計算に十分使えるほど単純なアルゴリズムを発見したいのである．加えて，数値計算における試行錯誤的方法を踏み越えるために，すべての数値定数は明示的に与えられ，かつ妥当な誤差評価を与えなければならない．我々の関心の中心である反復アルゴリズムに対しては，再構成の要求精度を達成するために必要な反復回数の見積りも与えられなければならない．

このようなもくろみゆえに，本章は二つのパートに分かれる．Gröchenig により書かれた第 I 部では，上記の要求を満たす反復アルゴリズムのクラスを開発する．

8.2節は反復再構成アルゴリズムの抽象的記述から始まり，フレームの概念を論ずる．これに関連するアプローチが Benedetto と Heller によりとられてきた [BHe]．我々は新しいフレーム限界の推定方法を導入する．

8.3節は不規則なサンプリングの数値計算に使われた，あるいは使えそうな文献の成果を概観する．8.4節では基本的な再構成アルゴリズム，いわゆる「適応重み法」を導く．このアルゴリズムは数値実験からもっとも効率的な手法であることが示されてきたので，この定理の詳細な証明を与える．8.5節ではこの手法のいくつかの変形を紹介する．(a) 不規則なサンプリングの離散モデル．この状況での適応重み法は直接適用できる．(b) 高次元での不規則サンプリングの問題に若干触れる．画像処理では非常に重要な問題である．(c) 不確定性原理と欠落区間の問

題に関する Donoho と Stark の最近の結果 [DoSt] を改良する．8.6節ではバンドリミテッド関数に対するサンプリングの成果のウェーブレット理論への最近の応用を示す．ウェーブレット変換と短時間 Fourier 変換に対する不規則なサンプリングの成果を述べる．

Feichtinger による第 II 部は，これらのアルゴリズムの数値的実現に費やされる．また，第 I 部で与えられた理論的成果を支持あるいは補足する数値実験の結果を与える．

8.7節では数値実験の基礎となる離散モデルを簡単に述べる．次節では，MATLAB の M-ファイルの集まりである "IRSATOL" が作られたハード・ソフトウエア環境 (PC と Sun ワークステーション上の MATLAB) をまとめる．このパートの中心は 8.9節である．これまで研究された最も重要な五つの手法を反復回数と計算時間の観点から一般的に比較する．

また，サンプル値の集合の不規則性に関する各手法の感度 (8.9.4節参照) と緩和係数の役割 (8.9.7節参照) も論ずる．

より実際的な問題 (誤差の計測方法) は 8.9.3節で扱う．最後の節では収束速度の理論値と実測値を比較する．

8.10節は速度に関するその他の問題を扱う．8.10.3節で与えられたスペクトルと与えられたサンプリング集合で繰り返し再構成を行なうためのアルゴリズムの改良方法について述べる．8.10.4節では平均値からの再構成が驚くほどうまくゆくことを示す．最後の節では筆者が提案する ADPW(適応重み法) の使用に関する議論をまとめる．

I　不規則なサンプリングの定量的理論

8.2　反復再構成アルゴリズム

本節では数多くの再構成方法の一般形について論ずる．これらは数学の他分野のみならず現在信号解析でも使われている．このクラスのアルゴリズムは (a) 線形性，(b) 反復性，(c) 近似の幾何学的収束性，により特徴づけられる．関数解析の観点から見ると，これらは Neumann 級数による線形作用素の逆作用素にほかならない．

これらの手法の特別な場合がフレームに基づくアルゴリズムである．ここではフレームを構成する新しい手法を概観する．これは次節で明示的な推定値を得る時に非常に役に立つ．

命題 8.1　A をある正定数 $\gamma < 1$ に対して次式を満たす Banach 空間 $(B, \|\cdot\|_B)$ 上の有界な作用素とする．任意の $f \in B$ に対して，

$$\|f - Af\|_B \leq \gamma \|f\|_B \tag{8.2}$$

このとき，A は B 上で可逆であり，f は以下の反復アルゴリズムにより Af から復元できる．

$f_0 = Af$ とし，$n \geq 0$ について，

$$f_{n+1} = f_n + A(f - f_n) \tag{8.3}$$

とすると，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{8.4}$$

を得る．このとき，n 回反復後の推定誤差は，

$$\|f - f_n\|_B \leq \gamma^{n+1}\|f\|_B \tag{8.5}$$

となる．

証明　不等式 (8.2) により $Id - A$ の作用素ノルムは γ より小さい．これは A に逆作用素が存在し，Neumann 級数

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(Id - A)^n \tag{8.6}$$

で表されることを意味する．任意の $f \in B$ は Af とノルム収束級数 $f = A^{-1}Af = \sum_{n=0}^{\infty}(Id - A)^n Af$ により決定される．

再構成 (8.4) と推定誤差 (8.5) は，(8.3) で定義される第 n 近似 f_n が第 n 部分和$\sum_{k=0}^{n}(Id - A)^k Af$ に一致することを示すことにより簡単に導かれる．まず，$n = 0$ の場合は $f_0 = Af$ の定義により自明である．次に，

$$f_n = \sum_{k=0}^{n}(Id - A)^k Af \tag{8.7}$$

が成り立つとする．すると，$n + 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(Id - A)^k Af &= Af + \sum_{k=1}^{n+1}(Id - A)Af \\
&= Af + (Id - A)\sum_{k=0}^{n}(Id - A)^k Af \quad \text{(帰納法による)} \\
&= Af + (Id - A)f_n = f_n + A(f - f_n)
\end{aligned}$$

を得る．今，明らかに $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ であり，$\sum_{k=n+1}^{\infty}(Id - A)^k = (Id - A)^{n+1}A^{-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_B &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty}(Id - A)^k Af\|_B \\
&= \|(Id - A)^{n+1}A^{-1}Af\|_B \leq \gamma^{n+1}\|f\|_B
\end{aligned}$$

を得る． ∎

与えられた精度を持つ近似値 f_n を得るために必要な反復回数をあらかじめ決定できることは，この再構成アルゴリズムの注目すべき特長である．

効率的な再構成アルゴリズムを伴うサンプリング定理を証明するには，線形近似作用素 A を f のサンプル値だけを含むように「組み上げ」，ノルム評価の (8.2) 式を証明する必要がある．この戦略は解析関数の空間で不規則なサンプリング定理を証明するのに適用され成功してきた [CoR]．例えば，短時間 Fourier 変換とウェーブレット変換 [G1] や，バンドリミテッド関数空間の一般クラス [FG1],[FG2],[FG3] に対して適用された．

このアルゴリズムの重要な実例は，Hilbert 空間中のフレームの存在に見られる．フレームは R. Duffin と A. Schaeffer によるバンドリミテッド関数の不規則なサンプリングに関する基礎研究において，Riesz 基底 (Riesz bases) の一般化として導入された [DuSc]．この考え方は，I. Daubechies と A. Grossmann のウェーブレット理論に関する研究 [D],[DGr],[DGrMe] において再び脚光を浴びた．

定義 8.2　内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とする (可分な) Hilbert 空間に属する列 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ において, すべての $f\in\mathcal{H}$ について，

$$A\|f\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 \le B\|f\|^2 \tag{8.8}$$

を満たす定数 $0 < A \le B$ が存在するならば，この列をフレームと呼ぶ．

左側の不等式は，f の一意性のみならず，f がフレーム係数 $\langle f, e_n\rangle$ に連続的に依存していることも示している．命題 8.1と (8.8) 式より，列 $\langle f, e_n\rangle$ から f を効率良く再構成可能できる．ここで，フレーム作用素

$$Sf = \frac{2}{A+B}\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, e_n\rangle e_n \tag{8.9}$$

を導入する．S は正の作用素であり，(8.8) 式より不等式

$$\begin{aligned} -\frac{B-A}{B+A}\|f\|^2 &\le \|f\|^2 - \frac{2}{A+B}\sum_n |\langle f, e_n\rangle|^2 \\ &= \langle (Id-S)f, f\rangle \le \frac{B-A}{B+A}\|f\|^2 \end{aligned} \tag{8.10}$$

を得る．$Id-S$ は自己随伴なので, (8.10) は $\mathcal{H}$ 上の $Id-S$ の作用素ノルムが $(B-A)/(B+A) < 1$ より小さいことを意味する．そこで，命題 8.1 を適用し，$\gamma = (B-A)/(B+A)$ により決まる収束速度を持つ Sf から f への反復再構成法を得る．Sf の入力は $\langle f, e_n\rangle$ のフレーム係数だけを含むので，これがまさに我々が望んでいる再構成法である．

$g_n = S^{-1}e_n$ とおくと，$\langle f, e_n\rangle$ から f への再構成を "閉じた" 形式

$$f = S^{-1}Sf = \sum_n \langle f, e_n\rangle g_n \tag{8.11}$$

で書くことができる.「基底」関数 e_n に関する f の非直交展開

$$f = SS^{-1}f = \sum_n \langle S^{-1}f, \quad e_n\rangle e_n = \sum_n \langle f, \quad g_n\rangle e_n \tag{8.12}$$

を直ちに得る．二つのフレームの限界 A と B はアルゴリズム中で重要な役割を果たし，収束速度を決めることに注意して欲しい．すなわち，A, B をできるだけ正確に推定することが実用上重要である．

(8.8) 式の上界の推定値はほとんど問題ではない．これは，$f \longmapsto \langle f, e_n\rangle_{n\in\mathrm{N}}$ の $\mathcal{H}$ から l^2 への連続性を表しており，Bの妥当な推定値を得るのは難しくない．一方，下界の推定は通常困難かつ深遠な問題であり，フレーム限界の下界 A の良い推定値を得ることはほとんど不可能である．

この問題はしばしば以下のように扱われる．フレーム限界 A と B が単に存在することで満足し，作用素族

$$S_\lambda f = \lambda \sum_n \langle f, e_n\rangle e_n$$

を考える．ここで，λ はいわゆる緩和係数である．(8.10) 式と同様の推定を行ない，

$$||f - S_\lambda f|| \le \gamma(\lambda)||f||$$

を得る．ここで，$\gamma(\lambda) = \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\}$，小さな λ に対して $\gamma(\lambda) < 1$ である．数値計算上の効率を考えない限りにおいて，このトリックは十分よい．$\lambda_0 = 2/(A + B)$ を選択すると最適値 $\gamma(\lambda_0) = (B - A)/(B + A)$ を得る．実際の収束速度は λ が λ_0 近付くに従ってよくなる．

ここで，フレーム限界を得る新しい手法を示す．不規則なサンプリングのバンドリミテッド関数への応用においては，この方法はより良いフレーム限界の推定値を陽に与える．

この新しい手法は，たいていの場合，$\mathcal{H}$ の数列 $\{e_n\}$ と $\{h_n\}$ に関する

$$Af = \sum_n \langle f, e_n\rangle h_n \tag{8.13}$$

の形式の近似作用素を扱う方がより自然である，という観察に基づく．

命題 8.3 数列 $\{e_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ と $\{h_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ が以下の性質を持つとする．すなわち，ある定数 $C_1, C_2 >$

$0, 0 \leq \gamma < 1$ が存在し，すべての $f \in \mathcal{H}$ と $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ について，

$$\sum_n |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq C_1\|f\|^2 \tag{8.14}$$

$$\left\|\sum_n \lambda_n h_n\right\|^2 \leq C_2 \sum_n |\lambda_n|^2 \tag{8.15}$$

$$\left\|f - \sum_n \langle f, e_n\rangle h_n\right\| \leq \gamma\|f\| \tag{8.16}$$

が成り立つ．このとき，$\{e_n\}$ と $\{h_n\}$ はフレームであり，それぞれフレーム限界 $(1-\gamma)^2/C_2$ と C_1，$(1-\gamma)^2/C_1$ と C_2 を持つ．

証明　A を式 (8.13) と同様に定義する．すると，A は式 (8.14) と (8.15) より $\mathcal{H}$ 上の有界作用素であり，A は式 (8.16) より $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(Id - A)^n$ の逆作用素を持ち，A^{-1} の作用素ノルムは $(1-\gamma)^{-1}$ より小さい．式 (8.14) と (8.15) を用いて，不等式，

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|A^{-1}Af\|^2 \leq (1-\gamma)^{-2}\left\|\sum_n \langle f, e_n\rangle h_n\right\|^2 \\ &\leq (1-\gamma)^{-2}C_2\sum_n |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq (1-\gamma)^{-2}C_1C_2\|f\|^2 \end{aligned} \tag{8.17}$$

を得る．

次に，すべての $(\lambda_n) \in l^2$ と $f \in \mathcal{H}$ についての式 (8.14) と (8.15) の双対的な不等式，

$$\left\|\sum_n \lambda_n e_n\right\|^2 \leq C_1 \sum_n |\lambda_n|^2 \tag{8.18}$$

$$\sum_n |\langle f, h_n\rangle|^2 \leq C_2\|f\|^2 \tag{8.19}$$

を検証する．

$\|\sum_n \lambda_n e_n\| = \sup_{f:\|f\|=1} |\langle \sum_n \lambda_n e_n, f\rangle|$ であるから，式 (8.18) は，

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \sum_n \lambda_n e_n, f\right\rangle\right|^2 &= \left|\sum_n \lambda_n \langle e_n, f\rangle\right|^2 \\ &\leq \left(\sum_n |\lambda_n|^2\right)\left(\sum_n |\langle f, e_n\rangle|^2\right) \leq C_1\|f\|^2\sum_n |\lambda_n|^2 \end{aligned}$$

より従う．不等式 (8.19) も同様である．$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がフレームであることを証明するには，式 (8.17) と同様の議論を随伴作用素

$$A^*f = \sum_n \langle f, h_n\rangle e_n$$

に適用すればよい．　∎

以上から，f がフレーム係数 $\langle f, e_n\rangle$ から二つの方法で再構成できることがわかる．(a) フレーム $\{e_n\}$ と $\{h_n\}$ を利用した近似作用素 A，および命題 8.1 で定義される反復計算を用いる方法．(b) フレーム作用素 $Sf = \lambda\sum_n\langle f, e_n\rangle e_n$ を用いる方法．λ は適当な緩和係数，例えば，$\lambda = 2C_2((1-\gamma)^2 + C_1C_2)^{-1}$ である．

このような抽象的な形式では，命題 8.3 に実用的意味がないのは明らかである．しかし，次節で，フレームの存在性，不規則なサンプリング定理，陽に与えられる数値定数，を証明する有用なガイドとなる．

8.3 定性的サンプリング定理

この節では，不規則なサンプリング問題の構成的なしかし定性的な解法を概観する．これらの結果の詳細な議論，応用可能性，数値的効率については第 II 部で扱う．

記法を定めるために，B_ω をバンドリミテッド関数の空間とする．

$$B_\omega = \left\{ f : \|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty \quad \text{かつ} \quad \operatorname{supp}\hat{f} \subseteq [-\omega, \omega] \right\} \tag{8.20}$$

ここで L^2 ノルムは信号 f のエネルギーに対応し，$2\omega > 0$ を f のバンド幅とする．Fourier 変換 $f \to \mathcal{F}f = \hat{f}$ は

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx \tag{8.21}$$

により正規化される．この逆変換は $f(x) = 1/2\pi\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ で，これから，

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = 2\pi\langle f, g\rangle \tag{8.22}$$

を得る．B_ω はいくつかの注目すべき性質を持つ $L^2(\mathbb{R})$ の閉空間である．

1. Fourier 変換の定数倍 $1/\sqrt{2\pi}\mathcal{F}$ は B_ω から $L^2(-\omega, \omega)$ へのユニタリ変換である．

もし，χ_A が集合 A の特性関数であり，$L_x f(t) = f(t-x)$ が x だけの移動ならば，$x \in \mathbb{R}$ について，

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-ix\xi}\chi_{[-\omega,\omega]}(\xi)\right)(t) = \frac{\sin\omega(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{\omega}{\pi}L_x \operatorname{sinc}_\omega t \tag{8.23}$$

が成り立つ．ここで，$x \neq 0$ に対して $\operatorname{sinc}_\omega x = \sin\omega x/\omega x$，$\operatorname{sinc}_\omega 0 = 1$ である．式 (8.23) から直ちに次のことが言える．

2. $\{1/\sqrt{2\omega}e^{i\pi n\xi/\omega}, n \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(-\omega, \omega)$ に対する正規直交基底であるから，

集合 $\{\sqrt{\omega/2\pi}L_{\pi n/\omega}\operatorname{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ は B_ω の正規直交基底である．

3. B_ω は再構成核 Hilbert 空間，すなわち，各点での評価 $f \to f(x)$ は B_ω で連続である．

もう少し正確には，$f \in B_\omega$ について，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\chi_{[-\omega,\omega]}(\xi)d\xi \\ &= \int f(t)\frac{\sin\omega(t-x)}{\pi(t-x)}dx = \frac{\omega}{\pi}\langle f, L_x \operatorname{sinc}_\omega\rangle = \frac{\pi}{\omega}f * \operatorname{sinc}_\omega(x) \end{aligned} \tag{8.24}$$

である．Nyquist 率 $\delta = \pi/\omega$ に対する通常のサンプリング定理 (8.1) は，**2** と **3** から直ちに導かれる．

4.　すべての $f \in B_\omega$ は指数的増大度 ω の整関数 $f(x+iy)$ に拡張される．有名な Paley–Wiener の定理から，逆もまた真である [PWi]．B_ω のこれらの性質はサンプリング定理の基礎とみなすことができる．

もっとも深遠な結果は整関数とバンドリミテッド関数の同一視に基づくものである．[PWi], [Be], [BeMal], [Le] を参照のこと．Nashed と Walter の成果 [NWa] と筆者らの成果の一部 [FG2], [FG3] は再構成核の性質 (8.24) に基づく．最後に，$L^2(-\omega,\omega)$ 上の非調和 Fourier 級数 $\varphi(\xi) = \sum_n C_n e^{ix_n\xi}$ に関するあらゆる議論は式 (8.23) と (8.24) のサンプリング定理と等価である．実際，多くのよく知られた不規則なサンプリング定理は，非調和 Fourier 級数に関する初期の結果の焼き直しにすぎない．入門については [You1] を参照のこと．

8.3.1　Paley–Wiener による定理

Paley と Wiener [PWi] は正規直交基底 $\{e^{i\pi n\xi/\omega}, n \in \mathbb{Z}\}$ の摂動 $\{e^{ix_n\xi}, n \in \mathbb{Z}\}$ が $L^2(-\omega,\omega)$ に対する Riesz 基底になっているかという問題に興味を持った．Hilbert 空間の Riesz 基底は逆変換を持つ作用素の正規直交基底の像であることを思い出して欲しい．

不規則なサンプリング定理の文脈で，これらの結果の厳密な形式は次のように述べられる．

定理 8.4　不規則なサンプリング集合 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が，

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|x_n - \frac{\pi n}{\omega}\right| \le L < \frac{\pi}{4\omega} \tag{8.25}$$

を満たすとする．すると，すべての $f \in B_\omega$ が次の表現を持つような唯一の数列 $\{g_n\} \subseteq B_\omega$ が存在する．

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)g_n(x) = \frac{\omega}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, g_n\rangle L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega x \tag{8.26}$$

この数列は $L^2(\mathbb{R})$ で収束し、かつコンパクト一様収束する．集合 $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ と $\{L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ は B_ω の Riesz 基底であり，$\omega/\pi\langle L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega, g_n\rangle = \delta_{kn}$ である．

注意 8.5 **1.** この証明は命題 8.1 と 8.3 に基づく．これに対して，B_ω 上の近似

$$Af = \sum f\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega \tag{8.27}$$

を考える．$f = \sum f(n\pi/\omega) L_{n\pi/\omega} \operatorname{sinc}_\omega$ より，すべての $f \in B_\omega$, ある $\Theta < 1$ に対して，

$$\|f - Af\| \le \Theta \|f\|$$

が $|x_n - \pi n/\omega| < \ln 2/\omega$ のもとで正しいことを示すことは難しくない．詳細は [DuE], [You2] を参照のこと．随伴作用素 $A^* f = \sum f(x_n) L_{n\pi/\omega} \operatorname{sinc}_\omega$ を用いて，命題 8.1 は $A^* f$ から f の反復再構成法，別の言い方をすれば不規則なサンプリングからの再構成法を与える．

2. 式 (8.25) の最適な定数を見つけるのはさらに困難である．式 (8.25) の正確な限界 $\pi/4\omega$ は Kadec による [Ka].

3. Levinson [Le] は Lagrange 補間関数の見地から g_n を陽に与える公式を発見した．

$$g(x) = (x - x_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) \left(1 - \frac{x}{x_{-n}}\right)$$

とおくと，

$$g_n(x) = \frac{g(x)}{(x - x_n) g'(x_n)}$$

このようにして，サンプル $f(x_n)$ から $f \in B_\omega$ の「明示的な」再構成法を得る．

4. Paley–Wiener と Kadec の定理はたびたび再定式化されてきた．例えば，[Beu1], [Beu2], [YTh], [Hi2] を参照のこと．

5. 最後に，サンプリング密度は通常のサンプリングに要求されるものと同じである．もし，$n(r)$ を時間長 r 中の最小サンプル数とすると，$\lim_{r\to\infty} n(r)/r = \omega/\pi$ はナイキスト密度と厳密に等しい．

8.3.2 Duffin–Schaeffer による定理

定理 8.4 は通常のサンプリング集合をわずかに変更した場合を扱えるにすぎない．基底の概念を弱めることにより，Duffin と Schaeffer は大きな影響を及ぼした論文 [DuSc] 中で次の定理を発見した．

定理 8.6 サンプリング集合 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が $n \ne m$ について，$|x_n - x_m| \ge \alpha > 0$ と

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left| x_n - \varepsilon \frac{\pi n}{\omega} \right| \le L < \infty \tag{8.28}$$

を満たすような，ある定数 $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha, L > 0$ が存在するとする．

すると，あらゆる $f \in B_\omega$ に対して

$$A\|f\|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x_n)|^2 \le B\|f\|^2 \tag{8.29}$$

が成り立つような，ε, α, L のみに依存する定数 $0 < A \le B$ が存在する．

注意 8.7　**1.**　$f(x_n) = \omega/\pi\langle f, L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega\rangle$ より，式 (8.29) は $\{L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ が B_ω に対するフレームであるということと等価である．命題 8.1 はフレーム作用素

$$Sf = \sum f(x_n) L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega$$

を用いて，$f(x_n)$ から f の反復再構成法を与える．

2.　Duffin–Schaeffer の定理は非常に強力であり，その証明は依然として難しいと考えられている．不規則なサンプリングの多くの応用と初期のいくつかの数値計算法は，この定理の単なる再定式化にすぎない．例えば，[M3], [Wi], [YTh], [BHe] を参照のこと．

実用的な数値計算の観点から見ると，定数 A と B が明示的でないという理由で，この定理の適用範囲は限定されている．式 (8.29) の上界 B が L/ε あたりを考えればよいのに対し，下界 A はその存在が知られているに過ぎない．

数値的効率さや反復回数を考えない限り，適当な緩和係数を試行錯誤 (！) によって決めれば，不規則なサンプリングから妥当な再構成が可能である．[MA] を参照のこと．

フレームの再構成は， Marvasti やそれ以前の Wiley の類似した形式の中で陽な形ではないが使われてきた．それゆえ，この手法を第 2 部では Wiley–Marvasti 法 (略して WIL/MAR) またはフレーム法として参照する．

3.　$n(r)$ を時間幅 r 中の最小サンプル数とすると，式 (8.28) から，サンプリング密度に関して，

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{\omega}{\varepsilon\pi} > \frac{\omega}{\pi}$$

を得る．通常のサンプリング定理と比べると，定理 8.6 は常にオーバーサンプリングを要求する．

1967 年に H. Landau は逆を証明した [L]．

定理 8.8　不規則なサンプリング集合 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が B_ω のフレーム $\{L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ を生成するならば，

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} > \frac{\omega}{\pi}$$

が必要条件である．

最近，S. Jaffard はフレームを生成するすべてのサンプリング数列を完全に特徴づけた [J]．証明には Duffin–Schaeffer と Landau の定理が必要である．定式化のためには，集合 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が，ある $\alpha > 0$ が存在して，同じ部分集合に属するすべての x_n, x_m $(n \neq m)$ 対して，$|x_n - x_m| \geq \alpha > 0$ を満たす有限個の部分集合に分割できるとき，**相対的に分離** [FG2] と呼ばれることを思い出さなければならない．

定理 8.9 サンプリング数列 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が B_ω に対してフレーム $\{L_{x_n} \mathrm{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ を生成するための必要十分条件は $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が相対的に分離しており，かつ

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r} > \frac{\omega}{\pi}$$

が成り立つことである．

この定理はしばしば最も一般的なサンプリング定理とみなされる．上述したように，この定理の応用可能性はフレーム限界の推定法が存在しないことによって弱められている．フレーム再構成の緩和係数は試行錯誤により決定しなければならない．非常に不規則なサンプリング集合に対しては，フレームアルゴリズムの収束は非常に遅い．

8.3.3 POCS 法

POCS 法 (=projection onto convex sets: 凸集合上への射影) は有限個の不規則的なサンプルからバンドリミテッド関数を補間するために [YeSt] で使われた．さらに正確に言えば，与えられた N 個のサンプル (x_n, y_n), $n = 1, 2, \ldots, N$ について，$f(x_n) = y_n$ となるようなバンドリミテッド関数 $f \in B_\omega$ を見つけることが目標である．この問題は常に解を持ち，解集合は余次元 N の部分空間に含まれる B_ω の部分凸閉集合であることが簡単に分かる．

これは不規則なサンプリング問題の非常に弱い形式ではあるが, ここではこの取り扱いを簡単に議論することにする．なぜなら，PCOS 法は不規則なサンプリングの世界に新しいアイデアを持ち込んだからである．

POCS 法の背景は以下のように要約される [YoWe]. (これは von Neumann [Ne, 55 頁] や Kaczmarcz [K] の古典的な成果にさかのぼる．より最近の参考文献として [St] と [Hu] を参照のこと．) C_n, $n = 1, \ldots, N$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分閉凸集合とし，P_n を $\|f - Pf\| = \min_{g \in C_n} \|f - g\|$ で定義される唯一の $\mathcal{H}$ から C_n への (非線形) 射影作用素とする．問題は $C := \bigcap_{n=1}^{N} C_n$ と対応する射影を P_n の言葉で見つけることである．

POCS 法の理論 [YoWe] は C 上で与えられた f の射影 Pf が $f_0 = f$ から反復法により計

算できることを保証する．

$$f_{k+1} = P_N P_{N-1} \dots P_2 P_1 f_k, \quad k \geq 0 \tag{8.30}$$

および $\mathcal{H}$ で $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ である．

さらに一般的には，適当な緩和係数 λ_n, $0 < \lambda_n < 2$, $n = 1, \dots, N$ と作用素 $T_n = f + \lambda_n(P_n f - f)$ を用いて，$\bigcap_{n=1}^N C_n = C$ 上の射影が

$$\begin{aligned} g_0 &= f \\ g_{k+1} &= T_N T_{N-1} \dots T_1 g_k, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

により近似できる．そして $f = \lim_{k\to\infty} g_k$ である．

サンプル $\{(x_n, y_n), n = 1, \dots, N\}$ からバンドリミテッド関数 f を補間するために POCS 法を適用する場合には，B_ω の閉凸集合，

$$C_n = \{f \in B_\omega : f(x_n) = y_n\}$$

に注目し，式 (8.30) の反復によって $f \in \bigcap_{n=1}^N C_n$ を見つけなければならない．この問題では，C_n 上の射影 P_n は次のように陽に計算できる [YeSt]．

$$P_n f = \frac{\omega}{\pi} f * \mathrm{sinc}_\omega + \frac{\pi}{\omega}\left(y_n - \frac{\pi}{\omega} f * \mathrm{sinc}_\omega(x_n)\right) L_{x_n} \mathrm{sinc}_\omega \tag{8.31}$$

反復 (8.30) はバンドリミテッド関数 $f \in B_\omega$, $f(x_n) = y_n$, $n = 1, \dots, N$ を生成する．このアルゴリズムは直ちにより高次元に拡張できる．サンプル数が小さい限り，例えば 100 未満の場合には，十分に機能する．しかしながら，サンプル数が大きくなると，上述の POCS 法や，サンプル数のサイズを持つ (擬-) 逆行列の計算を必要とするいわゆるシングルステップ法は，共に非常に時間がかかるかあるいはまったく実行可能ではない．我々はこれらも報告するが，それと共に簡単に性能を向上させる方法を 8.9.2 節で扱う ([Fetal] も参照のこと)．

8.4　適応重み法

この節では，不規則なサンプルからバンドリミテッド関数を再構成する新しい方法について議論する．この方法は実用的であり，これまでのところ最も良い数値計算結果を出している．Duffin–Schaeffer の定理はここで証明するには難しすぎるが，適応重み法は十分簡単に完全に証明される．この方法のさらなる利点は，フレーム限界と収束速度の評価値が陽に与えられることである．

サンプリング点 x_n, $n \in \mathbb{Z}$ は大きさの順序にならんでいる，すなわち，$\cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < \cdots$ および $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = \pm\infty$ と仮定する．サンプリング密度はサンプル間の間隔の

最大値で測るものとする．すなわち，

$$\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(x_{n+1} - x_n) \tag{8.32}$$

である．サンプルの中間点を $y_n = (x_n + x_{n+1})/2$ で表し，中間点間の距離を $w_n = (x_{n+1} - x_{n-1})/2$ と表す．もし，最大間隔を δ とすると，明らかに $y_n - x_n \le \delta/2$，$x_n - y_{n-1} \le \delta/2$ である．

命題 8.1 によると，f の反復再構成を得るためには，サンプル $f(x_n)$ だけを入力として B_ω 上の恒等作用素の近似を作らなければならない．

明らかで単純な近似方法は，まず f をステップ関数で補間して，次に B_ω の上に射影することである．

区間 $[y_{n-1}, y_n)$ の特性関数を χ_n で表し，$L^2(\mathbb{R})$ から B_ω への直交射影を P で表す．ここで，P は $(Pf)^\wedge = \hat{f}\chi_{[-\omega,\omega]}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ で与えられる．すると，f を近似する最初の推定値は，作用素

$$Af = P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right) \tag{8.33}$$

である．A が B_ω から B_ω への射影となること容易に確認できる (以下も参照)．したがって，問題は A が B_ω 上の恒等作用素をいかに良く近似しているかである．

これを示すために，二つの簡単な不等式が必要である．

補題 8.10 (Bernstein の不等式)　もし，$f \in B_\omega$ ならば $f' \in B_\omega$ および

$$\|f'\| \le \omega\|f\| \tag{8.34}$$

が成り立つ．

証明　式 (8.22) を用いると，以下を得る．

$$\|f'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|(f')^\wedge\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|i\xi\hat{f}(\xi)\|^2 \le \frac{\omega^2}{2\pi}\|\hat{f}\|^2 = \omega^2\|f\|^2$$

∎

補題 8.11 (Wirtinger の不等式)　もし，$f, f' \in L^2(a,b)$，かつ，$f(a) = 0$ または $f(b) = 0$ ならば，

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \le \frac{4}{\pi^2}(b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx \tag{8.35}$$

が成り立つ．

補題 8.11 は [HaLiPó] の 184 頁 から，変数変換により得られる．興味深いことに式 (8.35) は，バンドリミテッド関数に対する一意性の結果を得るためにも使われている．

命題 8.12　もし，$\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(x_{n+1} - x_n) < \pi/\omega$ ならば，すべての $f \in B_\omega$ について，

$$\|f - Af\| < \frac{\delta\omega}{\pi}\|f\| \tag{8.36}$$

が成り立つ．したがって， A は有界であり， B_ω 上で逆作用素を持つ．その限界は，

$$\|Af\| \leq \left(1 + \frac{\delta\omega}{\pi}\right)\|f\| \tag{8.37}$$

$$\|A^{-1}f\| \leq \left(1 - \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{-1}\|f\| \tag{8.38}$$

である．

証明　$f \in B_\omega$ に対し $f = Pf = P(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\chi_n)$ であり，特性関数 χ_n は互いに交わらない台を持つので，

$$\begin{aligned}\|f - Af\|^2 &= \left\|Pf - P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right)\right\|^2 \\ &\leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f - f(x_n))\chi_n\right\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}|f(x) - f(x_n)|^2 dx\end{aligned} \tag{8.39}$$

と書ける．各々の積分を二つの部分，$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\cdots = \int_{y_{n-1}}^{x_n} + \int_{x_n}^{y_n}$，に分け，Wirtinger の不等式

$$\begin{aligned}&\int_{y_{n-1}}^{y_n}|f(x) - f(x_n)|^2 dx \\ &\quad\leq \frac{4}{\pi^2}(x_n - y_{n-1})^2\int_{y_{n-1}}^{x_n}|f'(x)|^2 dx + \frac{4}{\pi^2}(y_n - x_n)^2\int_{x_n}^{y_n}|f'(x)|^2 dx \\ &\quad\leq \frac{\delta^2}{\pi^2}\int_{y_{n-1}}^{y_n}|f'(x)|^2 dx\end{aligned}$$

を適用する．最後のステップで， n の総和をとり，Bernstein の不等式を使い，

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}|f(x) - f(x_n)|^2 dx &\leq \frac{\delta^2}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{y_{n-1}}^{y_n}|f'(x)|^2 dx \\ &= \frac{\delta^2}{\pi^2}\|f'\|^2 \leq \frac{\delta^2\omega^2}{\pi^2}\|f\|^2\end{aligned} \tag{8.40}$$

を得る．これらの評価式の組合せから式 (8.36) を得る．不等式 (8.37) と (8.38) は

$$\|Af\| < \|f\| + \|Af - f\| \leq \left(1 + \frac{\delta\omega}{\pi}\right)\|f\|$$

$$\|A^{-1}f\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(Id-A)^k f\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^k \|f\|$$

から自明である． ∎

定量的なサンプリング定理を得るために，命題 8.1，8.3，8.12 をさまざまな方法で適用する．

定理 8.13 (反復再構成法–Voronoi 法) もし，$\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(x_{n+1}-x_n) < \pi/\omega$ ならば，$f \in B_\omega$ はサンプル $f(x_n)$ から一意に決まり，反復法により以下のように再構成できる．

$$\begin{aligned} f_0 &= Af = P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right) \\ f_{k+1} &= f_k + A(f-f_k), \quad k \ge 0 \end{aligned} \tag{8.41}$$

とおく．すると，$L^2(\mathbb{R})$ で $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ が成り立ち，

$$\|f-f_k\| \le \left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{k+1}\|f\| \tag{8.42}$$

が成り立つ．

証明 命題 8.1 と 8.12 を組み合わせる． ∎

より深い結果を導くために，再び近似作用素 A に注目する．式 (8.17) と $w_n = \int \chi_n(x)dx = (x_{n+1}-x_{n-1})/2$ を用いて，A は

$$Af = \frac{\omega}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, \sqrt{w_n}L_{x_n}\,\mathrm{sinc}_\omega\rangle \frac{1}{\sqrt{w_n}}P\chi_n \tag{8.43}$$

となる．この正規化は $\|1/\sqrt{w_n}P\chi_n\| \le 1$ であるから自然である．こうなると命題 8.3 の仮説を確認することは容易である．したがって，集合 $\{\sqrt{w_n}L_{x_n}\,\mathrm{sinc}_\omega, n\in\mathbb{Z}\}$ と $\{1/(\sqrt{w_n})P\chi_n, n\in\mathbb{Z}\}$ は B_ω に対するフレームであることが分かる．

定理 8.14 $\{x_n, n\in\mathbb{Z}\}$ を $\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(x_{n+1}-x_n) < \pi/\omega$ であるサンプル集合とおく．すると，

(a) 重みフレーム 任意の $f \in B_\omega$ について，

$$\left(1-\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2\|f\|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n|f(x_n)|^2 \le \left(1+\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2\|f\|^2 \tag{8.44}$$

であるから，集合 $\{\sqrt{w_n}(\omega/\pi)L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega, n \in \mathbb{Z}\}$ はフレームである．フレーム限界は，

$$A = \left(1 - \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2, \quad B = \left(1 + \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \tag{8.45}$$

である．

(b) 適応重み法　任意の $f \in B_\omega$ は サンプル $f(x_n)$ から適応フレームアルゴリズム

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\pi^2}{\pi^2 + \delta^2\omega^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n) w_n \frac{\omega}{\pi} L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega := Sf \qquad (8.46) \\ f_{k+1} &= f_k + S(f - f_k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

から再構成できる．ただし，$L^2(\mathbb{R})$ で $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ ，および，

$$\|f - f_k\| \leq \gamma^{k+1}\|f\| \tag{8.47}$$

である．ここで，$\gamma = 2\pi\delta\omega/\pi^2 + \delta^2\omega^2$ である．

証明　**(a)** 不等式 (8.44) の左辺に対して，命題 8.12 を適用すると，

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|A^{-1}Af\|^2 \leq \left(1 - \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{-2} \left\| P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right)\right\|^2 \qquad (8.48) \\ &\leq \left(1 - \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{-2} \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right\|^2 \end{aligned}$$

を得る．χ_n の台は互いに交わらないから，

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x_n)\chi_n\right\|^2 &= \int \left|\sum_n f(x_n)\chi_n(x)\right|^2 dx \\ &= \sum_n \int_{y_{n-1}}^{y_n} |f(x_n)|^2 \chi_n(x) dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x_n)|^2 w_n \end{aligned}$$

を得るので式 (8.44) が導かれる．右辺に対しては，

$$\sum_n |f(x_n)|^2 w_n = \|\sum f(x_n)\chi_n\|^2 \leq \left(\|f\| + \|\sum_n f(x_n)\chi_n - f\|\right)^2 \tag{8.49}$$

および，評価式 (8.39) と (8.40) を用いる．$f(x_n) = \omega/\pi\langle f, L_{x_n}\operatorname{sinc}_\omega\rangle$ より，二番目の主張は自明である．ここで，(b) は命題 8.1，式 (8.9)，(8.10) から，緩和係数

$$\lambda = \frac{2}{A+B} = \frac{1}{1 + \delta^2\omega^2/\pi^2}$$

を用いたときに導かれる．緩和係数は収束速度

$$\gamma = \frac{B-A}{B+A} = \frac{2\pi\delta\omega}{\pi^2 + \delta^2\omega^2} < 1$$

を与える． ∎

双対定理は新しい結果で，大きな衝撃を与えるものである．$f \in B_\omega$ に対して，内積

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{w_n}} P\chi_n \right\rangle = \left\langle Pf, \frac{1}{\sqrt{w_n}} \chi_n \right\rangle = \sqrt{w_n} \frac{1}{w_n} \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(x)dx \tag{8.50}$$

は，区間 $[y_{n-1}, y_n]$ 上の f の平均値の単なる定数倍であるから，集合 $\{1/(\sqrt{w_n})P\chi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が B_ω に対するフレームであるという事実は，いかなるバンドリミテッド関数もその局所平均値から完全に決定されることを意味する．不確定性原理と技術的な限界により瞬間 x_n の f を正確にサンプルすることは不可能であるから，平均値から再構成するというのはサンプリング問題におけるより現実的なアプローチである．この意味で，平均値からの再構成は，サンプリング定理の安定性の一つの究極の形式であり，通常の誤差解析 [Pa], [FG4] への重要な寄与と考えることができる．

正確には次の定理により表される．

定理 8.15 (局所平均値からの再構成) $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を$\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(x_{n+1} - x_n) < \pi/\omega$ を満たすサンプリング数列とし，中間点を $y_n = (x_n + x_{n+1})/2$, $w_n = y_n - y_{n-1}$ とする．φ_n を関数 f に対する局所平均値$\varphi_n = 1/w_n \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(x)dx$ とする．

すると，すべての $f \in B_\omega$ はその平均値 φ_n から一意に決まり，以下のアルゴリズムで再構成できる．

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n w_n \frac{\omega}{\pi} L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega \\ f_{k+1} &= f_k + f_0 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{y_{n-1}}^{y_n} f_k(x)dx \right) \frac{\omega}{\pi} L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega, \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{8.51}$$

とおく．すると，$L^2(\mathbb{R})$ で $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ と

$$\|f - f_k\| \leq \left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{k+1} \|f\|$$

が成り立つ．

証明 最初に式 (8.33) から近似作用素 A の随伴を計算する．$f, g \in B_\omega$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle A^* f, g\rangle &= \langle f, Ag\rangle = \left\langle f, \sum_n g(x_n) P\chi_n \right\rangle \\ &= \sum_n \langle Pf, \chi_n\rangle \frac{\omega}{\pi} \langle L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega, g\rangle \end{aligned}$$

が分かる．または，簡単に，

$$A^*f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{w_n} \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(x)dx \right) \frac{\omega}{\pi} w_n L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega \tag{8.52}$$

と表すこともできる．

この仮定のもとで，命題 8.12 は，すべての $f \in B_\omega$ に対して，$\|f - A^*f\| \le (\delta\omega/\pi)\|f\|$ であることを意味する．方程式 (8.51) は，ちょうど命題 8.1 の反復計算を具体的に与える公式となる．このアルゴリズムの入力は $f_0 = A^*f$ であり，局所的平均値しか必要としないので，これが望ましい再構成法である． ∎

命題 8.3 の後の注意によると，再構成は対応するフレーム作用素

$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{w_n} \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(x)dx \right) P\chi_n \tag{8.53}$$

と適当な緩和係数を用いても行えることになる．

注意 8.16　**1.**　この節の定理は [L] や [DuSc] に比べてもう少し厳密な密度の概念を必要とする．これは定数が陽に与えられることと数値的効率の理論が存在することの代償と思われる．

2.　定理 8.14 の証明はフレーム限界を陽に計算する新しいアイデアを含んでいる．Duffin–Schaeffer の定理 [DuSc] の難しさと比べると，新しい手法を使えば計算がこれほど単純であるべきことに失望しそうである．他方，整関数の理論で扱えないような場合にも，この単純さゆえに本手法の適用が可能となる．この手法のいくつかの変形版は次節で議論する．より高度なサンプリング定理については [G2] を参照のこと．

3.　すべての評価がサンプリング点の分布に独立であることは特筆すべきである．これは，局所的なサンプリング密度が変化するときと，サンプリング点が最短距離で分離していないときに都合がよい．対照的に，[DuSc] の重みなしの場合のフレーム限界はサンプリング集合の不規則さにより敏感であるように思われる．

これは Jaffard のフレーム基準が成り立たないときの例に顕著である．しかし，適応重み法は依然適用できる．$\omega = \pi$ をバンド幅として選び，サンプリング集合が点

$$\{k/2; |k| \le 20\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{j + k/10^n; 10^n \le j < 10^{n+1}, 0 \le k < 10^n\}$$

から成るとする．この集合の最大間隔は 1/2 である．したがって，定理 8.14 はフレーム限界 $A = 1/4$, $B = 9/4$ と収束速度 $\gamma = 4/5$ と共に重みつきフレームを与える．他方，重みなし数列 $L_{x_n} \operatorname{sinc}_\omega$ はフレームではない！

以上から次の定性的な描像が得られる．サンプリング集合に点を追加，言い替えれば，情報を追加することによって，通常のフレーム再構成は悪くなる．直観とは逆に，より多くの情報を使うことによって，フレーム限界の比 B/A は増大し，サンプルからの再構成の収束は遅くなる．他方，適応重み法はフレーム限界が一様であるので影響を受けない．情報の増大はこのアルゴリズムの性能を改善する方向に働く．この影響の数値的実験結果については第 II 部を参照のこと．

4. 定理 8.13と 8.14のアルゴリズムは L^2 ノルムに適用した [FG2], [FG3] のサンプリング定理の非常に特殊な場合である．定量的な解析は [G2] で行なわれた．

定理 8.15の最初の形式は [G2] にも現われている．より高いサンプリング率が必要とされているが，非常に一般的な平均値操作が許されている．

5. 適応重み法はウェーブレット理論でも使われている．不規則なウェーブレットと Gabor フレームの構成法を与え，ウェーブレットと短時間 Fourier 変換に対する不規則なサンプリング定理の証明を可能にした．[G1], 定理 U を参照のこと．

8.5 変形手法の数々

この節では，適応重み法の変形手法をいくつかの紹介する．証明は前節のものと似ているので，要点のみ示し，詳細については原典を参照して欲しい．

8.5.1 不規則なサンプリングの離散モデル

不規則なサンプリング問題が，具体的な応用問題や数値的実装において，これまで議論したような形式では現れることはほどんどない．デジタル信号処理では，信号 s は有限なデータ列 $s(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ から成る．ここで， N は通常大きな値である．信号は部分列 $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_r < N$ でサンプルされているものとする．すると不規則サンプリングの問題は，どんな条件下で，どのようにしてサンプル $s(n_i)$, $i = 1, \dots, r$ から s を完全に再構成できるか，という問題となる．

この問題は $\mathbb{R}$ 上のバンドリミテッド関数のアナロジーとして完全に扱うことができる．このために有限長の信号を周期的に拡張する．すなわち， $s(j + lN) = s(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, $l \in \mathbb{Z}$ とし，s を有限巡回群 $\mathbb{Z}_N$ 上の関数とみなす．$\mathbb{Z}_N$ 上の離散 Fourier 変換を次のように定義する．

$$\hat{s}(k) = N^{-1/2} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-2\pi ikn/N} \tag{8.54}$$

$s \to \hat{s}$ は $l^2(\mathbb{Z}_N) = \mathbb{C}^N$ 上のユニタリ作用素であり，エネルギーノルム $\|s\| = (\sum_{n=0}^{N-1} |s(n)|^2)^{1/2}$ $= \|\hat{s}\|$ を保存する．

s と $\hat{s}$ の周期性と負のインデックスを用いて，バンド幅 $M \leq N/2$ の離散バンドリミテッド信号の空間は次のようになる．

$$\mathcal{B}_M = \{s \in \mathbb{C}^N | \hat{s}(k) = 0,\ |k| > M\}$$

$\mathbb{C}^N$ から $\mathcal{B}_M$ への直交射影は，$(Ps)\hat{}(k) = \hat{s}(k)$, $|k| \leq M$ と $(Ps)\hat{}(k) = 0$, $M < |k| \leq N/2$ で与えられる．Bernstein と Wirtinger の不等式 [KyTTo] の離散版に適切な注意を払うと，前節の定理 8.13–8.15 をすべて不規則サンプリングの離散モデルへ変換することができる．

$[q]$ を $q\ (\in \mathbb{R})$ 以下の最大の整数，$l_i = [(n_i + n_{i+1})/2]$ を サンプル点の中点，$\Delta_i = l_{i+1} - l_i$ を重み係数と表記する．周期性を満たすために， $n_{r+1} = n_1 + N$, $n_0 = n_r - N$, および $l_{r+1} = l_1$ を定義しなければならない．

$\varepsilon_l \in \mathbb{C}^N$ が $\varepsilon_l(l) = 1$, $\varepsilon_l(k) = 0$, $k \neq l$ なる数列ならば， sinc_ω の代わりに，

$$P\varepsilon_l(n) = \frac{\sin(2M+1)\pi(n-l)/N}{N \sin \pi(n-l)/N} \tag{8.55}$$

となる．

さて，ここで適応重み法の離散版の実際上使われる厳密な形を述べることができる．

定理 8.17 ([G3])　$0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_r < N$ を $\mathbb{Z}_N$ の部分集合，$d = \max_{i=1,\ldots,r}(n_{i+1} - n_i)$ とする．もし，

$$2M\left(2\left[\frac{d}{2}\right] + 1\right) < N \tag{8.56}$$

かつ $\lambda > 0$ は十分小さい緩和係数であるとすると，すべての $s \in B_M$ は，サンプル $s(n_i)$, $i = 1, \ldots, r$ から，

$$s_0 = \lambda \sum_{i=1}^{r} s(n_i)\Delta_i P\varepsilon_{n_i} \tag{8.57}$$

$$s_{k+1} = s_k + \lambda \sum_{i=1}^{r} \left(s(n_i) - s_k(n_i)\right) \Delta_i P\varepsilon_{n_i}$$

により，反復計算によって再構成できる．もし，

$$\gamma = \frac{\sin \frac{\pi M}{N}}{\sin \frac{\pi}{4[d/2]-2}}$$

ならば，アルゴリズムは任意の $\lambda, 0 < \lambda < 2/(1+\gamma)^2$ のついて，s に収束する．収束速度は

$$\|s - s_k\| \leq \gamma(\lambda)^{k+1} \|s\| \tag{8.58}$$

となる．ここで，$\gamma(\lambda) = \max\{|1-\lambda(1+\gamma)^2|, |1-\lambda(1-\gamma)^2|\}$ である．

この定理は定理 8.13 と 8.14と同様のステップで証明される．すべての定数は陽に与えられ，バンド幅 M と最大ギャップ長 d のみに依存する．

この定理への批判的な評価に対して二つの面から考える必要がある．

1. 離散バンドリミテッド信号に対する不規則サンプリング問題は有限次元であり，$\hat{s}(k)$, $|k| \le M$ についての線形方程式系

$$N^{-1/2} \sum_{k=-M}^{M} \hat{s}(k) e^{2\pi i n_j k/N} = s(n_j) \quad j = 1, \ldots, r \tag{8.59}$$

を解くことに他ならない．ここで，M と r は共に通常大きな値，典型的には 100–1000 のオーダーなので，この系は過剰決定系である．

大規模線形系の (反復) 解法に関する文献，例えば [HYou]，は非常に多く, そのため，問題は特定の系 (8.59) に対してどの解法を選ぶかということとなる．反復計算 (8.57) は行列の積の形で記述されており，線形系の解に関する **Richardson** の方法として知られている．定理 8.17 の長所は，緩和係数と収束速度の範囲を明示的に与えていることである．線形代数の観点から見ると， Richardson の方法の条件数は小さく，このアルゴリズムが不規則サンプリング問題によく適合していることを証明したことになる．

2. もし，バンドリミテッド信号 $s \in \mathcal{B}_M$ と三角関数の多項式 $p(x) = \sum_{k=-M}^{M} \hat{s}(k) e^{2\pi i k x}$ を同一視するならば，$s(n_i) = p(n_i/N)$ となり，離散問題は簡単に解けるようにみえる．多項式 p は M のオーダーであり，任意の $2M+1$ 個の値から一意に決まる．よく知られた Lagrange 補間公式は $p(n_i/N)$ から p の明示的な再構成を与える．しかしながら，Lagrange 補間はかなり悪条件になりがちであり，高次の Lagrange 多項式を使うのは負担である．この意味で定理 8.17 は実用的かつ計算可能な解を，誤差の評価と良い条件数付きで与える．

不規則サンプリングの離散定理のより詳しい情報については [G4] を参照のこと．

8.5.2 高次元の不規則サンプリング

1 次元の不規則サンプリングは理論的にも数値計算的にもよく発展している．これに対し，高次元については一貫性のある明解な理論は緒についたにすぎない．この分野は現在活発に研究が行なわれており，難しくまた面白い問題を数多く提供している．

最初に，簡単でよく知られているが，1 次元の理論の簡単な拡張でよく知られているものの, 多分印刷にはなっていないと思われるものをいくつか紹介する．記法を簡単にするために，2 次元に限定する．

与えられたコンパクト集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，

$$B_\Omega(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \Omega\}$$

を，スペクトルが Ω にあり有限のエネルギーを持つバンドリミテッド関数 f の部分空間とする．

もし，Ω が長方形 $\Omega = [-\omega_1, \omega_1] \times [-\omega_2, \omega_2]$ ならば，B_Ω は対応する $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間のテンソル積

$$B_\Omega(\mathbb{R}^2) = B_{\omega_1} \hat{\otimes} B_{\omega_2} \tag{8.60}$$

となる．これは $B_\Omega(\mathbb{R}^2)$ が $f \in B_{\omega_1}$, $g \in B_{\omega_2}$ の全積 $f(x)g(y)$ により生成される $L^2(\mathbb{R}^2)$ の閉部分空間となることを意味する．

次の抽象的な補題により 1 次元の結果を高次元に拡張する．

補題 8.18　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ とおき，$\{e_m, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}_1$ のフレーム (Riesz 基底)，$\{f_n, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{H}_2$ を $\mathcal{H}_2$ のフレーム (Riesz 基底) とする．このとき，集合 $\{e_m \otimes f_n, m, n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のフレーム (Riesz 基底) となる．

証明　S_i を $\mathcal{H}_i$ のフレーム作用素，すなわち，$S_1 g = \sum_m \langle g, e_m \rangle e_m$, $S_2 h = \sum_n \langle h, f_n \rangle f_n$ とおき，S を $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ のフレーム作用素とおく．S を $g \otimes h \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に作用させると，

$$\begin{aligned}
S(g \otimes h) &= \sum_m \sum_n \langle g \otimes h, e_m \otimes f_n \rangle e_m \otimes f_n \\
&= \sum_m \sum_n \langle g, e_m \rangle \langle h, f_n \rangle e_m \otimes f_n \\
&= \left(\sum_m \langle g, e_m \rangle e_m \right) \otimes \left(\sum_n \langle h, f_n \rangle f_n \right) = S_1 g \otimes S_2 h
\end{aligned}$$

を得る．

言い替えれば，$S = S_1 \otimes S_2$ であり，そのスペクトルは S_1 と S_2 のスペクトルの積となる．特に，S が可逆のとき，$e_m \otimes f_n$ はフレームである．A_i, B_i がそれぞれ $\{e_m\}$ と $\{f_n\}$ のフレーム限界ならば，そのフレーム限界は $A_1 A_2$ と $B_1 B_2$ である．

Riesz 基底の場合も同様に扱われる．　∎

定理 8.19　$\Omega = [-\omega_1, \omega_1] \times [-\omega_2, \omega_2]$，サンプリング集合を $(x_m, y_n), m, n \in \mathbb{Z}$ で表す．任意の $f \in B_\Omega$ は，以下のいずれの条件の下でも安定な方法で一意に決まる．

(a) Paley–Wiener: すべての $m, n \in \mathbb{Z}$ について，

$$\left| x_m - \frac{\pi m}{\omega_1} \right| \leq L_1 < \frac{\pi}{4\omega_1}$$

$$\left|y_n - \frac{\pi n}{\omega_2}\right| \leq L_2 < \frac{\pi}{4\omega_2}$$

(b) Duffin–Schaeffer: ある定数 $\alpha > 0$, $L_i > 0$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ について，

$$|x_m - x_n| \geq \alpha > 0, \quad |y_m - y_n| \geq \alpha > 0 \ m \neq n$$

$$\left|x_m - \frac{\gamma_1 m\pi}{\omega_1}\right| \leq L_1 < \infty, \left|y_n - \gamma_2 \frac{\pi n}{\omega_2}\right| \leq L_2 < \infty$$

(c) 適応重み法: 両数列が増加し，

$$\delta_1 = \sup_{m\in\mathbb{Z}} (x_{m+1} - x_m) < \frac{\pi}{\omega_1}, \delta_2 = \sup_{n\in\mathbb{Z}} (y_{n+1} - y_n) < \frac{\pi}{\omega_2}$$

第一の場合，集合

$$\left\{\frac{\sin\omega_1(x - x_m)}{\pi(x - x_m)} \cdot \frac{\sin\omega_2(y - y_n)}{\pi(y - y_n)}, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$$

は B_Ω の Riesz 基底である．第二の場合はフレームである．第三の場合は，重み係数 $1/4(x_{m+1} - x_{m-1})(y_{n+1} - y_{n-1})$ を乗じたものがフレームである．このフレーム限界は，

$$A = \left(1 - \frac{\delta_1\omega_1}{\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{\delta_2\omega_2}{\pi}\right)^2$$

と

$$B = \left(1 + \frac{\delta_1\omega_1}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{\delta_2\omega_2}{\pi}\right)^2$$

である．

この証明は一次元の定理と補題 8.18 から導かれる．

Paley–Wiener–Levinson の定理 ((a) の場合) は， $\{(x_{mn}, y_n), m, n \in \mathbb{Z}\}$ の形式のサンプル集合に拡張されている [BuHin]．

定理 8.13–8.15の再構成アルゴリズムのあるバージョンは，最近接点との最大距離が十分小さいならばという条件のもとで，任意のスペクトル Ω と任意のサンプル集合 $\{\boldsymbol{x}_n, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して収束することが示されている [FG2], [FG3]．2 次元 POCS 法は [SAl] に提案されている．

まとめると，2 次元の不規則なサンプリングで既に知られている再構成法は，その定性的にしか言えない性質にも関わらず，サンプル集合の非常に厳密な積構造を要求するか，または，使われるアルゴリズムがなんらかの意味での収束を強く保証することを要求している．

次の定理は $\mathbb{R}^2$ 上の定量的なサンプリング定理の最初のステップとして適当であろう．その証明は定理 8.13 の証明に似ており，[G2] にある．

次の定理のために，サンプル集合 $\{\boldsymbol{x}_i, i \in I\}$ の密度を, $\mathbb{R}^2$ を覆うのに必要な $\boldsymbol{x}_i$ を中心とす

る長方形の大きさで測る．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$ について，$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta})$ が次の長方形を表すものとする．

$$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta}) = \left[x_1 - \frac{\delta_1}{2}, x_1 + \frac{\delta_1}{2}\right] \times \left[x_2 - \frac{\delta_2}{2}, x_2 + \frac{\delta_2}{2}\right]$$

集合 $\{\boldsymbol{x}_i, i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ が，

$$\bigcup_{i \in I} R(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\delta}) = \mathbb{R}^2$$

であるとき，$\boldsymbol{\delta}$-稠密であると呼ぶ．

$\boldsymbol{\delta}$-稠密集合 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ に対して，$0 \leq \Psi_i \leq 1$, $\operatorname{supp} \Psi_i \subseteq R(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\delta})$, $\sum_i \Psi_i \equiv 1$ なる性質を持つ 1 の分解 $\{\Psi_i\}$ を選ぶ．また，P_Ω は $L^2(\mathbb{R}^2) \to B_\Omega$ なる直交射影である．

定理 8.20　$\Omega = [-\omega_1, \omega_1] \times [-\omega_2, \omega_2]$，$\{\boldsymbol{x}_i, i \in I\}$ は

$$\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2 < \ln 2 \tag{8.61}$$

を満たす $\mathbb{R}^2$ の任意の $\boldsymbol{\delta}$-稠密部分集合とする．すべての $f \in B_\Omega(\mathbb{R}^2)$ はサンプル $f(\boldsymbol{x}_i), i \in I$ から一意に決まる．そして，反復計算

$$f_0 = P_\Omega\left(\sum_{i \in I} f(\boldsymbol{x}_i)\Psi_i\right) \tag{8.62}$$

$$f_{k+1} = f_k + P_\Omega\left(\sum_{i \in I}(f(\boldsymbol{x}_i) - f_k(\boldsymbol{x}_i))\Psi_i\right), \quad k \geq 0$$

により再構成できる．そして，$L^2(\mathbb{R}^2)$ で $f = \lim_{k \to \infty} f_k$ かつ

$$\|f - f_k\| \leq \left(e^{\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2} - 1\right)^{k+1} \|f\| \tag{8.63}$$

である．

この定理の証明は，作用素 $Af = P_\Omega(\sum_{i \in I} f(\boldsymbol{x}_i)\Psi_i)$ がすべての $f \in B_\Omega$ について，

$$\|Af - f\| \leq (e^{\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2} - 1)\|f\| \tag{8.64}$$

を満たすことより得る [G2]．1 の分解が $V_i \subseteq R(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\delta})$ なる特性関数 $\Psi_i = \chi_{V_i}$ から構成されるならば，定理 8.20より **2 次元適応重み法**を得る．

系 8.21　$w_i = \int \chi_{V_i}(x)\, dx$ とする．任意の $f \in B_\Omega$ は

$$\left(2 - e^{\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2}\right)^2 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} w_i |f(\boldsymbol{x}_i)|^2 \leq e^{2\delta_1 \omega_1 + 2\delta_2 \omega_2} \|f\|^2 \tag{8.65}$$

を満たす．

注意 8.22 **1.** 対応する再構成アルゴリズムは，定理 8.14(b) と記法の細かい違いがあるだけである．この定式化は読者への宿題とする．

2. 評価 (8.64) を受け入れると，上の系は定理 8.14 とまったく同様に証明される．

この系は理論的に興味深い．なぜなら， Duffin と Schaeffer の定理の高次元への最初の正真正銘の拡張であるからである．第 II 部の効率的な実装のための基礎となるので，実用的にも興味深い．

8.5.3 不確定性原理と欠落区間の復元

[DoSt] で，D. Donoho and P. Stark は次の形式の不確定性原理を検討した．もし，$f \in L^2(\mathbb{R})$ が可測集合 $T \subseteq \mathbb{R}$ 上に本質的に集約されており，$\hat{f}$ が可測集合 W 上に本質的に集約 (essentially concentrate) されているならば，

$$|T||W| \geq 2\pi - \delta$$

である．ここで， $|T|$ は T の Lebesgue 測度であり，$\delta > 0$ は十分小さく「本質的に集約されている」という用語の正確な定義に依存する．

彼らは応用のひとつを次のように動機づけた．「不確定性原理は, あることが不可能なことを示すのにしばしば利用されてきた．… 我々は一般化された不確定性原理が, ある予期しないことが可能なことを示す例を述べる．特に，信号や画像に多数の欠値が存在する時の復元について．」[DoSt], 912 頁．これが次の定理の内容である．

定理 8.23 ([DoSt]) W と $T \subseteq \mathbb{R}$ を $|W||T| < 2\pi$ なる可測集合とする．$\mathrm{supp}\,\hat{f} \subseteq W$，$f$ は T の補集合上で既知とする．このとき，f は一意に決まり，$f \cdot (1-\chi_T)$ から次のアルゴリズムにより安定な方法で再構成できる．

$$\begin{aligned} f_0 &= (1-\chi_T)f \\ f_{k+1} &= (1-\chi_T)f + \chi_T P_W f_k, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

そして，$L^2(\mathbb{R})$ で，

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k$$

ここで， $L^2(\mathbb{R})$ から $\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}\,\hat{f} \subseteq W\}$ への射影 P_W は直交射影である．

この定理のポイントは，スペクトルが任意の可測集合としてよいことである．

もし，スペクトル W が $W=[-\omega,\omega]$ という区間であるか，またはその区間に含まれるならば，Donoco と Stark の定理はそれほど驚くには値しない．$f \in B_\omega$ に関する情報は，測度 $|T| < 2\pi/|W| = \pi/\omega$ の部分集合 T 上のみで失われているに過ぎない．もし，T が $|T| \le \sum_l |I_l| < \pi/\omega$ なる互いに交わらない区間 I_l で覆われるならば，失われた情報の隙間はせいぜい長さ $|I_l| \le |T| < \pi/\omega$ である．したがって，すべての n について $x_{n+1}-x_n \le |T| < \pi/\omega$，かつ，$x_n \notin T$ となるような f の離散的サンプル集合 $f(x_n)$ を選ぶことができる．いまや，定理 8.13と 8.14は f の完全な再構成を与える．この議論では T の大きさはまったく無関係である．関係するのは f に関する情報の隙間である．したがって，少なくとも $W=[-\omega,\omega]$ の場合,「無限に良く」することができる．欠けた区間 T は測度が無限であってもよく，あるいは測度 0 の集合の補集合であってさえよい．

定理 8.13や 8.14を適用するには，情報をさらに捨てて，離散集合上の f のサンプルだけを残さなければならない．ほとんどの応用において，与えられた f の情報をいくらかでも捨てることは不合理である．以下に，すべての情報 $f(1-\chi_T)$ を利用するためのアルゴリズムの修正を与える．

Lebesgue 測度は正則なので，任意の $\varepsilon > 0$ について，高々可算個の開区間の和によって T を覆うことができる．すなわち，$\xi_n < \eta_n \le \xi_{n+1}$ と $|\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\xi_n,\eta_n)\setminus T| < \varepsilon$ を満たすような開区間 $(\xi_n,\eta_n), n \in \mathbb{Z}$ が存在する．

B_ω で f の近似値を得るために，f のギャップを線形補間し，B_ω に射影する．すなわち，

$$If(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin T \\ f(\xi_n) + \frac{f(\eta_n)-f(\xi_n)}{\eta_n-\xi_n}(x-\xi_n) & x \in (\xi_n,\eta_n) \end{cases} \tag{8.66}$$

$$A_1 f = PIf \tag{8.67}$$

と定義する．最後に，Wirtinger の不等式の別のバージョンが必要である [KyTTo]．

補題 8.24　もし，$f(a)=f(b)=0$ かつ $f,f' \in L^2(a,b)$ ならば，

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^4 \int_a^b |f''(x)|^2 dx \tag{8.68}$$

が成り立つ．

次の定理は定理 8.23の著しい改良を含み，$f(1-\chi_T)$ の情報のすべてを利用する．

定理 8.25　$T \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\xi_n,\eta_n)$ かつ

$$\delta := \sup_{n\in\mathbb{Z}}(\eta_n-\xi_n) < \frac{\pi}{\omega} \tag{8.69}$$

とする．

すると，$f \in B_\omega$ は $f(1-\chi_T)$ から一意に決まり，

$$\begin{aligned} f_0 &= A_1 f \\ f_{k+1} &= f_k + A_1(f - f_k), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

で再構成できる．また，$f = \lim_{k\to\infty} f_k$ となり，誤差評価

$$\|f - f_k\| \leq \left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{2(k+1)} \|f\|$$

を満たす．

証明 $\|f - A_1 f\| \leq (\delta\omega/\pi)^2 \|f\|$ を示し，命題 8.1 を適用する．$f \in B_\omega$ に関して，式 (8.39) と同じ議論により

$$\begin{aligned} \|f - A_1 f\|^2 &= \|P(f - If)\|^2 \leq \|f - If\|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\xi_n}^{\eta_n} \left|f(x) - f(\xi_n) - \frac{f(\eta_n) - f(\xi_n)}{\eta_n - \xi_n}(x - \xi_n)\right|^2 dx \end{aligned}$$

が得られる．被積分関数が両端 ξ_n と η_n で消えるので，補題 8.24は

$$\begin{aligned} \|f - A_1 f\|^2 &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\eta_n - \xi_n}{\pi}\right)^4 \int_{\xi_n}^{\eta_n} |f''(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^4 \|f''\|^2 \leq \left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^4 \|f\|^2 \end{aligned}$$

を意味する．最後の二つの不等式の中で，式 (8.69) の仮定と Bernstein の不等式を利用した．

∎

この定理を特にサンプル集合 $\mathbb{R}\backslash T = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ の場合について述べた次の系は，[G2] で既に得られている．この系は再構成アルゴリズムの収束速度を改善する．

系 8.26 $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を $\delta := \sup(x_{n+1} - x_n) < \pi/\omega$ なるサンプル集合とする．すべての $f \in B_\omega$ はサンプル $f(x_n)$ から反復計算 $f_0 = A_1 f$, $f_{k+1} = f_k + A_1(f - f_k)$, $k \geq 0$ により再構成できる．$f = \lim_{k\to\infty} f_k$ が成り立ち，誤差評価

$$\|f - f_k\| \leq \left(\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^{2(k+1)} \|f\|$$

を得る．ここで，$A_1 f = PIf$，すべての $x \in [x_n, x_{n+1}]$ に対し，

$$If(x) = f(x_n) + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)$$

である．

8.6　ウェーブレットと短時間 Fourier 変換による不規則サンプリング

この節では，ウェーブレットフレームの構成法についてのよく知られた I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer の成果 [DGrMe][D] をいかにして不規則ウェーブレットフレームの構成に拡張するかを議論する．

$g \in L^2(\mathbb{R})$ を固定された関数（「ウェーブレット」）とする．$\mathbb{R}$ 上の関数 f の連続ウェーブレット変換は

$$W_g f(x,s) = \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}} \bar{g}\left(\frac{t-x}{s}\right) f(t)dt,\ x,s \in \mathbb{R}, s>0 \tag{8.70}$$

と定義される．また，関数 f の短時間 Fourier 変換 $S_g f$ は

$$S_g f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt}\bar{g}(t-x)f(t)dt,\ x,y \in \mathbb{R} \tag{8.71}$$

である．与えられた g に対して，関数 f は $W_g f$ と $S_g f$ から一意に決まり，逆変換公式により陽に復元できる．しかしながら，これらの変換の一方による f の表現は過剰であり，サンプリングにより過剰性を削減しよう．

規則的なサンプリングの場合は I. Daubechies の成果を通じてよく理解されている [D]. Daubechies は任意の f が $W_g f(\alpha\beta^j k, \beta^j)$, $j,k \in \mathbb{Z}$ または $S_g f(\alpha j, \beta k)$ から安定な方法で再構成可能な，密度 (α,β) 上のほぼ最適な評価を発見した．

不規則サンプリングに関しては，定性的な結果が知られているだけである．$W_g f$ と $S_g f$ は平面内の「十分稠密な」集合上のサンプルから完全に決まる $[FrJa],[G1]$.

以下では，バンドリミテッドウェーブレット $g \in B_\omega$ と (x_{jk}, s_j), $j,k \in \mathbb{Z}$ の形式のサンプリング集合を考える．ここで，$\lim_{k\to\pm\infty} x_{jk} = \pm\infty$，$\lim_{j\to\pm\infty} \ln s_j = \pm\infty$，すべての数列 $\{x_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$ と $\{s_j\}$ が増加するという通常の仮定をおく．これはウェーブレット変換をスケールパラメータ s の中で各スケール s_j において点 x_{jk} で，不規則にサンプリングすることである．

定理 8.27 ([G3])　ある（小さな）$\varepsilon > 0$ について，$g \in B_\omega \cap L^1(\mathbb{R})$，$\hat{g}(\xi) = 0$，$|\xi| < \varepsilon < \omega$ とおく．二つの定数 $a,b>0$ について，数列 $\{s_j, j \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^+$ が，ほとんどすべての ξ に対して，

$$a \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(s_j\xi)|^2 \le b \tag{8.72}$$

を満たすとする．$\{x_{jk}, j,k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ が

$$\delta := \sup_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{x_{jk+1} - x_{jk}}{s_j} < \frac{\pi}{\omega} \tag{8.73}$$

を満たす二重数列とする．すると，すべての $f \in L^2(\mathbb{R})$ について，

$$a\left(1-\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \|f\|^2 \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}\left(x_{j,k+1}-x_{j,k-1}\right)\left|W_g f(x_{jk}, s_j)\right|^2 \leq b\left(1+\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \|f\|^2 \tag{8.74}$$

が成り立つ．

式 (8.74) の再定式化　関数の集合，

$$\left\{\frac{1}{s_j} g\left(\frac{x-x_{jk}}{s_j}\right), j, k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{8.75}$$

は $L^2(\mathbb{R})$ のフレームであり，フレーム限界

$$A = a\left(1-\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \quad \text{および} \quad B = b\left(1+\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \tag{8.76}$$

を持つ．不規則サンプリング $W_g g$ から f の再構成は以下のように陽に行なうことができる．

$$\lambda = \frac{2}{A+B} \quad \text{および} \quad \gamma = \frac{B-A}{B+A} = \frac{b(\pi+\delta\omega)^2 - a(\pi-\delta\omega)^2}{b(\pi+\delta\omega)^2 + a(\pi-\delta\omega)^2}$$

S をウェーブレットフレーム作用素

$$Sf(x) = \lambda \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}(x_{j,k+1}-x_{j,k-1}) W_g f(x_{jk}, s_j) \frac{1}{s_j} g\left(\frac{x-x_{jk}}{s_j}\right) \tag{8.77}$$

とする．数列 f_k，

$$f_0 = Sf, \quad f_{k+1} = f_k + S(f-f_k), \quad k \geq 0 \tag{8.78}$$

は $L^2(\mathbb{R})$ で f に収束し，

$$\|f - f_k\| \leq \gamma^{k+1}\|f\|$$

が成り立つ．双対性から，すべての $f \in L^2(\mathbb{R})$ は

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{jk} \frac{1}{2}(x_{j,k+1}-x_{j,k-1}) \frac{1}{s_j} g\left(\frac{x-x_{jk}}{s_j}\right) \tag{8.79}$$

の形式のウェーブレット展開を持ち，その係数は

$$\left[b\left(1+\frac{\delta\omega}{\pi}\right)\right]^{-2} \|f\|^2 \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |c_{jk}|^2 \leq \left[a\left(1-\frac{\delta\omega}{\pi}\right)\right]^{-2} \|f\|^2$$

を満たす．

注意 8.28　**1.**　ウェーブレット g の条件は [DGrMe] の条件と同一であり，式 (8.72) は規

則的なサンプリングについて良く知られた条件の言い替えに過ぎない．

2. 式 (8.72) の左辺は，すべての j について，$s_{j+1}/s_j \le \omega/\varepsilon$ を意味する．反対に $\operatorname{supp}\hat{g}$ の伸縮は $\mathbb{R}$ を覆わず，式 (8.72) は成り立たない．式 (8.72) の右辺は，すべての j について，$s_{j+1}/s_j \ge \alpha > 0$ であることを必要とする．

s_j が分離しているという条件は，スケーリングパラメータ s について適切な重み係数が使われているならば必要ない ([G3])．

3. g はバンドリミテッドなので，$W_g f$ の周波数分解能は可能な限りで最高である．同様によい空間分解能を得るためには，ウェーブレット g は急速に減衰しなければならない．これは $g \in B_\omega$, $\hat{g} \in \mathcal{C}^\infty$ なる g の選択により達成される．

4. 明示的なフレーム限界を持たない類似の理論は Benedetto と Heller の文献で得られている [BHe]．

5. デコンボリューションを使った別の再構成法が [G3] にある．

証明(定理 8.27)　8.2 節と定理 8.14に照らしてみれば，証明は定理を定式化する作業よりかなり簡単である．

まず固定スケール $s > 0$ について見てみる．

$$W_g f(x,s) = \int f(t)\frac{1}{s}\bar{g}\left(-\frac{x-t}{s}\right)dt = f * g_s^{\sim}(x) \tag{8.80}$$

ここで， $g^{\sim}(t) = \overline{g(-t)}$，$g_s(t) = 1/s g(t/s)$．$f * g_s^{\sim}$ の Fourier 変換をとって，

$$\operatorname{supp}(f * g_s^{\sim})^{\wedge} = \operatorname{supp}\hat{f} g_s^{\sim\vee} = \operatorname{supp}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(s\xi)} \subseteq \left[-\frac{\omega}{s}, \frac{\omega}{s}\right]$$

を得る．したがって，各スケール $s > 0$ において， $W_g f(\cdot, s)$ はバンド幅 ω/s のバンドリミテッド関数である．

Step 1: $W_g f(x_{jk}, s_j)$ から $W_g f(x, s_j)$ の再構成．$W_g(\cdot, s_j) = f * g_{s_j}^{\sim} \in B_{\omega/s_j}$ と各 $j \in \mathbb{Z}$ について $\sup_{k\in\mathbb{Z}}(x_{j,k+1} - x_{j,k}) \le s_j\delta$ および $(s_j\delta)\cdot(\omega/s_j) = \delta\omega$ の仮定から，定理 8.14の式 (8.44) より，各 j について，

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \left\|f * g_{s_j}^{\sim}\right\|^2 &\le \sum_k \frac{1}{2}(x_{j,k+1} - x_{j,k-1})\,|W_g f(x_{jk}, s_j)|^2 \\ &\le \left(1+\frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \left\|f * g_{s_j}^{\sim}\right\|^2\end{aligned} \tag{8.81}$$

が成り立つ．

Step 2: $W_g f(\cdot, s_j)$ から $W_g f$ の再構成．このために， Plancherel の定理 (8.15) を使い，$\|f * g_{s_j}^{\sim}\|^2 = 1/2\pi\|\hat{f}\widehat{g_{s_j}^{\wedge}}\|^2 = 1/2\pi\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{g}(s_j\xi)|^2 d\xi$ と書く．ここで，jについて総和をとる

と，式 (8.72) より，

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f * g_{s_j}^{\sim}\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(s_j\xi)|^2\right) d\xi \\ &\leq b\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|^2 = b\|f\|^2 \quad \text{かつ} \quad \geq a\|f\|^2\end{aligned}$$

を得る．

これと式 (8.81) と組み合わせ，定理を証明する．$W_g f(x,s)$ は f と関数 $s^{-1}g(t-x/s)$ の内積であるから，自明である．

∎

短時間 Fourier 変換についても同様の議論が以下のようになされる．

定理 8.29　$g \in B_\omega \cap L^1(\mathbb{R})$，および，二つの定数 $a, b > 0$ について，数列 $\{y_j, j \in \mathbb{Z}\}$ が

$$0 < a \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi - y_j)|^2 \leq b \tag{8.82}$$

を満たすとする．$\{x_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ が

$$\delta := \sup_{j,k}(x_{j,k+1} - x_{j,k}) < \frac{\pi}{\omega}$$

を満たす二重数列ならば，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ について，

$$\begin{aligned}a\left(1 - \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \|f\|^2 &\leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}(x_{j,k+1} - x_{j,k-1})|S_g f(x_{j,k}, y_j)|^2 \\ &\leq b\left(1 + \frac{\delta\omega}{\pi}\right)^2 \|f\|^2\end{aligned} \tag{8.83}$$

が成り立つ．

したがって，集合 $\{e^{iy_j t} g(t - x_{j,k}), j, k \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(\mathbb{R})$ のフレームであり，そのフレーム限界は $A = a(1 - \delta\omega/\pi)^2$ と $B = b(1 + \delta\omega/\pi)^2$ である．

定理 8.29の証明はウェーブレットの証明とほぼ同一であり，必要な修正は読者への宿題とする．

式 (8.83) がコンパクトサポートウェーブレット g を使って，短時間 Fourier 変換に対するサンプリング定理を暗黙のうちに含むことに注意すべきである．これは対称関係

$$2\pi S_g f(x,y) = e^{-ixy} S_{\hat{g}} \hat{f}(y, -x)$$

から導かれる．特に，集合 $\{(1/2)(x_{j,k+1} - x_{j,k-1})e^{ix_{j,k}t}\hat{g}(t - y_j), j, k \in \mathbb{Z}\}$ は コンパクトサポートウェーブレット $\hat{g}$ に基づく $L^2(\mathbb{R})$ のフレームとなっている．

II　不規則サンプリングの実際

第II部の目的は，第I部で一般的に説明したものの一部について数値的な根拠を与えることにある．特に，妥当な収束速度が保証されていることや計算が複雑でないことなどのいくつかの長所により，適応重み法 (ADPW 法) が優れた手法であることを示したい．さらに，理論から示されることではないが，様々な手法の有用性を判断する場合に考慮すべき付加的な特長があるという証拠も与える．これらの所見は統計的特徴にむしろ関係があり，従って (現状では) 最大計算量の評価に関する理論的結果とは直接関係ない．

8.7　数値計算のための準備

議論を1次元信号に限定して，離散 Fourier 変換によって得られる既知のスペクトルを持つ合成信号を考える．つまり，目的に応じて，オーダー n の巡回群の関数 (既存の FFT(高速 Fourier 変換) を利用するために通常は $n = 512$ など2のべき乗を使う)，あるいは三角関数の多項式を扱う．前者では，スペクトル (非ゼロの Fourier 係数から成る座標集合) が既知で，全信号長に比べて小さいことを仮定している．この仮定は後者の場合，三角関数の多項式を構成する周波数が，周波数領域で適切な格子の有限集合を形成することに対応する．実際には，ランダムな振幅を持つアドミッシブル周波数の重ね合わせとして信号を定義する．不規則サンプリング問題は，十分に多くのサンプリング値から信号を復元する構成的で効率の良い手法に関する問題であると我々は考える．連続するサンプル間の最大ギャップが Nyquist 距離を越えない場合，すなわち最大ギャップの大きさが Shannon の理論に従う規則的サンプリング集合に対して許容範囲である場合，いくつかの反復手法が幾何的速度で収束することは理論的に保証されている．

実験の基本部分を含む MATLAB コードにコメントを付けたものを以下に示す．このコードは，サンプリングした座標から既知スペクトルを持つランダムな信号を生成し，それを解析するために ADPW 法を適用する．長さ`n`のフィルタ配列 (スペクトル `yp` の部分は1で，それ以外は0の値を持つ) と，サンプリング位置を表現する $1, \ldots, n$ の整数数列の部分数列 `xp` は事前に与えられている．変数 `iter` は反復回数である．

```
% APDW.M H.G. Feichtinger, 9/91, 適応重み法
n = length(filt);                    % n = 信号長
yp = (filt == 1);                    % yp = スペクトル
sp = length(yp);                     % sp = スペクトルの次元
y = randc(1,n)                       % 複雑なランダムスペクトルを生成
y = y.*filt;                         % 高周波数の部分をゼロにする
```

```
x = ifft(y);x = x/norm(x);          % 正規化信号を生成する
xs = x(xp);                         % サンプリング値を決める
lxp = length(xp);                   % lxp: サンプリング点の数
xp1 = [xp(2:lxp),n+xp(1)]; xp2 = [(xp(lxp)-n), xp(1:(lxp-1))];
w = 0.5*(xp1-xp2);                  % 「適応」重みを計算する
xa = zeros(x); xd = zeros(x);       % 初期化
for j = 1 : iter                    % 繰り返し
 xd(xp) = (xs-xa(xp)).*w;           % 補助信号を生成する
 xa = xa+ifft((filt.*fft(xd)));     % 補助信号をフィルタリングする
end;
```

図 8.1には，典型的な信号 (実部と虚部) と，再構成プロセスが開始されるデータであるサンプリング値と座標 (x 印) を示した．スペクトル値 (ゼロでない DFT 係数) の数は 51，信号長は 512 である．サンプリング点は全部で 93 個あり，サンプリング集合の中には長さ 10(このスペクトルの Nyquist 係数くらい) のギャップが三つある．

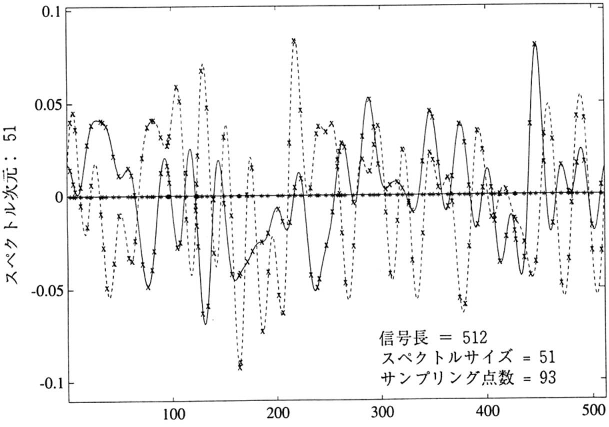


図 8.1　典型的な信号とサンプリング集合

図 8.2には，対応する “sinc” 関数，すなわちフィルタ関数から IFFT を用いて得られる信号を示す．これは，古典的 (基本的) な sinc 関数の離散形である．これは，適切なスペクトルを持つ任意のバンド幅の信号を，たたみこみによって再生できるという性質を持っている．

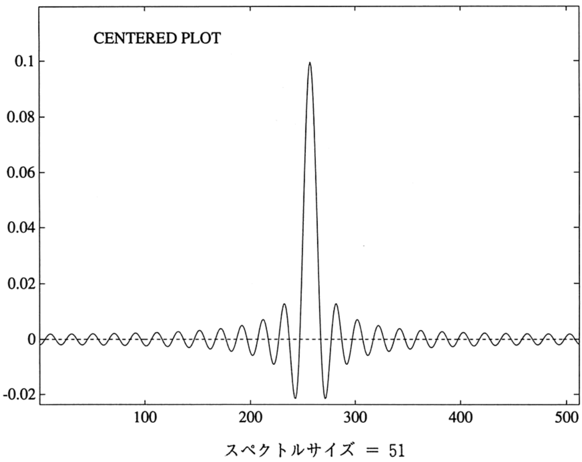


図 **8.2** 対称な sinc 関数

8.8 ハードウェア/ソフトウェア環境 PC386/486, Sun, IRSATOL/ MATLAB

Feichtinger の指導の下に Vienna 大学の数学者たちによって行なわれた，以下で説明する数値実験の実際の装置について簡単に説明する†．長期間，もっとも組織的な貢献をしてくれたのは Thomas Strohmer であった．彼の絶えざる従事と協力がなければ，このパッケージは現在の姿をなしていなかったであろう．さらに，彼が B. van Thannen の技術援助の下に図を描いてくれたことにも感謝を捧げたい．B. van Thannen は Sun ワークステーションの適切な環境の構築にも尽力してくれた．独自の *M*-ファイルのコレクションを設計した H. Steier にも感謝する。

実験のための基本ツールには MATLAB を選んだ． MathWorks 社によって広く普及している数値解析ソフトウェアパッケージであり，様々なプラットフォームで動作することがその理由である．実験の多くは PC386 と PC486 で行ない，いくつかは Sun ワークステーション上で行なった (以下で示す計時は 33 MHz PC486 で計測した)．基本的な *M*-ファイル (すなわち，関数や補助ユーティリティ，スクリプトファイルといった，コマンド列を含んだプログラムモジュール) のコレクションに数百個の *M*-ファイルを追加拡張し，プログラムパッケージ IRSATOL(不

†C. Cenker, M. Herrmann, M. Mayer, F. Stettinger の各氏がこのプロジェクトに協力してくれた同僚である．

規則サンプリングツールボックス: IRregular SAmpling TOoLbox) を作り出した．このパッケージの一般的な特徴や，プロジェクト管理者やプログラマの観点からの詳細報告は，レポート [FStr] に示した．

他の MATLAB ユーザの興味をひきそうな M-ファイルのいくつかは，期間を限定してインターネットアドレス TYCHE.MAT.UNIVIE.AC.AT(= 131.130.22.36) から anonymous ftp が可能である．これらの M-ファイルを利用/改良したい人は，FEI@TYCHE.MAT.UNIVIE.AC.AT まで連絡をいただきたい．より詳細な情報も同じアドレスから提供される．

8.9 数値実験結果と得られた知見

8.9.1 種々の手法の比較 (反復回数や計算時間の観点からみた手法の効率性)

本稿では，主に以下の五つの手法を比較する．

1. Wiley/Marvasti 法．または (通常の/重み付けのない) フレーム法．WIL/MAR 法と略記する．これは，移動した sinc 関数の集まりがフレームを形成するという事実に基づいている (定理 8.6 参照)．
2. VOR(onoi) 法．これは定理 8.13 に示したように，任意のサンプリング点の最近傍において一定であるステップ関数を必要とし，近似ステップにおいて sinc 関数との畳み込みが行なわれる．
3. PLN(区分的線形) 法．与えられたサンプリング値から得られる区分的線形補間を利用し，近似作用素 A のために低域通過フィルタを用いる (系 8.26 参照)．
4. (単一ステップ)POCS 法．8.3.3 節で示したように，あらゆるステップで与えられる近似信号 **xa** は，検討中のサンプリング点における近似信号のサンプリング値を修正するために，移動した sinc 関数を加算することによって更新される．
5. ADPW 法．我々が発見した，今後主流になる手法である (定理 8.14, 8.19 参照)．この手法は，関連する近似作用素の古い表記法に従って “dps” とも呼ばれる．

これらの手法はさまざまな機会で議論がされており，少なくとも VOR 法と ADPW 法に関しては，最大ギャップが Nyquist 係数を越えない場合の収束速度の保証に関する証明が知られている (詳細は [CFHer], [CFStei], [G2], [FGHer] 参照)．

図 8.3は，図 8.1 の信号に対する収束挙動を示している．図では，縦軸に誤差の ℓ^2 ノルムの自然対数，横軸に反復回数 (この例では各手法に対して 32 回行なった) が示してある．縦軸の -35 はおおよそ誤差 10^{-16}に対応し，これは MATLAB の計算機精度のオーダーであることに注意して欲しい．各手法は効率が良い順にならべてある．つまりこの例では，区分的線形法

(“pln” と書かれている) が，反復回数という点で ADPW 法 (“dps” と書かれている) よりも少しだけ効率が良い．実際にはこの形式の効率という点でも，平均値では ADPW の方が良い結果を出すことがわかったのだが (後で述べる)，あえてこの例を示した．

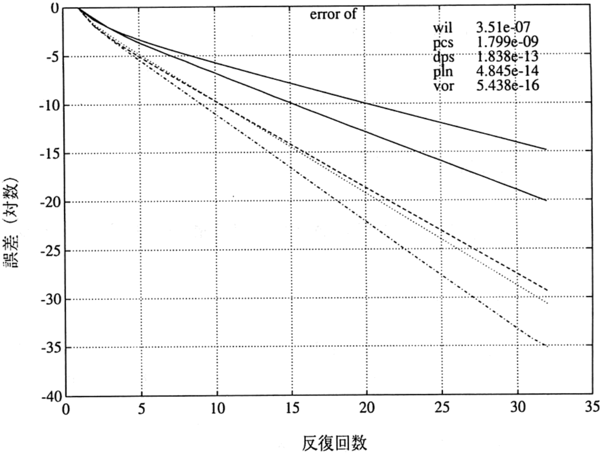


図 **8.3**　各手法の収束挙動

ここでは反復回数の 1 回を，検討している五つの手法それぞれの 1 ステップとしている．そこで，各ステップの利得 (実際には数ステップ後に限界値に近付く)，すなわち $\|xx-xa_{n+1}\|_2/\|xx-xa_n\|_2$ を収束速度と呼ぶことにする．POCS 法 (“pcs” と書かれている) を除くと，検討しているすべての手法の 1 ステップは，補助関数の生成とそれに引き続くフィルタ処理から成り立っている．すなわち，そのようなステップではすべてのサンプリング値を同時に利用していることになる．一方，POCS 法の 1 ステップではサンプリング値を一つしか利用していない．そこで，一連のステップによってすべてのサンプリング値を扱う 1 サイクルを 1 反復回数として比較することにした．この方法により，1 サイクルの間により高度な操作を行なった成果がはっきりと打ち消された．近似誤差と時間の関係から収束挙動を示した図 8.4 にその様子を示す．

図 8.4の時間プロットは，計算機精度を達成するための同等な再構成タスクに必要な時間を示している．そこでは，ADPW 法とフレーム法は VOR 法と PLN 法と比べて高速であることが示してある (補助信号の生成が容易なため)．フレーム法の 1 ステップは ADPW 法の 1 ステップと同等の時間でできるのに対して，WIL/MAR 法は ADPW 法の 2 倍の時間がかかるので，定められた近似精度を得るためには約 2 倍の反復回数が必要である．図 8.4では，この例に限ってではあるが，移動した sinc 関数の配列を最初に蓄積するという効率の良い実装にもかかわら

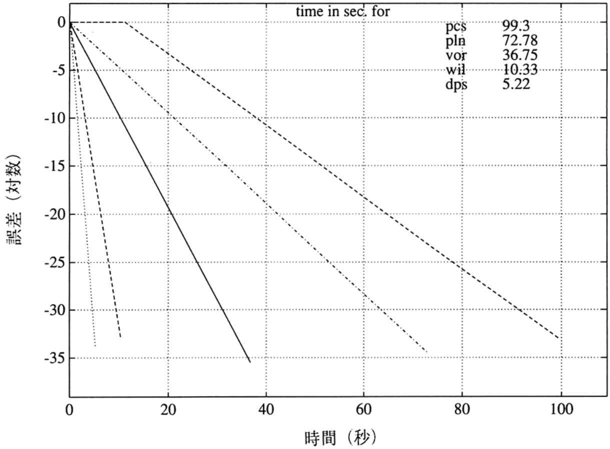


図 **8.4**　1.11×10^{-14} の精度に到達する時間の比較

ず，POCS 法が断然遅いという結果を示している．もちろんこの実験は何度も行ない，この例においても同時に完全な ADPW アルゴリズムを (最大精度まで) 実行している．このやり方をしなかったならば，POCS 法の収束速度はもっと遅くなったであろう．

一般には， Voronoi 法は適応重み法と同様に，限定された反復回数内での近似の度合という観点において，非常に良い性能を示す．一方，補助関数 (ステップ関数や区分的線形関数) の生成を必要とする Voronoi 法や PLN 法と比べて，フレーム法や ADPW 法の各反復の計算コスト (本質的には 2 重 FFT 相当) は少ない．実際には，サンプリング点が増えると補助関数の計算に時間がかかるようになる．すなわち，後者の二つの手法では，収束速度の向上による性能の利得と，1 回の反復を実行するための計算量の増加との間にトレードオフがある．一方，WIL/MAR 法や ADPW 法の 1 ステップの計算コストはサンプリング点の数に依存しない．

一般に，各アルゴリズムの記述や実装にはいろいろな方法があるということをここで指摘しなければならない．特に，Fourier 変換を含む線形アルゴリズムでは，(基底と配列表現を使って) 与えられたベクトル空間に線形射影する方法や，直接 FFT を用いる方法がとられる．与えられた手法と状況においてどのような実装を選択するかという議論は，他の機会に譲る．当面の比較において，Voronoi 法と PLN 法については次の要領に基づいて実装を行なった．ステップ関数や限定された幾何学上の区分的線形な補間関数は，常に箱型関数や三角関数の線形結合として書かれるので，それらの基本となる補助関数をはじめに蓄積しておき，新しいステップ関数 (PLN 関数) が必要になった時には，与えられた係数で線形結合するだけにしておく．多

くの場合，反復実行時に使うために，それらの関数を「フィルタリング」して低域通過用の関数を蓄えておくよりも効率が良い．

この手法は，各反復において係数列から新しいステップ関数 (あるいは PLN 関数) を生成する素直な実装のものよりもかなり速い．

まとめ

検討した手法の中では，Voronoi 法と適応重み法がもっとも効率がよい手法であった．PLN 法は遅く，しばしば非常に非効率ではあるが，VOR 法も理論値からの予想と比べるとかなり遅い (この点については 8.9.8 節で説明する)．高階スプライン補間を反復過程に使用している手法についても同様である．ADPW 法と WIL/MAR 法は両者とも高速である．ただし，WIL/MAR 法はサンプリング幾何の不規則性にたいへん敏感な傾向を示す (これについてはあとで述べる)．したがって，速度とロバスト性という観点から，ADPW 法がもっともよい解法である．

8.9.2　POCS 法の特長

POCS 法にはいくつかの長所がある．まず，(例えば Fourier 係数の) 正値性や，導関数や平均などの幾つかの値に関する知識などを含むさまざまな種類の凸条件の包含を許す比較的単純な手法であることである．その理由は，それらすべての条件が，簡単な射影作用素で凸集合上のメンバーシップとして定式化可能だからである．多くの場合，単一の POCS 条件はまさに，検討している L^2空間あるいは B_Ω の超平面中の信号のメンバーシップである．それにもかかわらず，不規則サンプリングからバンドリミテッド信号を再構成する POCS 法の実測値について，他の手法との比較はこれまであまり行なわれていない．

我々の例で POCS 法が遅かった主な原因は，サンプリング点の数があまり少なくなかったことである．サンプリング点の増加は各サイクルの計算量の増加をひき起こし，この影響を補うほどには (1 サイクルあたりの) 収束速度が必ずしも向上しない．サンプリング点が少なければ状況は違っていただろうが，このような場合は，他に効率の良い手法がたくさんある．実際，適当に小さい線形連立方程式を解くのであれば，それらの手法が最適解法である．小さな問題ではそれらの直接手法がもっとも効率的なので，どうしても速度の遅さは POCS 法の大きな欠点となる．

それにもかかわらず，POCS 法のような素直な (サンプリング集合を左から右に処理してゆくような) 手法を，選択する順序や点を適切にすることによって改善するいくつかの戦略がある．そのうちのいくつかは M. Mayer の学位論文 ([Ma]) で議論されている．この解法の最近の評価については [Fetal] を参照．一見したところでは「自然な」順序 (すなわち左から右へ) に

思えるが，これは与えられた情報を利用する上で相当非効率な方法である．実際，第1のサンプリング値に対して修正を加えた後では，第2の値はほとんど正確なので，近接点(第1の点と第2の点は非常に近い)のペアによる改善が，それらの点のたった一つだけの場合とほとんど同じであることが 容易にわかる．つまり，第2の点での修正はほとんど改善に寄与しない．一方，2点が互いに離れていた場合，このような現象は起こらない．

各ステップでは，次の点を任意に選択するか，あるいは与えられたサンプリング集合をランダムに並べたものをあらかじめ決めて，各サイクルではその決められた順序に従う(実際的観点からは後者の方が容易である)．どちらの場合でも，結果は同じになる．図8.5はまさにその様子を示している．直接的なPOCS法の収束速度は非常に悪いのに対して，順序をランダムに並べ変えた場合は7回中6回が反復回数22以内で計算機精度に到達した．もちろんこのやり方の効率はサンプリング点の密度に依存している．通常は，いわゆるred/black法を適用した場合に同等の効果が得られる．この方法では，まず奇数インデックスのものを使い，そのあとで偶数インデックスのものを用いる．すなわち次のように行なう．$x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2l+1}, x_{2l}, x_{2l-2}, x_{2l-4}, \ldots, x_4, x_2$

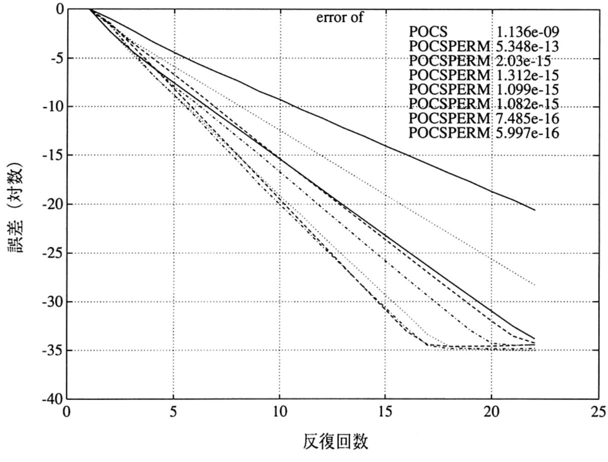


図 8.5 サンプリング点の並び替えを行なう場合と行なわない場合の POCS 法

関係するサンプリング点における誤差の大きさによって，単一のPOCS法の一連のステップで使われる点の順序を選択するという方法もある(最大誤差の点を最初に使う)．残念ながらこの方法では，サンプリング点の数が多くなると最大誤差の点を決めることが非常に大きな計算上の負荷となる．

以上の議論により，POCS法はなるべく少ないサンプリング点を扱う方が有利であると思わ

れるので，再構成を達成するために，いくつかのサンプリング値を無視することにより点数を減らしたくなるだろう．この方法は，精密さが勝っている (例えば合成信号を扱っている場合) ならばうまくゆくが，雑音によってデータが汚染されている場合 (さらに，雑音が場所によって変化していたり，それが信号をいろいろな周期でサンプリングしなければならない理由となっている場合) のように，より実際的な状況においては深刻な問題となる．すなわち，実際問題として，利用できる情報を無視することはアルゴリズムの改善にならない．

次に示す例は，POCS 法が他の手法よりも雑音に敏感であることを示したものである．そこでは，妨げとなるサンプリング値が一つだけあることを仮定している．もしも POCS 法でこの点を最後に使ったならば，その誤差が完全に再構成された信号に伝搬することは明らかである．与えられたデータ列のどの点が汚染されているかを知ることは通常できないし，それに続く正しい値で誤差を訂正することもできないので，POCS 法で雑音のあるデータを扱う場合は深刻な問題となる．

8.9.3　誤差の測定

図 8.3や図 8.4のようなプロットからは，与えられた手法で一定の精度に到達するためにどれくらいの反復や単位時間を必要とするかを簡単に読みとることができる．二つのプロットとも，対数スケールを使うことにより，議論しているすべての手法の収束曲線がほぼ直線に変わっている．特に，より急激な減衰を示す初期段階の数回の反復の後では，ある決まった商が各反復ごとに得られる．

ここでは合成信号を扱っているので，厳格な方法で誤差 (バンドリミテッド信号から近似信号を引いたもの) が計算可能である．図 8.6は，さまざまなノルムで計測した誤差挙動を示している．ここで，ℓ^2 ノルムを 1 に正規化した信号 **xx** を用いているので，絶対的な誤差と相対的な誤差がこの例では一致している．グラフの一番上の線が ℓ^1 の誤差 (座標偏差の絶対値の合計) を，一番下の線が最大誤差 (sup ノルム，または ℓ^∞ ノルム) を示している．しかし，実際的な状況ではサンプリング値のみが与えられているので，真の偏差は測定不可能である．もしも真の信号値 (この例では不明) を用いないならば，基準として相対誤差の大きさを用いるべきであろう．この例では，この値は上から 2 番目の線に示されている．

一方，与えられたサンプリング値と再構成された信号のサンプリング値との誤差は計測可能である．グラフの下から 2 番めの線は，ℓ^2の合計 (サンプリングエネルギーとも呼ばれる) を与えられた信号のサンプリングエネルギーで除算したものを示している．(上から 3 番めの線には) サンプリングエネルギーの相対的な変化が示してある．

(ℓ^2 ノルムの) サンプリング値の偏差が，全体偏差と同じ速度でゼロに近付いてゆくことは，フレーム推定値 ((8.29) 参照) から知ることは十分可能である．この二つのノルムが一般的に等価

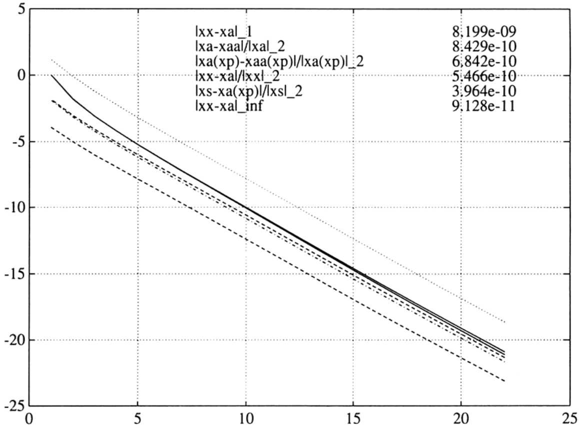


図 **8.6**

であることは，サンプリング誤差の曲線が真の誤差曲線と並行した一定の高さの狭い範囲にとどまらなければならないことを意味する．しかしながらこれは，図 8.6に見られるように，ℓ^2ノルムのサンプリング誤差の自然対数プロットから得られる曲線それ自身がほぼ直線であることまでは，直接的には含まない．

このことから，与えられた精度 (例えば計算機精度など，MATLAB では 10^{-16}) に達するために必要なステップ数 (さらには必要な時間も) について非常に正確な推定値が得られるので，実際の応用において大変有用である．特に，推定信号が各ステップで完全には計算されず，反復を継続するために必要な係数やパラメータのみが計算されるような実装方式 (このやり方の説明は [CFStei] を参照) を取った場合に有効である．

8.9.4 サンプリング幾何とスペクトルサイズ

サンプリング幾何やスペクトルサイズが与えられた手法の性能に与える影響の程度を知ることは，実際の問題では非常に重要である (図 8.7参照)．これは検討している手法の実装方式に非常に依存するので，この話題の詳細な議論は別稿で行ないたい．

サンプリング集合中の最大ギャップの大きさが，検討しているすべての手法の収束速度に相当な影響を与えるということは驚くべきことではない．最大ギャップが非常に大きい (臨界の大きさは当然使用しているスペクトルΩの大きさに依存する) 場合，実際には，少なくとも自然な緩和係数 (詳細は 7 章を参照) に対して，検討しているすべての手法は発散する．非常に小さな

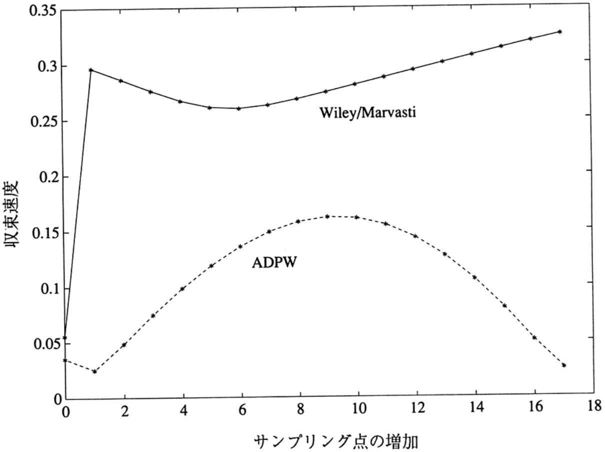


図 **8.7**　サンプル点を増やした場合の ADPW 法と Wiley/Marvasti 法の収束速度

緩和係数を用いると理論的には収束させることができるが，収束速度があまりにも遅いため実際的な観点から実用的でない．

もちろん，サンプリング集合が持っているその他たくさんの「幾何学的」特徴がある．例えば，不規則の度合は重要な役割を果たす．我々はここでは形式的な定義を与えることができない．サンプリング族は，緩やかに変わるサンプリング密度を持つか (例えば一方は多くのサンプリング点を持ち，他方は少ないサンプリング点しか持たないなど)，あるいはほとんどは一定の密度に設定されるがほんの少しの点の集まりだけが「過密に」(すなわち高密度領域に) なる．どのような場合でも，アルゴリズムの品質は，それらのさまざまな不規則さの形式に関する感度についての言及を含むべきである．

検討しているすべての手法の中で，(反復ステップごとの計算量という観点から ADPW 法に唯一匹敵する)Wiley/Marvasti 法は，この点に関してもっとも高い感度を示す．我々が緩和係数の選択を定数の重み係数の選択であると考えたとしても不思議ではない．つまり，この手法はサンプリング集合の不規則性を ADPW 法のようには補うことができない．一様乱数生成器から作られたサンプリング集合のような，一様な密度をもったサンプリング集合に対してのみ，単純なフレームの性能が ADPW 法に匹敵する．このことは，このような場合において「平均値」では重み係数が同等であると推測されるという事実から説明できる．この分野の多くの研究者はそのようなサンプリング集合にばかり注意を払っているので，我々はここで,「任意の」サンプリング集合と「ランダムな」サンプリング集合の違いを強調しなければならない．前者

はサンプリング幾何が与えられており，さまざまな不規則性を持っている．後者はサンプリング集合の生成過程において乱雑さを使う．

ADPW 法のみならず，PLN 法や VOR 法が不規則性に敏感でないことも判明した．これについて考えられる一つの解釈は，それらの手法では，フィルタリングの前に作られる補助信号 (区分的線形関数 (PLN)，ステップ関数 (VOR)，離散測度 (ADPW)) の「局所的質量バランス」が，全信号の「局所的質量バランス」とかけはなれていないことである．これが Wiley/Marvasti 法ではかけはなれている．

図 8.7では，与えられたサンプリング集合に点数を増やすことによる (マイナスの) 効果を示している．ここでは，15 点から成る「準正則」なサンプリング列 (すなわちステップ幅 17 の等差級数) からはじめた．大きさ 18 のギャップが一つあるオーダー 256 の巡回群を扱うので，そのサンプリング集合は群全体に対する部分群ではない．次に，もっとも大きなギャップを持つ 17 箇所のうちの任意の場所に 1 点を加え，公平に判断するために，(自然な)ADPW 法と (実際の応用において得るのは非現実的だと思われる) 最適な緩和係数を用いたフレーム法を比較した．

プロットは，いろいろな場所に点を増やした場合の，両手法の実際の収束速度 (反復ごとに誤差が減少する率) を示している．左端が点を加えていない状況である．そこでは，両手法ともに，1 回の反復で約 0.05 の割合で誤差が減少している．これを見ると，元のサンプリング集合はほとんど規則的なものであることがわかる．ここで，新たに点を一つずつ加えてゆくことは，性能の悪化を招く．WIL/MAR 法ではその効果は非常に強く，どのような場合でも収束速度は 0.25 以下になる．一方，(二つの例外があるが) ADPW 法でも性能が落ちる．しかし，最悪の場合でもたったの 0.15 程度である．どのような場合でも ADPW 法の実際の収束速度は WIL/MAR 法よりもかなり良い．さらに，フレーム法の最悪の場合は 2ヶ所 (1 と 17) で起こっているが，それらの状況は ADPW 法にとってもっとも良い．その理由は，それらの位置が，サンプリング点を加えることによってもっとも強い不規則性を引き起こす点であったということである．

その他に発見したあまりめざましくない状況として，通常，さらに点を加えてサンプリング集合の不規則性を増加させた場合，単純な重み付けのないフレーム法の性能は急速に悪化する．一方，ADPW 法の場合は，(付加的なサンプリング値の知識によって) 加えられた情報は，(計算量という意味での一定のコストで) 収束速度を改善する結果をもたらす．さらに，(9.7 節でも説明するが) フレーム法の最適な緩和係数についての知識は，たとえサンプリング点を数点を加えただけでも，新しい最適な緩和係数を推測するためには使えなくなる (実際の状況では，最適な緩和係数はわからないので，WIL/MAR 法と ADPW 法の差異は図 8.7よりもさらに大きくなるであろう)．それに対して，ADPW 法の重み係数は自動的に補正され，緩和係数を計算する必要はない．さらに，ほんの数点を加えただけであれば，古い重み係数を使うことができ，追加された点に遠くない点に関連する重み係数のみを変更すれば良い．

8.9.5　実際のスペクトルと既知のスペクトル

本節では，再構成すべき信号の実際のスペクトルに関する知識がない場合の問題について扱う．サンプリングされた信号が低周波信号の場合 (すなわち小さなスペクトルを持つ場合) でも，そのスペクトルに関する十分な知識はない．その結果，再構成手続きのためには必要以上に大きなフィルタを使わなければならなくなる．このことは，収束速度が信号の実際の最大周波数よりも使用されるフィルタの大きさに，より依存することを示している．言い替えると，この情報が演繹的な知識として組み込まれていないと，信号のより高度な平滑化は再構成手続きを高速化しない．これを説明するために，単一の周波数 (例えばゼロではない 8 番めの Fourier 係数を持つもの) を考え，オーダー 8 までの周波数だけを探さなければならないことを知っているものとする．すると，比較検討しているすべての手法において，11 よりも小さいという知識を持って単一の周波数 3 を再構成する場合よりも，収束速度は良くなるだろう．実際，補助信号 (例えば VOR 法のステップ関数など) は，常に検討している全スペクトルに対する重要な寄与を含んでいるため，反復の効率は著しく悪化させる．もちろん，フィルタを非常に小さくすると完全な再構成ができなくなるので，こうしたことはどんな環境下でもしてはならない．図 8.8は，定められた低域通過信号に対する，ADPW 法 (左側) と自然な緩和係数のフレーム法 (右側) の実際の (対数スケールの) 減衰を示している．最善の推定は真のスペクトルを用いて得られ，図ではスペクトルに点を次第に増やした場合の効果を示している．二つの手法では，成長するスペクトルに対する品質悪化の効果は同程度だが，各場合において，フレーム法よりも ADPW 法の方が良い結果を出している．

8.9.6　重み係数列の選択

高次元においては，ADPW 法の記述には，Voronoi 領域 (与えられたサンプリング点の最近傍の集合) の面積/体積と考えることができる重み係数の選択を含んでいる．1 次元以上の Voronoi 重み係数を実際に計算するという問題については，ここでは言及できない．1 次元の場合は簡単である．Voronoi 区間の距離として隣あった左右の距離の半分をとれば良いからである．数値実験より，重み係数の選択に対する収束速度の依存度に関して，以下のことがいえる．

1.　多くの場合，使用した重み係数がサンプリング幾何の不規則性を補っている限りは，収束速度はその特定の重み係数にあまり依存しない．特に，サンプリング密度が高い領域に小さな重み係数を用いることが重要である．一方，理論的に収束速度が保証されているギャップ (最大 Nyquist ギャップ) よりも大きなギャップを持つサンプリング集合では，重み係数に関する公式を「そのまま」使うべきではないことがわかった．実際，完全に孤立した点が非常

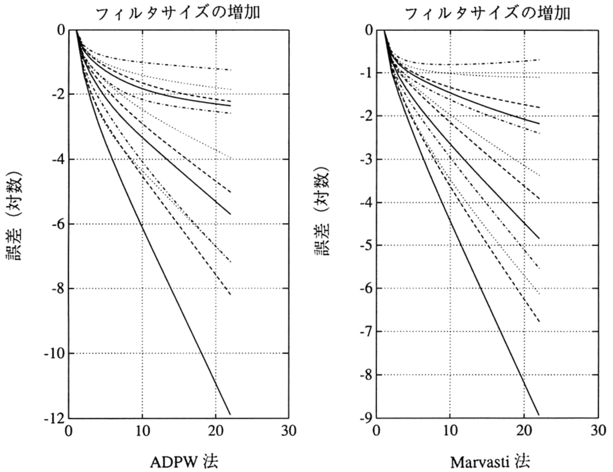


図 **8.8** フィルタサイズを大きくした場合の (対数) 誤差の比較．左が ADPW 法，右が Marvasti 法

に大きな重み係数を取ってしまうと逆効果となる．そのような重み係数列を大域的緩和係数 $\lambda < 1$(この場合は収束を保証するのに役立つ) と組み合わせるよりも，何らかの閾値を決める方が良い．Nyquist ギャップに対応する重み係数が良い閾値として推奨できることが数値実験からわかった．

2. 規則として，重み係数の合計は信号長と同じにした．Voronoi 規則 (近接点を循環的に取る) に従う場合，1 次元では自然な方法である．重み係数の合計を信号長と等しくすることは，他の手法においては (サンプリング集合の可変な密度をおおよそ表現している) 重み係数を正規化していることになる．この規則を定数に適用した場合，重み係数`n/lxp`(サンプリング点数を信号長で割ったもの) を選ぶことを推奨する．実際，それはまさに重み付けのないフレーム再構成のための緩和係数である．サンプリング点がおおよそ「一様に分布している」サンプリング集合に対しては，これは良い選択である．実際，この緩和係数を持つ Wiley/Marvasti 再構成法は，ADPW 法とほとんど同等である！

重み係数の選択，すなわち ADPW 法は，Donoho/Stark が [DoSt] で説明した状況にも適用可能である．その状況では，マルチバンドスペクトルを持つ関数 (Fourier 変換の台が区間の集まりに含まれている) が，比較的小さなギャップをもつ区間の列として与えられている．図 8.9 は，さまざまな緩和係数を持つフレーム法の収束速度を比較したものである．この例では，最適な緩和係数 1.25 は，(参照値として`n/lxp`を使った) 自然な係数よりも効率が良い．`n` = 128

において 90 個のサンプリング点を使った場合， Donoho/Stark のアルゴリズムを直接適用すること (単純に各ステップで与えられたデータを区間を越えて他のものに置き換えること) は，我々の用語でいうと，緩和係数 1.422 を使うフレーム法に相当する．図 8.9の例では 32 回の反復後，この方法は第 3 位に位置付けられた．明らかに，たとえそのようなサンプリング幾何であろうとも，ADPW 法の方がどんな緩和係数をもつフレーム法よりも，(そのフレーム法の反復ごとの利得の 2 倍も) 優れている．

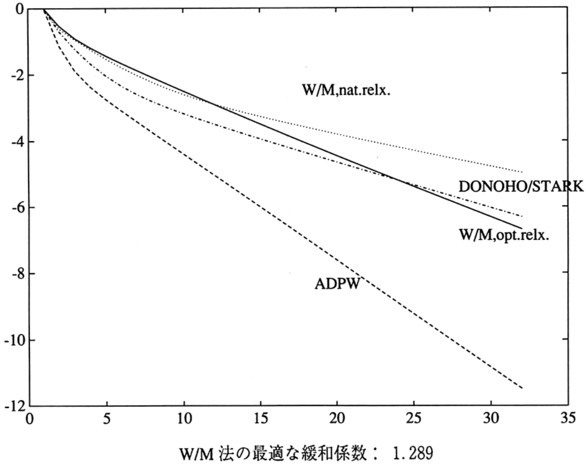


図 **8.9**　Donoho/Stark 法，最適な緩和係数を持つフレーム法，ADPW 法の比較

8.9.7　緩和係数の妥当性と選択

手法によって，緩和係数の選択が果たす役割は全く異なる．我々の実験では，いくつかの例外があるにしろ，1 ではない緩和係数を選択する効果は，平均して Voronoi 法と PLN 法をほとんど改善しなかった．一方， WIL/MAR 法では，大抵の場合，良い緩和係数をうまく選ぶと実際の収束速度に大きな影響を与える．図 8.10は，図 8.1 に示した信号に，さまざまな緩和係数を用いたフレーム法を適用した場合の収束速度を示している．

フレーム理論の観点からは，与えられたフレーム定数 A,Bを使って$\lambda = 2/(A+B)$ とするべきである．しかし，実際には A と Bはサンプリング幾何やフィルター自身から数値的に得ることはできず，良い推定値を得ることは，簡単な手法では困難である．小さな問題では，正と可逆のフレーム作用素を表す行列の最大/最小固有値として A と Bを計算することが可能である．

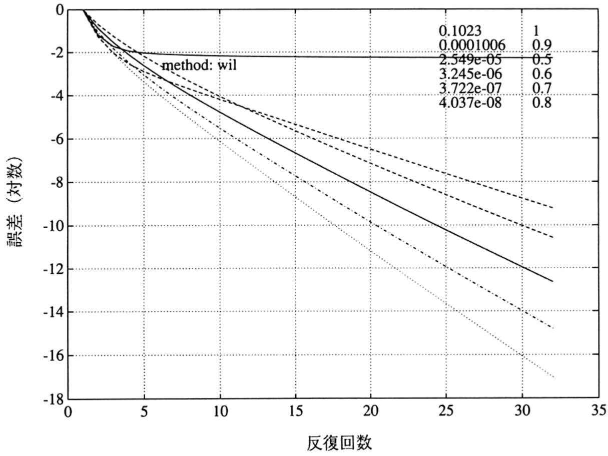


図 8.10 さまざまな緩和係数を用いた場合の収束と誤差

もちろん，この解析のための計算の複雑さは，不規則なサンプリング問題を直接解くことよりも大きい．すなわち，この解法は分析の役には立つが，有効な実際的手法は提供しない．一般に，サンプリング点の蓄積があれば B は大きくなる傾向にあり，このためλ は小さな値になってしまい，この場合に収束が遅くなる原因となる．

一方，文献 ([MA] 参照) で述べられていることとは反対に，穏やかな不規則性を持つサンプリング集合に対しては，緩和係数を`n/lxp` に設定すればよいというかなり良い経験則を与える簡単な秘訣を，ADPW 法から導き出すことができた．この方法は，フレーム法の緩和係数の初期値の選択としてはかなり良いが，もう少し小さな値 (我々は $0.8 *$ `n/lxp` を提案する) を取っても構わないとする二つの意見がある．

意見 (a): 一般に，小さな緩和係数が速度を犠牲にして手法の安定性を改善する．フレーム法では，追加した係数 0.8 は，やや大きな不規則性を持つサンプリング幾何に対しては発散するのを防ぎ，全く規則的なサンプリング状況での収束速度は犠牲にしない．より小さな値を使うと，多くの場合で速度低下を起こし，より不規則な状況に耐えるのに役立つ．

意見 (b): この意見は，定められた最大ギャップを持つたくさんのランダムな幾何に対する，最適な緩和係数の二つのヒストグラム (図 8.11) からの直接的な帰結である．我々は同等な実験を何回も行ない，一般的に次のことが言えることがわかった．すなわち，最適な緩和係数の変動は，普通のフレーム法 (Wiley/Marvasti 法) で比較的大きく，ADPW 法の最適な緩和係数は 1 の近くに非常に集中する．前者は，点の集積が起こると上位のフレーム定数が大きくなり，

最適な緩和のためには小さな緩和係数が必要となるためである．ADPW 法の場合は，高いサンプリング密度の領域での小さな重み係数が，この影響を自動的に補っているためである．

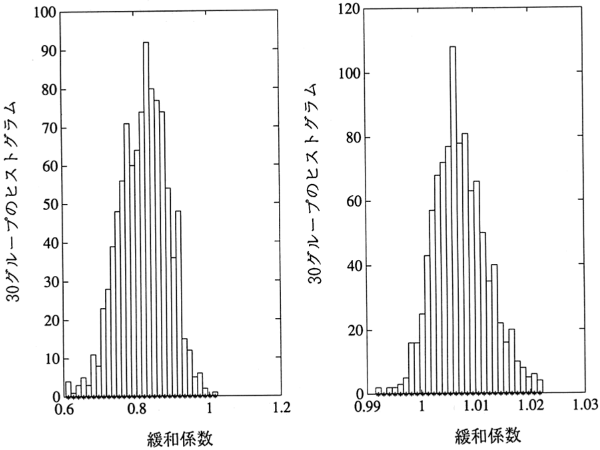


図 **8.11**　30 グループの緩和係数のヒストグラム．左が Wiley 法．右が ADPW 法．

通常，ADPW 法の最適な緩和係数は 1 に非常に近く，大抵は小数点以下 2 桁以内である．すなわち，緩和係数を最適に調整することはすでに手法に組み込まれており，もはや最適な緩和係数を得るために試行錯誤や他のより精密な手法は必要ない．

重み付けのないフレーム法のヒストグラムは，緩和係数に追加の係数 0.8 を用いる (要するに $\lambda = 0.8 \times$ `n/lxp`) もう一つの理由も示している．この場合では，準最適な緩和係数を得られる期待値がもっとも高い．

注意　改善されたフレームの推定値は収束性の向上を保証しているわけではない！

実際的という観点から，与えられた秘訣 (フレーム限界から最適な緩和係数を計算する方法) は，フレーム限界が最適なものに近い場合にのみ，最適な収束速度を与えることに注意しなければならない．一般的には，良いフレーム限界の知識が本質的に良い緩和係数を与えるということは真ではない．例として単純な ONS であるフレームを考えると，フレーム限界は $A = 1 = B$ である．ここで，$B \leq 1.5$ と $A = 1$ のみが既知であると仮定しよう．一般的な秘訣を使うと，緩和係数 $2/(A+B) = 4/5$ を取ることになり，その結果，収束速度が 0.2 になる．一方，推定として $A \geq 0.5$ のみを知っていた場合，$2/(A+B) = 1$ を選択するように導かれただろう．これならば 1 ステップで完全な再構成ができる．しかしながら，推定値を最適に近付けるように改善することは，最適な緩和係数の推定を改善することにもなる．

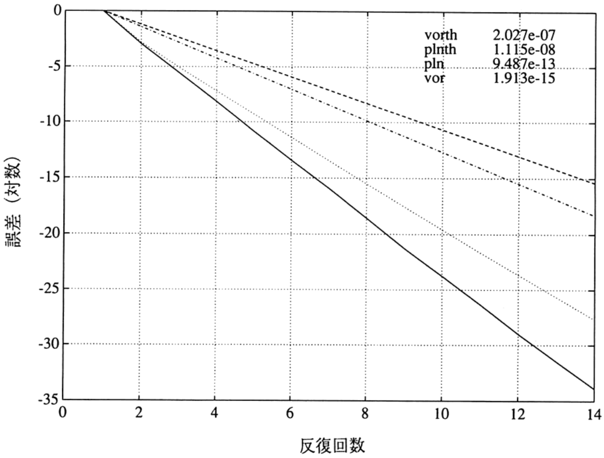


図 **8.12** 理論的な収束性と実際の収束性との比較

8.9.8 理論と実際

反復という観点において，Voronoi 法が PLN 法と比べて素晴らしい効率を示すことは，繰り返し観測された意外な結果の一つである．理論上は (驚くべきことではないが)，手法に期待する性能の尺度を誤魔化した場合，PLN 法は反復あたりのより良い減衰を示すはずである．しかし実際的には，Voronoi 法はこの点に関して ADPW 法に匹敵するほどの驚くべき効率を示す．収束速度を理論値と実際のものとを単純に比較すると，PLN 法では理論値が実際の減衰に非常に近い．現在の推定値は減衰率 (すなわち対数スケールでの誤差曲線の傾き) を単に与えているので，鋭い絶対値を持つことが期待できない．一方，それらの結果は，与えられた精度を得るために必要な反復回数を計算するのに利用できる．PLN 法では，そのような予測は，与えられた状況において実際に必要なステップ数には到底ならない． VOR 法では，状況はかなり異なる．数値的な誤差曲線は予測されたものよりも十分に良い．こうしたことが，統計的な現象 (高確率で真となるが，いくつかの例外では予測された減衰率を示す) なのか，あるいは実際的な観察から理論の方を修正すべき問題なのかは今後解析すべき問題である．

8.10　追加結果とその知見

8.10.1　他の実装方法

説明してきた各手法の比較において，POCS 法 (平滑化のステップを必要としない) を除くすべての手法で，畳み込み計算をするのに FFT を用いる標準的な実装を用いた．しかしながら，ほとんどの手法にはさまざまな実装方法があり，(同じ数学的アルゴリズムにとって) どの実装が最も良いかは場合によって異なることに注意しなければならない．我々は，(信号長やスペクトル次元，サンプリング点の数などに依存する) 良い選択方法に関する信頼できる経験則を発見した．これらの問題に対する詳細な議論には別の論文が必要である．典型例として，別の実装方式では反復の 1 ステップを行列の積に置き換える．行列の大きさ (スペクトル要素数かサンプリング点数) と与えられた信号長に対する FFT の速度によって，この実装方式かあるいはもっと別のものの方が良い性能を示す．信号は問題によって異なることを心に留めなければならない．(最悪の場合，信号長が素数になり)，これは効率が良い FFT の利用を妨げる．

8.10.2　2 次元の場合

議論した手法のほとんどについて，2 次元の場合をやってみたが，それらの 2 次元のアルゴリズムを効率よく動作させるための特殊なやり方を記述するスペースがここにはない．例えば，Voronoi ステップ関数を作り出す事も通常通りではないし，平面中の不規則なサンプリング集合の各サンプリング点の Voronoi 領域の範囲を効率よく計算する方法も明白な作業ではない．2 次元の場合の包括的な議論は別の機会にするつもりである．2 次元信号の再構成では，ADPW 法の他の手法に対する優位性が 1 次元の場合よりも大きくなることには言及しておく．実際，平面中のサンプリング集合は非常に不規則になる傾向にある．さらに，変数とスペクトル点の数が非常に大きくなるため，補助関数 (三角形分割の上の区分的線形関数など) の生成や，線形射影に基づく行列表現を用いた反復表現は，計算量の膨大な (場合によっては不可能な) 作業となる．一方，約 25,000 個の変数と 40,000 個のサンプリング値を持つ 2 次元の例の一つ (256×256 の画像) では，ADPW 法は問題なく動作した．実際，Sun Sparc-station を使うと，1 反復ステップは 1 分以内に実行可能である．

8.10.3　繰り返し再構成する場合の性能

速度の問題のためには，様々な状況を顧慮しなければならない．実時間に適用する場合，結果は良いが遅いものよりは，若干不完全だが与えられた時間で再構成が得られる方法が必要にな

る．他の実際的な状況では，平均的に良いもの，すなわち一連の再構成を得るのに必要な待ち時間が適用可能な手法の中で最も小さなものが「良い手法」だと考えられるかもしれない．検討した手法の中では ADPW 法が格段に効率の良い再構成手法であることは，実験結果から明らかである．

同じスペクトルを持つ異なる信号が，サンプリング点の一定の族から得られたサンプルから再構成されるという状況もある．この場合，スペクトルとサンプリング幾何に関する情報を前処理すると，一連の信号を再構成するのに必要な時間が画期的に短くなる．原理的には，これは行列法で可能である．基本的には，関係する作用素が線形あるいは少なくともアフィン射影 (POCS 法の場合) であることを利用している．よって，そのアルゴリズムを実行するには，初めに適切な単位ベクトルを用いることで十分である．検討している問題がそれほど大きくなければ，直接行列法が最適解法になる．

典型的な応用例は，各軸上のサンプリング集合の積として生成したサンプリング集合から，矩形スペクトルを持つ 2 次元のバンドリミテッド信号を再構成することである．すなわち，サンプリング軸は $(k_j, n_l)_{1 \le j \le j_0, 1 \le l \le l_0}$ という形式をしている．そのようなバンドリミテッド画像を単一の行 (あるいは列) に制約することは，再びバンドを限定することになる (スペクトルはちょうど対応する軸上に射影される矩形となる) ので，与えられたサンプリング値から行 $(k_j)_{1 \le j \le j_0}$ を再構成できる．これを実施するには，(たくさんの！) 列 (画像の縦断面) を軸 $(k_j)_{1 \le j \le j_0}$ の値から再構成しなければならない．明らかに，それらの断面は同じスペクトルを持ち，一定の幾何上のサンプリング値から再構成されなければならない．列ベクトルの数は，通常それぞれの列のサンプリング点の数 j_0 よりも大きいので，上で検討したアルゴリズムの応用は，(特殊な状況を考慮していない) 普通のアルゴリズムの応用よりもかなり効率が良い．我々はそのような方法を用いて，多くの水平，垂直方向の線が欠けている 256×256 のバンドリミテッド画像の再構成に成功した．

8.10.4 局所平均値からの信号再構成

定理 8.15 で説明した平均値 (Nyquist 係数を越えない区間の列から得られた平均値) からの信号の再構成も試してみた (図 8.13参照)．そこでは，(1 反復あたりの) 収束速度は (同じ区間を使った)Voronoi 法とおおよそ等しい．関数の平均値の知識には実際のサンプリング値の知識よりも含まれている情報量が少ないと思っていたので，この結果は驚くべきことである．しかし，(信号をサンプリングするかわりに) 新しい推定信号の局所平均値を各ステップで計算しなければならないので，少なくとも「平均値からの再構成」手法の自然な実装方式では，計算量が増加することは認めなければならない．

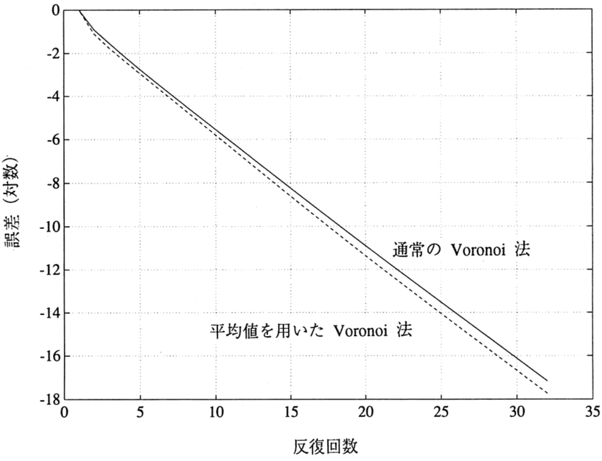


図 **8.13**　Voronoi 法の収束挙動

8.10.5　将来の改良，最近の数値実験

ここで，収束速度を改善するもっと良い手法が存在することに簡単に触れておく．例えば，各ステップの修正区間の値を適応的に選択する (緩和法の中で使われた一定の割合とは反対に，反復ごとに変化させる) 方法である．この解法の典型は最急降下法である．ADPW 法と最急降下法を組み合わせると，時として重み付けのない最急降下法や普通の ADPW 法を画期的に改善する．さらに，Chebyshev の加速法の考えや，特に共役勾配法の応用は，極めて効果的な結果をもたらす．さらに，Nyquist 基準を満たしていない場合でも，時としてサンプリング値から首尾良く信号を再構成することが可能である．また，こうした意味で，ADPW 法の性能が理論値よりもむしろ優れていることを実験結果は示している．

8.11　結論

本稿で議論した五つの手法の中では，ADPW 法は単純で (ステップごとの計算量が少ない) 効率がよく，同時にサンプリング集合の不規則性に対して非常に安定している．次に良いのが Voronoi 法である．これは安定性は良いが，計算量が多い．同様に POCS 法はサンプリング点が少ない時には効率が良いが，VOR 法や PLN 法と同様に，サンプリング点の増加とともに各ステップの計算負荷が増大する．このようなことは，普通のフレーム法や ADPW 法では起こ

らない．しかし，重み付けのないフレーム法はサンプリング点の蓄積のようなサンプリング幾何の不規則性に非常に敏感である．また WIL/MAR 法は，最適な緩和係数を選ばなかった場合はしばしば遅くなる．この最適な緩和係数は，与えられたデータ (サンプリング点とスペクトル) からは，簡単な方法では次々に得られない．一方，ADPW 法の最適な緩和係数は，多くの場合ほとんどに 1 に近い．

参考文献

[B] J.J. Benedetto. 1992. "Irregular sampling and frames," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 445–508.

[BHe] J. Benedetto and W. Heller. 1990. "Frames and irregular sampling," *Math. Note* **10**(Suppl. 1): 181–194.

[Be] A. Beurling. 1963–1964. "Local harmonic analysis with some applications to differential operators." In *Some Recent Advances in the Basic Sciences*, vol. I, Belfer Grad. School Sci. Annu. Sci. Conf. Proc., A. Gelbart, ed., pp. 109–125,

[BeMal] A. Beurling and P. Malliavin. 1967. "On the closure of characters and the zeros of entire functions," *Acta Math.* **118**: 79–95.

[Beu1] F. Beutler. 1961. "Sampling theorems and bases in Hilbert space," *Inform. Contr.* **4**: 97–117.

[Beu2] F.J. Beutler. 1966. "Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples," *SIAM Rev.* **8**: 328–335.

[BuHin] P.L. Butzer and L. Hinsen. 1989. "Two-dimensional nonuniform sampling expansions, I, II," *Appl. Anal.* **32**: 53–68, 69–85.

[BuSpSte] P.L. Butzer, W. Splettstößer, and R. Stens. 1987. "The sampling theorem and linear prediction in signal analysis," *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **90**: 1–70.

[CFHer] C. Cenker, H.G. Feichtinger, and M. Herrmann. 1991. "Iterative methods in irregular sampling: A first comparison of methods," in *Proc. 10th IPCCC*, March '91, Scottsdale, Ariz., New York: IEEE Comput. Soc. Press, pp. 483–489.

[CFStei] C. Cenker, H.G. Feichtinger, and H. Steier. 1991. "Fast iterative and non-iterative reconstruction of band-limited functions from irregular sampling values," *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. 1991*, Toronto, vol. 3, New York: IEEE Signal Process. Soc., pp. 1773–1776.

[CoR] R.R. Coifman and R. Rochberg. 1980. "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p," *Astérisque* **77**: 11–66.

[D] I. Daubechies. 1990. "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis," *IEEE Trans. Inf. Theory*, **36**: 961–1005.

[DGr] I. Daubechies and A. Grossmann. 1985. "Frames in the Bargmann space of entire functions," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 151–164.

[DGrMe] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. 1986. "Painless nonorthogonal expansions, " *J. Math. Phys.* **27**: 1271–1283.

[DoSt] D.L. Donoho and P.B. Stark. 1989. "Uncertainty principles and signal recovery," *SIAM J. Appl. Math.* **49**: 906–931.

[DuE] R.J. Duffin and J.J. Eachus. 1942. "Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener," *Bull. Amer. Math. Soc.* **48**: 850–855.

[DuSc] R. Duffin and A. Schaeffer. 1952. "A class of nonharmonic Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**: 341–366.

[Fetal] H.G. Feichtinger, C. Cenker, M. Mayer, H. Steier, and T. Strohmer. 1992. "New variants of the POCS method using affine subspaces of finite codimension, with applications to irregular sampling," in *SPIE92 Conf., Visual Communications and Image Processing*, Boston, Nov. 1992. pp. 299–310.

[FG1] H.G. Feichtinger and K. Gröchenig. 1989. "Multidimensional irregular sampling of band-limited functions in L^p-spaces," in *Proc. Conf. Oberwolfach*, Feb. 1989, ISNM **90**, Boston: Birkhäuser, pp. 135–142.

[FG2] H.G. Feichtinger and K. Gröchenig. 1992. "Iterative reconstruction of multivariate band-limited functions from irregular sampling values," *SIAM J. Math. Anal.* **23**: 244–261.

[FG3] H.G. Feichtinger and K. Gröchenig. 1992. "Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions," *J. Math. Anal. Appl.* **167**: 530–556.

[FG4] H.G. Feichtinger and K. Gröchenig. 1992. "Error analysis in regular and irregular sampling theory," *Appl. Anal.*, to appear.

[FGHer] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, and M. Hermann. 1990. "Iterative methods in irregular sampling theory. Numerical Results," in *7th Aachener Symposium für Signaltheorie*, ASST 1990, **253**, Aachen, Informatik Fachber, Berlin: Springer, pp. 160–166.

[FStr] H.G. Feichtinger and T. Strohmer. 1992. "IRSATOL: Irregular sampling of band-limited signals toolbox," in *Conference on Computers for Teaching*, CIP-92, Berlin, Sept. 1992 (available through anonymous ftp from 131.130.22.36 (=tyche.mat.univie.ac.at)).

[FrJa] M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transform and decomposition of distribution spaces," *J. Functional Anal.* **93**: 34–170.

[G1] K. Gröchenig. 1991. "Describing functions: atomic decompositions versus frames," *Monatsh. Math.* **112**: 1–42.

[G2] K. Gröchenig. 1992. "Reconstruction algorithms in irregular sampling," *Math. Comp.* **59**: 103–125.

[G3] K. Gröchenig. 1993. "Irregular sampling of wavelet and short time Fourier transforms," *Constr. Approx.* **9**: 283–297 (special issue on wavelet theory).

[G4] K. Gröchenig. 1993. "A discrete theory of irregular sampling," *Lin. Alg. Appl.*, to appear.

[GrMoPau] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. 1985. "Transforms associated to square integrable group representations I: general results," *J. Math. Phys.* **26**: 2473–2479.

[HYou] L.A. Hageman and D.M. Young. 1981. *Applied Iterative Methods*, New York: Academic Press.

[HaLiPó] G. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. 1952. *Inequalities*, 2nd Ed., Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[Hi1] J.R. Higgins. 1976. "A sampling theorem for irregularly sampled points," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Sept., pp. 621–622.

[Hi2] J.R. Higgins. 1985. "Five short stories about the cardinal series," *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**: 45–89.

[Hu] N.E. Hurt. 1989. *Phase Retrieval and Zero Crossings: Mathematical methods in image reconstruction*, Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

[J] S. Jaffard. 1991. "A density criterion for frames of complex exponentials," *Michigan Math. J.* **38**: 339–348.

[Je] A.J. Jerri. 1977. "The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications. A tutorial review," *Proc. IEEE* **65**: 1565–1596.

[K] S. Kaczmarcz. 1972. "Angenäherte Auflösung von Systemen von linearen Gleichungen," *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett.* **40**: 596–599.

[Ka] M.I. Kadec. 1964. "The exact value of the Paley–Wiener constant," *Sov. Math. Dokl.* **5**: 559–561.

[KyTTo] Ky Fan, O. Taussky, and J. Todd. 1955. "Discrete analogs of inequalities of Wirtinger," *Monatsh. Math.* **59**: 73–90.

[L] H. Landau. 1967. "Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions," *Acta Math.* **117**: 37–52.

[Le] N. Levinson. 1940. *Gap and Density Theorems*, Coll. Publ. **26**, New York: Amer. Math. Soc.

[M1] F.A. Marvasti. 1986. "Spectral analysis of random sampling and error free recovery by an iterative method," *Trans. Inst. Elect. Commun. Eng. Jpn* **E69**(2).

[M2] F.A. Marvasti. 1987. "A unified approach to zero-crossing and nonuniform sampling of single and multidimensional systems," Nonuniform, P.O. Box 1505, Oak Park, IL 60304.

[M3] F.A. Marvasti. 1989. "An iterative method to compensation for interpolation distortion, " *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **37/1**, pp. 1617–1621.

[MA] F. Marvasti and M. Analoui. 1989. "Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods," in *Proc. Int. Symp. Circuits Syst.*, May 1989, Portland, Ore.

[Ma] M. Mayer. 1993. "Variants of the POCS method applied to irregular sampling," Thesis, Univ. Vienna.

[NWa] M.Z. Nashed and G.G. Walter. 1991. "General sampling theorems for functions in reproducing kernel Hilbert spaces," *Math. Control Signals Syst.*, **4**: 373–412.

[Ne] J. von Neumann. 1950. *Functional Operators*, vol. II, Ann. Math. Studies **22**, Princeton: Princeton Univ. Press.

[PWi] R.E.A.C. Paley and N. Wiener. 1934. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Coll. Publ. **19**, Providence: Amer. Math. Soc.

[Pa] A. Papoulis. 1966. "Error analysis in sampling theory," *Proc. IEEE* **54/7**: 947–955.

[SAl] K.D. Sauer and J.P. Allebach. 1987. "Iterative reconstruction of band-limited images from nonuniformly spaced samples," *IEEE Trans.* **CAS-34/2**: 1497–1506.

[St] H. Stark. 1987. *Image Recovery: Theory and Application*, San Diego: Academic Press.

[W] W.J. Walker. 1987. "The separation of zeros for entire functions of exponential type," *J. Math. Anal. Appl.* **122**: 257–259.

[Wi] R.G. Wiley. 1978. "Recovery of band-limited signals from unequally spaced samples," *IEEE Trans. Commun.* **COMM-26**: 135–137.

[YTh] K. Yao and J.O. Thomas. 1967. "On some stability and interpolatory properties of nonuniform sampling expansions," *IEEE Trans. Circuit Theory* **14**: 404–408.

[YeSt] S. Yeh and H. Stark. 1990. "Iterative and one-step reconstruction from nonuniform samples by convex projections," *J. Opt. Soc. Amer. A*, **7**: 491–499.

[YoWe]　D.C. Youla and H. Webb. 1982. "Image restoration by the method of convex projections: Part I," *IEEE Trans. Med. Imag.* **MI-1**: 81–94.

[You1]　R. Young. 1980. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, New York: Academic Press.

[You2]　R. Young. 1987. "On the stability of exponential bases in $L^2(-\pi, \pi)$," Proc. Amer. Math. Soc. **100**: 117–122.

第9章　ウェーブレットと確率，統計：それらの関連について

Christian Houdré*

【概要】 この章では，三つの例題を通じて確率統計分野においてウェーブレット手法が果たす役割を示す．即ち，ウェーブレット変換の性質によって確率過程の特性を如何にして読み取ることが可能なのか，複素指数関数のフレームを通じて欠落したデータが存在する場合の問題が如何に取扱い可能か，ウェーブレットがノンパラメトリック関数推定におけるアドミッシブル推定の族を張ることが如何に可能か等の説明を行う．またここでは更に，行列のランダムな積がコンパクト台のウェーブレットの滑らかさを決定することや，非定常予測理論が Hilbert 空間におけるフレームに関して新しい結果をもたらすこと等，他の方面との関わりについても述べる．

9.1　2次ランダム過程のウェーブレット変換

この最初の節では，2次系の性質を有する確率過程に対するウェーブレット変換の効果を見ることにする．ウェーブレット変換は，一定の性質が読み取り可能な確率過程の時間-スケール分解を行うものである．この節では，ウェーブレット変換の2次系としての統計的性質によって確率過程の2次系としての統計的性質がどのように特徴付けられるかを示す．

ここで述べる結果は [CHou] によって得られた結果の特別な場合である．[CHou] は，(非定常な) 非整数ブラウン運動はウェーブレット変換によって定常と見なすことができるであろうという Flandrin [F] の観測から始められている．Flandrin の考えは更に Ramanathan と Zeitouni [RZ] により取り上げられ，実際にウェーブレット変換は非整数ブラウン運動を特徴付けることが示された．彼等はまた，自明でない如何なるガウス過程も平行移動と伸張に対して不変なウェーブレット変換を持たないことを示した．

非定常ではあるが，非整数ブラウン運動は定常な増分を有し，実際，二乗平均が連続であるのはその増分が定常かつ自己相似なガウス過程だけである．この非整数ブラウン運動の増分の

*この研究は，筆者がメリーランド大学数学科ならびにジョージ・メイソン大学数値統計学センター滞在中には Office of Naval Research Contract No. N00014-91-J-1003 の援助を受け，またノース・キャロライナ大学統計学科確率過程センター滞在中には Air Force Office of Scientific Research Contract No. F49620-92-J-0154 の援助を受けている．またこの論文は，筆者が NSF Mathematical Sciences Post-Doctoral Fellowship の援助を受けているあいだに改訂されている．

性質は，そのウェーブレット変換が定常であるための第 1 の重要な要素である．2 番目に重要な要素は平均値が零のウェーブレットの存在である．ウェーブレットが零平均を有する場合，確率過程が定常な増分を持つ時，またその時に限ってその確率過程のウェーブレット変換も定常である．同様な結果は（異なる次数の）自己相似性についても当てはまる．非整数ブラウン運動の特徴付けとこれら二つの事実の組み合わせで種々の疑問を解く鍵を提供される．

ここで，(Ω, B, P) を確率空間，$X = \{X(t,\omega); t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ をランダム過程，即ち可測写像 $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ とする．E を期待値を表わす，言い替えれば P に関する積分とすると，もしすべての $t \in \mathbb{R}$ について $E|X(t)|^2 = \int_\Omega |X(t,\omega)|^2 dP(\omega) < +\infty$ であるならば，X は 2 次系確率過程であるという．

確率過程 X と関数 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が与えられた場合，もし次式中の経路ごとの積分が確率 1 で存在するならば，X の連続ウェーブレット変換を下記のランダム場として定義する．

$$W = \left\{ W(t,a,\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} X(u,\omega)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right) du;\ t \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \omega \in \Omega \right\} \tag{9.1}$$

ここであるスケール $a > 0$ が与えられた時，ウェーブレット変換は以下の確率過程となる．

$$W_a = \{W_a(t,\omega) = W(t,a,\omega);\ t \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega\}$$

ここで我々はウェーブレット変換の 2 次系としての性質にのみ興味がある．そこで，W も有限の 2 次モーメントを有するように，ウェーブレット ψ と確率過程 X に条件を設けることにする．これ以降，X を共分散関数 R_X，$R_X(u,v) = EX(u)\bar{X}(v)$ ($u, v \in \mathbb{R}$) を有する 2 次系確率過程とする．さてここで，以下の場合 ψ と X は条件 (C) を満足するという．

(C) すべての $n \in \mathbb{Z}$ について $(1+t^2)^n \psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$，$R_X$ は連続，

かつある $N > 0$ について $(1+t^2+s^2)^{-N} R_X(t,s) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ．

条件 (C) は以下が成立する良い実際的な十分条件を与える．

$$E\left\{\int_{\mathbb{R}} \left|X(u)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\right| du\right\}^2 \le \left\{\int_{\mathbb{R}} \{R_X(u,u)\}^{1/2} \left|\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\right| du\right\}^2 < +\infty \tag{9.2}$$

言い換えれば，W を定義している経路積分は Lebesgue 積分として確率 1 で存在し，W_a は 2 次系確率過程である．式 (9.2) が満たされる場合には，以下が成立する．

$$\begin{aligned} R_W(t,a,s,b) &= EW_a(t)\bar{W}_b(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(u,v)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv \end{aligned} \tag{9.3}$$

さて，これによって 2 次系確率過程のウェーブレット変換が存在する条件が見つかったことになる．ここでもう一度 2 次系確率過程の幾つかの性質を見ておく．以下の条件が成立する時，共

分散関数 $EX(t)\bar{X}(s) = R_X(t,s)$ を有する確率過程 X は弱定常であるという．

$$任意の\ t, s \in \mathbb{R}\ に対し, R_X(t,s) = R_X(t-s) \tag{9.4}$$

また，二つの2次系確率過程 Xと Y が結合**2**次モーメント $EX(t)\bar{Y}(s) = R_{X,Y}(t,s)$ を持ち，かつ

$$任意の\ t, s \in \mathbb{R}\ に対し, R_{X,Y}(t,s) = R_{X,Y}(t-s,0) \tag{9.5}$$

を満足する時，**相互弱定常**であるという．同様に，もし増分の2次モーメント

$$R_X(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2) = E(X(t_1+\tau_1) - X(t_1))(\bar{X}(t_2+\tau_2) - \bar{X}(t_2))$$

が $t_1 - t_2$ を通じてのみ t_1, t_2 に依存する，即ち

$$\begin{gathered} 任意の\ t_1, t_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}\ に対し, \\ R_X(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2) = R_X(t_1-t_2,\tau_1;0,\tau_2) \end{gathered} \tag{9.6}$$

の時，X は**弱定常増分**を有するという．最後に，以下の場合に Xと Y は**相互弱定常増分**を持つという．

$$\begin{gathered} 任意の\ t_1, t_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}\ に対し, \\ R_{X,Y}(t_1,\tau_1;t_2,\tau_2) = R_{X,Y}(t_1-t_2,\tau_1;0,\tau_2) \end{gathered} \tag{9.7}$$

以下に示す最初の結果は，ウェーブレットが「全通過」，即ち全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ である場合にはいつでも，確率過程の増分とウェーブレット変換のそれぞれの定常性を関係づける．特に，最後の条件はウェーブレットが如何なる消失モーメントをも持たないことを保証するものである．

定理 9.1　ψ と X が条件 (C) を満足するものとする．また，全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ であるとする．この時，任意のスケール $a, b > 0$ （ $a = b$ の可能性を持つ）における X のウェーブレット変換 W_a, W_b が相互弱定常である（または，相互弱定常増分を有する）時，またその時に限り，X は弱定常である（または，弱定常増分を有する）．

証明　定常の場合のみについて証明を行う．定常増分についても同様にして証明が可能である．言うまでもなく，X が定常の時，R_X が多項式オーダーで増大するという条件は常に満足される．

もし，X が定常であれば，全ての $u, v, T \in \mathbb{R}$ について $R_X(u,v) = R_X(u+T, v+T)$ である．

従って，(9.3) より任意の $a, b > 0$，全ての $t, s, T \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} R_{W_a,W_b}(t+T, s+T) &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(u,v)\psi\left(\frac{t+T-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s+T-v}{b}\right) dudv \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(u+T, v+T)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv \\ &= R_{W_a,W_b}(t,s) \end{aligned}$$

となる．よって，W_a, W_b は相互弱定常である．反対にもし全ての $a, b > 0$，全ての t, s, Tについて

$$R_{W_a,W_b}(t+T, s+T) = R_{W_a,W_b}(t,s)$$

であるならば，

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v)\}\,\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv = 0$$

である．ここで（本質的に）Wiener の Tauberian 定理と全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ であることから，全ての $u, v, T \in \mathbb{R}$ について $R_X(u+T, v+T) = R_X(u,v)$ である．従って，X は定常である．∎

定理 9.1 の証明は Wiener の Tauberian 定理の単純な帰結であり，平行移動の幅に関するものである．全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ であるという条件は，次の結果に示されるように本質的に重要である．例えばもし $\hat{\psi}(0) = 0$ であれば，上記で与えられた特徴付けは非常に異なったものとなる．

定理 9.2　条件 (C) と $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0 \neq \int_{\mathbb{R}} t\psi(t)dt$，更に全ての $\lambda \neq 0$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ が成立するものとする．すると，如何なる二つのスケール $a, b > 0$ に関するウェーブレット変換 W_a, W_b も相互弱定常である時，かつその時に限り，X は弱定常増分を有する．

証明　始めに，X が弱定常増分を有するものとする．(9.3) より

$$R_{W_a,W_b}(t,s) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(u,v)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv$$

従って，任意の $T, x, y \in \mathbb{R}$ について，(9.6) と $\int_{\mathbb{R}} \psi(u)du = 0$ より，

$$\begin{aligned} &R_{W_a,W_b}(t+T, s+T) \\ &\quad= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(x, v+T) - R_X(u+T, y) + R(x,y)\} \\ &\qquad\qquad \psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} E(X(u) - X(x-T))(\bar{X}(v) - \bar{X}(y-T))\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv$$

となる．しかしながら，今一度 $\int_{\mathbb{R}} \psi(u)du = 0$ であることより，全ての t, s, T について $R_{W_a,W_b}(t+T, s+T) = R_{W_a,W_b}(t,s)$ である．つまり，W_a, W_b は相互弱定常である．逆に，全ての $t, s, T \in \mathbb{R}$ について

$$R_{W_a,W_b}(t+T, s+T) = R_{W_a,W_b}(t,s)$$

であるとする．これと (9.3) により再び Rに属する全ての t, s, Tについて

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v)\}\,\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dudv = 0 \tag{9.8}$$

となる．これから

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-u}{a}\right) \int_{\mathbb{R}} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v)\}\,\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dvdu = 0$$

である．従って，任意の $s \in \mathbb{R}$ について（本質的に）Wiener の Tauberian 定理から，もし内側の積分を f_s で表わすならば，$\hat{f}_s$ の台は $\hat{\psi}$ の零集合に含まれる．即ち，(Lebesgue 測度の意味で）殆ど全ての u について，

$$\hat{f}_s = \sum_{n=0}^{N_s} c_n(s)\delta_0^{(m)} \quad \text{かつ} \quad f_s(u) = \sum_{n=0}^{N_s} d_n(s)u^n \tag{9.9}$$

となる．すると，全ての $t, s \in \mathbb{R}$ について

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-u}{a}\right) f_s(u)du = 0$$

と書ける．(9.9) を用いると，$F_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t)dt$ とした時，上式は

$$\sum_{n=0}^{N_s} d_n(s) \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m (-1)^{n-m} F_{n-m} = 0$$

となる．ここで $F_0 = 0$ かつ $F_1 \neq 0$ であるので，殆ど全ての $u \in \mathbb{R}$ について $f_s(u) = d_0(s)$ であると言える．

従って，各 s について

$$\int_{\mathbb{R}} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v)\}\,\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dv = d_0(s)$$

が導かれる．これから，ある u_0 と殆ど全ての u について

$$\int_{\mathbb{R}} \{R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v) - R_X(u_0+T, v+T) + R_X(u_0, v)\} \\ \bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right) dv = 0$$

となる．f_s に関するものと同様な議論と R_X の連続性より，ある関数 h_1 と全ての u, v, T について

$$R_X(u+T, v+T) - R_X(u,v) = h_1(u) + \bar{h}_1(v) \tag{9.10}$$

が成立する．この (9.10) において $u = u_0$, $v = v_0$ と置くことにより，全ての $u, v, T \in \mathbb{R}$ について

$$E(X(u+T) - X(u_0+T))(\bar{X}(v+T) - \bar{X}(v_0+T)) = E(X(u) - X(u_0))(\bar{X}(v) - \bar{X}(v_0))$$

となる．即ち，X は弱定常増分を有する．　∎

定常性は平行移動に関する不変性を意味する．ここで，ウェーブレット変換のスケールパラメータについて考え，そのスケール不変性，即ち自己相似性について詳しく見ることにする．

2 次系ランダム場 $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^n\}$,$n \geq 1$, は，以下の条件を満たす時に弱 H-自己相似であるという．

$$\begin{aligned} &\text{任意の } t, s \in \mathbb{R}^n \text{ と任意の } c > 0 \text{ に対し,} \\ &EX(ct)\bar{X}(cs) = c^{2H} EX(t)\bar{X}(s) \end{aligned} \tag{9.11}$$

(9.11) において X をその増分によって置き換えたものが成立する場合，その確率過程は弱 H-自己相似増分を有するという．全通過で零平均を持つウェーブレットについては，以下の結果はまたかなり異なったものとなる．はじめに示す定理は驚くべきものではなく，証明は定理 9.1 と同様なので省略する．

定理 9.3　X と ψ は条件 (C) を満たし，更に全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ が成立するものとする．この時，X のウェーブレット変換場 W が弱 $(H+1/2)$-自己相似である（または，弱 $(H+1/2)$-自己相似増分を有する）時，かつその時に限り，X は弱 H-自己相似である（または，弱 H-自己相似増分を有する）．

ウェーブレットが平均零を有する時，同様にその増分の性質が確率過程の性質を反映する．

定理 9.4　条件 (C) と $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0 \neq \int_{\mathbb{R}} t\psi(t)dt$，更に全ての $\lambda \neq 0$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ が成立するものとする．この時， X のウェーブレット変換場 W が弱 $(H+1/2)$-自己相似である時，かつその時に限り，Xは弱 H-自己相似増分を有する．

証明の概略　$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$ であるので，

$$EW(ct, ca)\bar{W}(cs, cb)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(cu, cv)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right)dudv \\
&= \frac{c}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} \{R_X(cu, cv) - R_X(cu, cv_0) - R_X(cu_0, cv) + R_X(cu_0, cv_0)\} \\
&\qquad \psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right)dudv \qquad (9.12)
\end{aligned}
$$

ここで，X は弱 H-自己相似増分を有するので，式 (9.12) は以下に等しい．

$$
\begin{aligned}
&\frac{c^{1+2H}}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} \{R_X(u, v) - R_X(u, v_0) - R_X(u_0, v) + R_X(u_0, v_0)\} \\
&\qquad \psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right)dudv \\
&= \frac{c^{1+2H}}{\sqrt{ab}} \int\int_{\mathbb{R}^2} R_X(u, v)\psi\left(\frac{t-u}{a}\right)\bar{\psi}\left(\frac{s-v}{b}\right)dudv \\
&= c^{1+2H} EW(t, a)\bar{W}(s, b)
\end{aligned}
$$

逆に，もし W が弱 $(H+1/2)$-自己相似であれば，定理 9.2 の場合と同様に証明を進めることによって，以下の式を得る．すべての $u, v \in \mathbb{R}$, $c > 0$ について，

$$
\begin{aligned}
f(u, v) &= E(X(cu) - X(cu_0))(\bar{X}(cv) - \bar{X}(cv_0)) \\
&\quad -c^{2H}E(X(u) - X(u_0))(\bar{X}(v) - \bar{X}(v_0)) \\
&= g(u) + h(v)
\end{aligned}
$$

$f(u_0, v) = f(u, v_0) = f(u_0, v_0) = 0$ であるので，$f(u, v) = 0$，即ち X は弱自己相似増分を有する． ∎

この節を終えるにあたり，[F] と [RZ] の結果を含むものとして定理 9.2 及び 9.4 をガウス過程の場合に特殊化して表すことにする．

系 9.5 条件 (C) と $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0 \neq \int_{\mathbb{R}} t\psi(t)dt$，更に全ての $\lambda \neq 0$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ が成立するものとする．また，X を $X(0) = 0$ であるガウス過程とする．この時，任意のスケール $a > 0$ において，W_a が弱定常でありかつ W が弱 $H + 1/2$-自己相似である時，かつその時に限り，X は次数 H の非整数ブラウン運動である．

証明 自己相似かつ定常な増分を有する二乗平均が連続なガウス過程のみが非整数ブラウン運動である（Mandelbrot and Van Ness [MaV] 参照のこと）．$X(0) = 0$ であるので，確率過程の自己相似性と確率過程の増分の自己相似性は同値である．従って，定理 9.2 と 9.4 の適用により明らかである． ∎

ウェーブレットは任意の次数の消失モーメントを有する可能性がある (Daubechies [D], Meyer [Me]). 消失1次モーメントを持つかわりに，再び全ての $\lambda \neq 0$ について $\hat{\psi}(\lambda) \neq 0$ の時，以下の関係が成り立つ時，

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} t\psi(t)dt = 0 \neq \int_{\mathbb{R}} t^2\psi(t)dt$$

定理 9.2 は次のようになる（より詳しくは [CHou] を参照のこと）.

定理 9.6　スケール $a, b > 0$ に関するウェーブレット変換 W_a, W_b が相互弱定常である（または W が弱 $(H+1/2)$-自己相似である）時，かつその時に限り，X は2次の弱定常（または H-自己相似）増分を有する.

この節では連続ウェーブレット変換のみを取り上げた. 2次系確率過程の離散ウェーブレット変換に関する結果とその多重解像度解析 (Mallat[M], Meyer[Me]) との関連については [Hou4] に述べられている.

9.2　ランダム行列と伸張方程式

予めこの節を始めるにあたって，以下に示される結果は全て筆者自身の研究成果とは何ら関連がないことを明示しておく. この節の目的は新しい結果を示すことではなく，伸張方程式と確率論のある分野との関係を提示することである.

コンパクト台を有するウェーブレットの滑らかさは，二つの行列の「任意の」積によって決定されることが，Daubechies と Lagarias [DLa1] によって示されている. 今日までにこれらの積を理解するために構築された手法は，線形代数，例えば結合スペクトル半径と多くの関連を有している. 以下では確率論的視点からこの手法を補足説明したいと考える.「任意の」を「ランダムな」という言葉に置き換えることで，行列積の漸近性について多くのことが明らかとなる. このことを以下に説明する. 他の節と同様に，この節のみを読めば理解できるようにしたい. そこで，コンパクト台を有するウェーブレットについての Daubechies の構成理論を幾つか確認することから始めて，行列の積がどのようにその理論に当てはまるかを説明する. 更に詳しい内容については，この本に含まれている Heil と Colella [HCo] の論文を参照されたい. Strang [St] もまた伸張方程式に関して優れた説明を行っている.

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ を一つの関数 ψ の平行移動と拡大縮小によって得られた $L^2(\mathbb{R})$ 上の正規直交基底，$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k)$ とする. そのような族 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ のウェーブレット基底と呼ばれ，ψ は母ウェーブレットという. $\psi_{j,k}$ は一つの ψ より得られるため，ψ の特性（連続性，滑らかさ，減衰性等）はそのままその基底の要素の特性を決定することは明らかであ

る．ウェーブレットは

$$\psi(t)=\sum_{k}(-1)^{k}c_{1-k}\varphi(2t-k) \tag{9.13}$$

によって得ることができる．ここで $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は二乗和を取ることが可能であり，φ はスケーリング関数である．関数 φ 自身が以下の伸張方程式の解である．

$$\varphi(t)=\sum_{k}c_{k}\varphi(2t-k) \tag{9.14}$$

今，コンパクト台を有するスケーリング関数，従ってコンパクト台を有する母ウェーブレットを考えるので，式 (9.13) 及び (9.14) 内の和は有限和であり，k は 0 から N までの値を取るとする．

ここで式 (9.14) を解く一つの方法を説明する．始めに正規化された，即ち $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt=1$ の解を考える．(畳み込みの形式に変換されて) 式 (9.14) について，(超関数の意味での) フーリエ変換を取ることによって，以下の式

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}}e^{-it\lambda}\sum_{k=0}^{N}c_{k}\varphi(2t-k)dt\\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-i(t+k/2)\lambda}\varphi(t)dt\\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{2}e^{-ik\lambda/2}\hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\\ &= m_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\end{aligned} \tag{9.15}$$

が得られる．ここで $m_0(\lambda)=1/2\sum_{k=0}^{N}c_k e^{-ik\lambda}$ である．

さて，式 (9.15) を反復適用することにより，以下が得られる．

$$\hat{\varphi}(\lambda)=m_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)m_0\left(\frac{\lambda}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{4}\right) \tag{9.16}$$

ここで更に式 (9.16) を反復適用していく．$\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)dt=\hat{\varphi}(0)=1$ であるため，この反復適用によって（収束可能な）無限積が得られる．

$$\hat{\varphi}(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}m_0\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \tag{9.17}$$

しかしながらたとえ式 (9.17) が存在するとしても，φ（従って ψ）が連続または微分可能である保証はどこにも無い．

滑らかな解を得るために，伸張方程式 (9.14) はまず一つの等価な行列問題に置き換えられる．即ち，φ を式 (9.14) に対する（ $[0, N]$ において）コンパクト台を有する連続解とする．また，$V : [0,1] \to \mathbb{C}^N$ を

$$V(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi(t+1) \\ \vdots \\ \varphi(t+N-1) \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

によって定義する．ここで，φ がコンパクト台を有するので，式 (9.14) より

$$V(t) \quad = T_0 V(2t), \quad 0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

そして

$$V(t) \quad = T_1 V(2t-1), \quad \tfrac{1}{2} \le t \le 1 \tag{9.19}$$

が導かれる．ここで T_0 と T_1 は，$(T_0)_{n,k} = c_{2n-k-1}$ 及び $(T_1)_{n,k} = c_{2n-k}$によって与えられる $\mathbb{C}^{N \times N}$行列である．そこで，式 (9.14) を満たす一つのコンパクト台を有する φ を与えた時，

$$V(t) = T_{d_1} V(\tau t) \tag{9.20}$$

を満たす連続な Vが存在する．ここで $t = .d_1 d_2 d_3 \ldots$ は 2 進展開であり，$\tau t = .d_2 d_3 d_4 \ldots$である．更に，この逆の関係もまた成立する（例えば [HCo] を参照）．そこで，帰納的に式 (9.20) は

$$V(t) = T_{d_1} T_{d_2} \ldots T_{d_m} V(\tau^m t) \tag{9.21}$$

となる．ここで再び $t = .d_1 d_2 d_3 \ldots$ かつτ $\tau^m t = .d_{m+1} d_{m+2} \ldots$. である．これらによって，連続性と滑らかさは 2 進展開における「近さ」によって表わされる．そこでもし $2^{-m-1} \le t - s \le 2^{-m}$ であるならば，

$$V(t) - V(s) = T_{d_1} T_{d_2} \ldots T_{d_m} (V(\tau^m t) - V(0)) \tag{9.22}$$

である．ここで，$t = .d_1 \ldots d_m d_{m+1} \ldots d_{m+k}$,$s = .d_1 \ldots d_m$．ここで連続性はより細かい 2 進的近似を意味し，即ち任意の長さと次数の積 $T_{d_1} \cdots T_{d_m}$ を研究する必要が生じる．

上記の積を理解する上でのキーワードは「ランダム行列」である．積の任意の位置において，T_0 と T_1 の何れかが（勿論 1/2 の等確率で）現われる．このような T_0 と T_1 の独立で同等な選択の過程は，行列値を持ち独立同分布 (i.i.d) の Bernoulli 確率変数の列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ でモデル化される．即ち，$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を何らかの確率空間 (Ω, B, P) 上の相互に独立で可測かつ以下の性質

を持つ関数 $X_i : \Omega \to \mathbb{C}^{N\times N}$ の列とする．

$$P\{X_i = T_0\} = P\{X_i = T_1\} = \frac{1}{2}$$

このモデルを念頭に置くことで，積 $T_{d_1}\cdots T_{d_m}$ の漸近性を調べることは積 $X_1\cdots X_m$ の漸近性を調べることと等価になる．このタイプの行列積に関する基礎的な結果が Furstenberg と Kesten [FuKe] により与えられている．その結果のうち，我々のフレームワークに特殊化したものを以下に示す．($\|\cdot\|_0$ は対応する行列の作用素ノルムである．)

定理 9.7 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ を可逆行列 T_0, T_1 を値とする i.i.d Bernoulli 確率変数とする．この時確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|X_1 X_2 \ldots X_n\|_0 = \Lambda$$

となる．ここで，$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ の Λ （極大 Lyapunov 指数）は殆ど確実に一定である．

定理 9.7 を言い替えれば，T_0 と T_1 の殆ど全ての序列についてそれらの積は指数的に成長することになる．勿論，定理 9.7 は大局的な定量的結果に過ぎないので，特定の積の収束性に関する知見を与えるものではない．ランダム行列の積やそれらのエルゴート理論（Oseledec 加法的エルゴート理論等）との関係については，更に多くのことが知られている．これらに関する更なる詳細や最近の知見については，Furstenberg [Fu]，Le Page [Le]，Slud [S]，Goldsheid と Guivarc'h [GoGu] を参照いただきたい．ここでは定理 9.7 と伸張方程式との関連について詳細な議論は行わないことにする．この件は将来の研究として残されている分野であり，今後両者の関連についてあらゆる方向からの議論も行えるようになること希望してこの節を終えることとする．

9.3 フレームと非定常過程，予測問題

ウェーブレット理論に関連して，Duffin と Schaeffer [DuSc] によって導入されたフレームの定式化もまた新たな興味ある問題である（Meyer [Me]，Heil and Walnut [HWa] を参照のこと）．元々の定義以外には，事実上殆どその特徴付けが見いだされていない．この節では多少なりともこの状況を改善し，かつ（実用的にしろ，そうでないにしろ）幾つかの同定規範を提供する．これらの規範の証明に含まれている基本的アイディアは，非定常 2 次系確率過程の幾つかの族の研究から得ている．

初めにこの章のこれ以降を通して用いられる幾つかの記号と定義を示しておく．H は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とノルム $\|\cdot\|$ を有する可分複素 Hilbert 空間とする．H は強トポロジーを有する（また

以下の表現では $\sum_{-\infty}^{\infty} = \lim \sum_{-N}^{N}$) とする）．$\mathcal{B}(\Pi), \mathcal{B}(\Pi^2)$ はそれぞれ円 $\Pi = [-\pi, \pi]$ 及びトーラス Π^2 上の Borel σ-加法族である．**Hilbert** 測度 Z は σ-加法的集合関数 $Z : \mathcal{B}(\Pi) \to H$ であり，$\langle Z(F), Z(G) \rangle = 0$，　$F, G \in \mathcal{B}(\Pi)$ に対し，$F \cap G = \varphi$ が成立する場合には直交局所有限であると言われる．以下では Hilbert 測度 Z に関して関数を積分する必要がある．これは Bartle と Dunford，Schwartz (Dunford and Schwartz [DunSch, IV]) 等の主張に沿う形で行われる．特に Borel 有界関数は彼等の主張によれば積分可能である（より詳細な議論については [DunSch] を参照のこと）．

ある Hilbert 測度 Z を与えた時，$\beta(\cdot,\cdot) = \langle Z(\cdot), Z(\cdot) \rangle$ によって直積集合 $\mathcal{B}(\Pi) \times \mathcal{B}(\Pi)$ 上で定義される β は各変数ごとに σ -加法的である，即ち β は両測度であり一般には $\mathcal{B}(\Pi^2)$ 上の測度には拡張されない．しかしながら，β が非負の値を取る場合には，それは $\mathcal{B}(\Pi^2)$ 上の測度に拡張される (Horowitz [Ho])．特に Z が直交局所有限である場合には，$\langle Z(A), Z(B) \rangle = \|Z(A \cap B)\|^2 = \lambda(A \cap B)$ は Π^2 の対角成分上に集中した有限正値測度を定義する．たとえ β が有界変動でない場合でも，両測度 β に関する（非絶対）積分は定義可能である．ここで，この制限された Morse-Transue 積分をより詳しく，[Hou2] の論文を参考に議論を進める．両測度が Hilbert 測度によってもたらされる，即ち $\beta(\cdot,\cdot) = \langle Z(\cdot), Z(\cdot) \rangle$ である場合で，かつ関数 f と g が Z-積分可能である場合にはいつでも，組 (f, g) もまた以下のように β -積分可能である．

$$\left\langle \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) dZ(\theta),\ \int_{-\pi}^{\pi} g(\psi) dZ(\psi) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \bar{g}(\psi) d\beta(\theta, \psi)$$

さて，もし以下の $A, B > 0$ （フレーム定数）が存在する時，列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset H$ はフレームであることを思い出そう（[DuSc] を参照）．

$$A\|x\|^2 \le \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \le B\|x\|^2, \quad \forall\ x \in H \tag{9.23}$$

このフレームは $A = B$ の場合は常に緊密 (tight) であり，またもしフレームの要素のどの一つの除去によってもフレームでなくなるならば完全 (exact) である．

式 (9.23) は非常に異なった性質の二つの不等式から成っている．はじめに有界性，即ち右側の不等式について考える．そのような条件を満たす列は **Bessel** 級数（Young [Y] 参照）としても知られている．この事前の知見の助けを借りることで，最初の結果を示そう．

定理 9.8　以下の項目は同値である．

i. 全ての Hに属する x について，$\sum_{-\infty}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \le B\|x\|^2$

ii. $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty\}$ に属する全ての $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$について，
$\|\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x_n\|^2 \le B \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$

iii. 以下のような (唯一の) Hilbert 測度 Z が存在する．$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} dZ(\theta), n \in \mathbb{Z}$ かつ $L^2(\Pi) =$

$\{f :]-\pi,\pi] \to \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < +\infty\}$ に属する全ての fについて，$\| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) dZ(\theta)\|^2 \leq B\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$

***iv*.** 以下のような（唯一の正値な）両測度 β が存在する．$\langle x_n, x_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\psi}d\beta(\theta,\psi)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ ，かつ $L^2(\Pi)$ に属する全ての fについて，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\bar{f}(\psi)d\beta(\theta,\psi) \leq B\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

***v*.** Hilbert 空間 $K \supset H$ と $x_n = Qy_n$ であるような $\|y_n\|_K^2 = B$ を有する直交列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset K$ が存在する．

ここで Q は K から H への直交射影である．

証明　上記の同値性は新しいものではない．最初のものは非常に良く知られている（例えば [Y] を参照）．他のものは [Hou1] により一般的述べられており，その文献には正確な参考文献や更なる詳細内容が記載されている．簡単に言えば ***iii*** は，$T : \sum_{-N}^{N}\alpha_n e^{in\theta} \to \sum_{-N}^{N}\alpha_n x_n$ が $C(\Pi)$ （ Π 上の連続関数）から H への有界線形作用素に拡張され，従って Hilbert 測度 H_1 によって表されるという事実から導かれる．また，***iii*** は明らかに ***iv*** を意味している．また，

$$\left\|\sum_{-N}^{N}\alpha_n Qy_n\right\|_K^2 \leq \|P\|^2\left\|\sum_{-N}^{N}\alpha_n y_n\right\|^2 \leq \sum_{-N}^{N}|\alpha_n|^2\|y_n\|^2 = B\sum_{-N}^{N}|\alpha_n|^2$$

かつ $\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{ii}$ であることも明白である．最後に $\boldsymbol{iv} \Rightarrow \boldsymbol{v}$ の証明を行う．はじめに $[f,g] = B\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\bar{g}(\theta)d\theta - \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\bar{g}(\psi)d\beta(\theta,\psi)$ は $C(\Pi)$ 上の半内積を定義する．同値類をとり完備化すれば $(C(\Pi),[\cdot,\cdot])$ は Hilbert 空間 H_1 となる。ここで， $K = H \oplus H_1$, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H_1$ は $\{e^{in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ （の像），$y_n = x_n + w_n$ とする．この時，$x_n = Qy_n$ であることは明らかであり，更に

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle_K = \langle x_n, x_m\rangle + [w_n, w_m] &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\psi}d\beta(\theta,\psi) + B\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta \\ &\quad -\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-im\psi}d\beta(\theta,\psi) \\ &= B\delta_{n,m}\end{aligned}$$

である．ここで $\delta_{n,m}$ は Kronecker の記号である． ∎

注意 9.9　***iv*** において，両測度 β は必然的に正定値 (p.d.) となる，即ち任意の $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\Pi)$ について ，$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i\bar{a}_j\beta(A_i, A_j) \geq 0$ となる．両測度 の Fourier 係数は例外的なものではなく，むしろ以下の意味で典型的である．列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H$ が $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to-\infty} a_n$ の場合に $\langle x_n, x_n\rangle = a_n\delta_{n,m}$, $0 \leq a_n \leq C$ （C は一つの式ごとに値を変える可能性を持つ定数である．）を満たすものとする．その時，$\langle x_n, x_n\rangle = \hat{\beta}(n,m)$ であ

るが β は Π^2 上の測度ではない．*iv* の記述は，Bessel 級数の性質を $L^2(\beta) = \{f : \Pi \to \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\bar{f}(\psi)d\beta(\theta,\psi) < +\infty\}$ における指数関数列に変換するという意味で興味深いものである．

条件 *ii* の一つの言い替えは，2 重無限の Gram 行列 $G = (G_{n,m} = \langle x_n, x_m\rangle)_{n,m\in\mathbb{Z}}$ は $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の有界正値線形作用素である．ここで，*ii* を等価なスペクト半径形式の条件を示すことによって多少修正する．

命題 9.10　$G = (G_{n,m} = \langle x_n, x_m\rangle)_{n,m\in\mathbb{Z}}$ とする．この時，以下の項目は同値である．

i. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Bessel 級数である．
ii. $((G^{2^p})_{n,n})^{1/2^p} \le B,\ p,n \in \mathbb{Z},\ p \ge 0$

証明　切断 $G_N = (G_{n,m})_{-N\le n,m\le N}$ が一様に有界である，即ち $\|G_N\|_0 \le B$ の時かつその時に限り，G は $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の有界線形作用素である（[Y,IV] 参照）．ここで，$\|\cdot\|_0$ は作用素ノルムである．そこで，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を Bessel 級数とする，即ち G は有界とする．この時，任意の正整数 N と p について行列 G_N は半正定値であるため，$((G^{2^p})_{N,N})^{1/2^p} \le \|G_N^{2^p}\|_0^{1/2^p} = \|G_N\|_0 \le B$ となる．一方，再び G_N は $N\times N$ の半正定値行列であるため，

$$\|G_N\|_0 = \|G_N^{2^p}\|_0^{1/2^p} \le N^{1/2^p} \sup_{-N\le n\le N}\{(G^{2^p})_{n,n}\}^{1/2^p} \le N^{1/2^p}B$$

となる．$p\to+\infty$ とすることで，残りの結果が得られる．　　▮

Hölder の不等式を反復適用することにより，$\{(G^{2^p})_{n,n}\}^{1/2^p} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle x_n, x_k\rangle|$ が導かれ，また命題 9.10 はいわゆる Schur の補題を含むことがわかる（[Y,IV] 参照）．

ここで次に式 (9.23) の左側の不等式について調べることにする．まず,（例えば）完全正規直交列でない場合は，式 (9.23) の左側が

$$A\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_n|^2 \le \left\|\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|^2 \tag{9.24}$$

によって置き換えられないのは明らかである．従って，フレームは **Riesz–Fischer** 級数とは限らないしまた逆も真とはいえない．しかしながら、その考察の前に H における列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は，全ての $n,m\in\mathbb{Z}$ について $\langle x_n, x_m\rangle = \langle x_{n+1}, x_{m+1}\rangle$ である時「定常」であることを思い出しておく．従って，$\langle x_n, x_m\rangle = \langle x_{n-m}, x_0\rangle$ となり，そして Herglotz の定理より Π 上の（唯一の）正値な測度 ν（ν はいわゆる列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ のスペクトルである）が存在して，$\langle x_n, x_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}d\nu(\theta)$ となる．同じく，Hilbert 測度 Z が直交性を持って局所有限で

ある場合には，$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} dZ(\theta), n \in \mathbb{Z}$ である．

定理 9.11　完全列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して，以下の項目は同値である．

i. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は限界 A と B を有する完全なフレームである．

ii.

$$A \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \le \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|^2 \le B \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2, \quad \forall\, \alpha = \{\alpha_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \tag{9.25}$$

iii. 正規直交列 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と可逆な有界線形作用素 $T: H \to H$ が存在し，$x_n = Te_n,\ n \in \mathbb{Z}$ である．

iv. スペクトルとその逆が本質的に有界である，即ち $d\nu(\theta) = f(\theta)d\theta$, $f, f^{-1} \in L^\infty(\Pi)$ である定常な列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と，$x_n = Ty_n,\ n \in \mathbb{Z}$ であるような可逆な有界線形作用素 $T: H \to H$ が存在する．

v. 可逆な二つの有界線形作用素 T と S が存在し， $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|S^n\|_0 < +\infty;\ x_n = S^n x_0,\ n \in \mathbb{Z};$ そして， $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ はスペクトルとその逆が本質的に有界な定常列である．

証明　***i***, ***ii*** 及び ***iii*** の同値性については Young [Y] が証明を与えておりよく知られている．正規直交列は一定のスペクトル，即ち $d\nu(\theta) = d\theta$ を持つ定常列であるため，明らかに ***iii*** であれば ***iv*** が成り立つ．ここで ***iv*** が成り立つと仮定する．この時，$\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が定常なので，その平行移動は H 上のユニタリ作用素である（$\{y_n\}$ は完全である.）従って

$$x_n = Ty_n = TU^n y_0 = TU^n T^{-1} T y_0 = TU^n T^{-1} x_0$$

即ち，$S = TUT^{-1}$ と $y_n = T^{-1}x_n$ は ***v*** の要請を満たす．最後に $y_n = Tx_n$ が $L^\infty(\Pi)$ においてスペクトルとその逆を有し定常であるとする．この時，

$$\frac{1}{\|T\|} \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n y_n \right\| \le \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| = \left\| T^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n y_n \right\| \le \|T^{-1}\| \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n y_n \right\|$$

また，$f, f^{-1} \in L^\infty(\Pi)$ について $\|\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n y_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}|^2 f(\theta) d\theta$ であるため，***v*** であるならば ***ii*** が成立する．　∎

定理 9.8 の ***ii*** と ***iii*** より，上記の ***ii*** を以下のように書き直せることは明らかである．

$$A \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \le \left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) dZ(\theta) \right\|^2 \le B \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

または

$$A \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \bar{f}(\psi) d\beta(\theta, \psi) \le B \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

さてここで，Hilbert 空間内のフレームが必ず満たすもう一つの簡単な条件を示すことにする．フレーム $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ に関して，フレーム作用素 T が $Tx = \sum_{-\infty}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n$, $x \in H$ により定義される（再び [DuSc] を参照のこと）．T は $A \le T \le B$ で正値かつ可逆である，即ち全ての $x \in H$ について，$A\langle x,x\rangle \le \langle Tx,x\rangle \le B\langle x,x\rangle$ である．フレーム作用素を用いることで，フレームはトレース族にはなり得ないことを表す以下のような簡単な命題を得る．

命題 9.12　$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をフレームとする．その時 $\sum_{-\infty}^{\infty}\|x_n\|^2 = +\infty$ である．

証明　$\sum_{-\infty}^{\infty}\|x_n\|^2 < +\infty$，かつ $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が H の正規直交基底とする．この時，

$$
\begin{aligned}
+\infty &> \sum_{-\infty}^{\infty}\|x_n\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle x_n, e_k\rangle|^2 \\
&= \sum_k\sum_n|\langle x_n, e_k\rangle|^2 = \sum_k\langle Te_k, e_k\rangle \ge \sum_{-\infty}^{\infty}A\|e_k\|^2 = +\infty
\end{aligned}
$$

∎

この節を終えるにあたって最後に，定理 9.11 の条件について他の解釈を可能にする予測理論で考え出された知見を示す．これらの知見を取り上げる別の意図は，これらが多重解像度解析（Mallat [M], Meyer [Me]），その他に関連が深いためである．

列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H$ に関して，この列に関する「情報」を包含する空間の集合が存在し、“現在”と“過去”である部分空間 $H_n = \bar{sp}\{x_k : k \le n\}$ とする．ここで $\bar{sp}\{\cdot\}$ は対応する集合の線形閉区間である．離れた過去は $H_{-\infty} = \cap_{n\in\mathbb{Z}}H_n$，全時間領域は $H_{+\infty} = \bar{sp}\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{Z}}H_n}$ と表される．

これらの空間を用いて，列の分類が可能となる．即ち，もし $H_{-\infty} = H_{+\infty}$ ならば $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は純粋に決定論的であり，もし $H_{-\infty} = \{0\}$ ならば純粋に非決定論的であり，またもし $H_{-\infty} \not\subset H_{+\infty}$ ならば非決定論的である．各 n について $H_{n-1} \subset H_n$ であるため，$x_n = (x_n|H_{n-1}) + e_n$ と書ける．ここで $(x_n|H_{n-1})$ は H_{n-1} 上への x_n の直交射影である．明らかに列 $e = \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{x_n - (x_n|H_{n-1})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は直交列で $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$の予測残差と呼ばれる．

上述の時間領域解析の重要性は，以下のよく知られた Wold-Cramer 分解（Cramer [Cr] 参照のこと）によって示される．

定理 9.13　列 $x = \{x_n\}_{n\subset\mathbb{Z}} \subset H$ は $x = u + v$ と唯一とおりに分解可能である．ここで列 $u = \{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は以下の性質を持つ:

i. 全ての $n, m \in \mathbb{Z}$ について，$\langle u_n, v_m\rangle = 0$

ii. u は純粋に非決定論的であり，v は純粋に決定論的である．加えて，u は以下のように分解

される．

iii. $u_n = \sum_{k=-\infty}^{n} a_{n,k} e_k$, $n \in \mathbb{Z}$. ここで $e = \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は予測残差列である．

列 u と v はそれぞれ $u_n = (x_n | H_n \ominus H_{-\infty})$, $v_n = (x_n | H_{-\infty})$, $n \in \mathbb{Z}$ と表される．ここで，$\sigma_k = \langle e_k, e_k \rangle$ とおく．すると，$\|u_n\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{n} |a_{n,k}|^2 \sigma_k < +\infty$ となる．係数 $a_{n,k}$ は $\sigma_k > 0$ の時かつその時に限り唯一つに定まる．一方，$a_{n,k}\sigma_k$ は $a_{n,k}\sigma_k = \langle u_n, e_k \rangle$, $k < n$ によって唯一つに定まり，$a_{n,n}\sigma_n = \sigma_n = \bar{a}_n \sigma_n$, $n \in \mathbb{Z}$ である．

Bessel 級数が純粋に非決定論的であること，即ち $x_n = \sum_{k=-\infty}^{n} a_{n,k} e_k$, $n \in \mathbb{Z}$ であることを明らかにすることは困難ではない ([Hou2])．この最後の知見は以下を導く．

定理 9.14 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ を完全列とする．必要十分条件は以下の条件を満たす二つの定数 A と B が存在することである．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は限界 A と B を持つ完全なフレームとなる．

$$A \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \le \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{n} a_{n,k} \sqrt{\sigma_k} \alpha_k \right|^2 \le B \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2, \quad \forall\, \alpha = \{\alpha_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

証明 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が，完全なフレームである必要十分条件はそのグラミアン行列 G が $\ell^2(\mathbb{Z})$ 可逆な有界線形作用素であることである．しかし，$G = \Gamma\Gamma^*$ である．ここで，2 重無限行列 Γ は上三角であり，

$$(\Gamma)_{n,k} = \begin{cases} a_{n,k}, \sqrt{\sigma_k} & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

によって与えられる．この時，有界性と可逆性は（G が正値であるため），

$$A\langle \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le \langle \Gamma\Gamma^* \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le B \langle \alpha, \alpha \rangle_{\ell^2(S\mathbb{Z})}, \quad \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

のように表される．これにより証明された． ∎

この結果を最後にこの節を終えることとする．更に，定常列とフレーム，予測理論，重みつきノルム不等式の間の相違や関連については，Benedetto [B1] を参照されたい．

9.4 指数関数のフレームと不規則サンプリング

この節では，弱定常過程についてそのサンプルデータ集合からの経路再構成について考察する．ここで紹介される結果は，統計的不規則サンプリングについての研究文献である [Hou3] によるものである．Benedetto [B2] によるフレームと不規則サンプリングに関する記事も，より充実した参考文献紹介と共に（決定論的立場での）この分野に関する良い解説である．

ここで方法の枠組みを導入し,「欠値データ」問題の研究に対する指数のフレームの有効性を示すことにする.

(Ω, B, P) を確率空間とし，また $L^2(P)$ をそれに対応するノルム $((E|\cdot|^2)^{1/2} = \|\cdot\|_2$ （E は期待値）を有する複素確率変数の空間とする．ここで考える確率過程の族は（二乗平均連続で弱い）定常過程の族とする．良く知られているように，定常過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は積分表現 $X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$ を持つ．ここで，確率測度 Z は直交的に局所有限であるものとする．また，同様に F を有界な正値の測度とした時に，X は共分散関数 $R(t) = EX_t\bar{X}_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dF(\lambda)$ を持つ．もし $(-\gamma, \gamma)$, $\gamma > 0$ の外側で $Z = 0$ (a.s. P) であるならば，定常過程 X は $(-\gamma, \gamma)$ に「帯域制限」されるという.

前節で述べたように，Hilbert 空間 H において与えられるフレーム $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ について，$Tx = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$ によって定義されるフレームは, 全ての $x \in H$ に関する $x = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle x, T^{-1}x_n\rangle x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle x, x_n\rangle T^{-1}x_n$ となり有界かつ可逆である．更に，$A \le T \le B$ （A と B はフレーム限界）であるので，一様な作用素の位相において $T^{-1} = B^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(I - B^{-1}T)^n$ となる（この最後の事実は $B^{-1}T$ の Neumann 展開から簡単に導かれる）.

[DuSc] に見るように，実数列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は，もし $D = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |t_k - k| < +\infty$ かつ $\delta = \inf_{k\neq n} |t_k - t_n| > 0$ ならば,「一様密度」1 を有するという．この族の列に関しては，Duffin と Schaeffer が Levinson [Le, IV] と Paley, Wiener [PWi] に続いて，非調和 Fourier 級数の理論を構築している．彼らの最も重要な結果は以下のようにまとめられる.

補題 9.15　$\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は一様密度 1 を有し，$0 < \gamma < \pi$ とする．この時，$\{e^{it_k\cdot}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(-\gamma, \gamma)$ について一つのフレームとなる．また，任意の $g \in L^2(-\gamma, \gamma)$ について，$L^2(-\gamma, \gamma)$ 内で $g = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} (1/2\gamma \int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x)g(x)dx)e^{it_k\cdot}$ であるような唯一の（注意 9.16 を見よ）列 $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\gamma, \gamma)$ が存在する．更に，

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x)g(x)dx \right) e^{it_k\cdot}$$

は $L^2(-\pi, \pi)$ で収束し，対応する通常の非調和な Fourier 級数は任意の $[-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$, $\epsilon > 0$ で一様に同等収束する.

注意 9.16　上記の結果における一意性の部分は，もし $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{it_k\cdot}$ が g のもう一つの非調和 Fourier 展開であるならば,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \ge \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x)g(x)dx \right|^2$$

が成立することである．更に，ここで h が部分和

$$\sum_{-n}^{n}\left(\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx\right)e^{it_k\lambda}$$

の（$L^2(-\pi,\pi)$）における）極限を表すとする．この時，$\lambda\in[-\pi+\epsilon,\pi-\epsilon]$, $\epsilon>0$ について一様に

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{-n}^{n}\hat{h}(k)e^{ik\lambda}-\sum_{-n}^{n}\left(\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx\right)e^{it_k\lambda}\right\}=0$$

が成立する．一様な密度 1 を持つ列は，その有限な数の多数の要素を取り除いてもこの性質を維持することは明らかである．従って，補題 9.15 の結論はそのような変化によっても変わりがない．

列 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が $D=\sup_{k\in\mathbb{Z}}|t_k-k|<1/4$ でかつ $\delta=\inf_{k\neq n}|t_k-t_n|>0$ を満たす場合，γ を π によって置き換えることが可能である．更にこの時，h_k は $\Psi_k(t)=1/2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\bar{h}_k(x)e^{ixt}dx=G(t)/G'(t_k)(t-t_k)$ で与えられる．ここで，$G(t)=(t-t_o)\prod_{n=1}^{\infty}(1-t/t_n)(1-t/t_{-n})$, $t\in\mathbb{R}$ である．関数 Ψ_k は Lagrange 補間関数と呼ばれ

$$\Psi_k(t_n)=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 1 & k=n\end{cases}$$

である．更に $t_k=k$ の時，$G(t)=\sin\pi t/\pi$ かつ $\Psi_k(t)=\sin\pi(t-k)/\pi(t-k)$ である．限界 1/4 は緊密であり，$\{e^{it_k\cdot}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(-\pi,\pi)$ の有界な無条件基底を構成するための十分条件である（これは Kadec の 1/4 条件として知られている [K]）．この条件は既に Levinson [Le, IV] によって示されており，元々Paley-Wiener に端を発する．$D<1/4$ の場合については，級数展開は一つのサンプリング点の除去によって成立しなくなってしまう．

次の補題はサンプリング係数 $1/2\gamma\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx$ についてより明示的な知見を与えるものである．この結果は [Hou3] において既に示されており，元々Benedetto と Heller [BHe] によって提唱されたものである（[B2] もまた参照のこと）．

補題 9.17 $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が一様な密度 1 を有し，かつ $B\geq(1+|e^{\gamma D}-1|)^2$, $0<\gamma\leq\pi$とする．この時，$1/2\gamma\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx=B^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}(-B)^{p-n}\binom{n}{p}\Phi(n-p,t_k,\gamma)$ である．ただしここで $\Phi(0,t_k,\gamma)=1/2\gamma\int_{-\gamma}^{\gamma}e^{-it_kx}g(x)dx$ であり，また $q\geq1$ について

$$\Phi(q,t_k,\gamma)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_{q-1}=-\infty}^{\infty}\sum_{m_q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}e^{-it_{m_1}x}g(x)dx$$
$$\times\frac{\sin\gamma(t_{m_1}-t_{m_2})\cdots\sin\gamma(t_{m_{q-1}}-t_{m_q})\sin\gamma(t_{m_q}-t_k)}{\gamma(t_{m_1}-t_{m_2})\cdots\gamma(t_{m_{q-1}}-t_{m_q})\gamma(t_{m_q}-t_k)}$$

である．

証明　フレーム作用素は以下の式で与えられる．

$$Tg(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\lambda} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-it_k x} g(x) dx e^{it_k \lambda}, \quad g \in L^2(-"\gamma, \gamma)$$

更に，$L^2(-\gamma,\gamma)$ において

$$g(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x) g(x) dx e^{it_k \lambda}$$

かつ

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x) g(x) dx = \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{it_k x} T^{-1} g(x) dx$$

である（ここでは $h_k = T^{-1} e^{it_k \cdot}$ である）．$B^{-1}T$ の逆により，

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma}^{\gamma} \bar{h}_k(x) g(x) dx &= B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-it_k x} (I - B^{-1}T)^n g(x) dx \\ &= B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} (-B^{-1})^{n-p} \binom{n}{p} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-it_k x} T^{n-p} g(x) dx \end{aligned}$$

を得る．T の定義の性質から $\Phi(0, t_k, \gamma) = 1/2\gamma \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-it_k x} g(x) dx$ であり，また $n - p \geq 1$ について，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{it_k x} T^{n-p} g(x) dx \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_{n-p-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{n-p}=-\infty}^{\infty} \\ &\quad \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{-it_{m_1} x} g(x) dx \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i(t_{m_1} - t_{m_2})x} dx \cdots \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i(t_{m_{n-p-1}} - t_{m_{n-p}})x} dx \\ &\quad \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i(t_{m_{n-p}} - t_k)x} dx \end{aligned}$$

である．指数関数を積分し，推定 $B = (1 + |e^{\gamma D} - 1|)^2$ を用いることで結果が導かれる（[DuSc] の補題 2 を参照のこと）． ∎

上記で示された結果の助けを借りて，少し脇道に入ってこれからの数ページにおいては主に以下の定理について考察する．

定理 9.18　X は定常かつ $(-\gamma, \gamma)$, $0 < \gamma < \pi$ の範囲で帯域制限されているとし，また $\{t_k\} = \{k, s_1, \ldots s_\ell\}_{k \in \mathbb{Z} - \{k_1, \ldots, k_r\}}$ とする．その時，$L^2(P)$ 上で $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) X(t_k)$

であり，これは $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分集合上一様である．この列は，もし $\lim_{p\to\infty} e^{i\gamma t}Z(\gamma - 2^{-p}, \gamma) + e^{-i\gamma t}Z(-\gamma, -\gamma + 2^{-p}) = 0$ (a.s. P) の時，またその時に限って概収束する．

Ψ_k は

$$\Psi_k(t) = \frac{\gamma}{\pi}\left\{\frac{\sin\gamma(t_k - t)}{\gamma(t_k - t)} + \frac{\gamma}{\pi}\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\frac{\sin\gamma(k_p - t)}{\gamma(k_p - t)}\frac{\sin\gamma(t_k - k_q)}{\gamma(t_k - t_q)}V_{q,p}\right.$$
$$\left. -\frac{\gamma}{\pi}\sum_{p=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\frac{\sin\gamma(s_p - t)}{\gamma(s_p - t)}\frac{\sin\gamma(t_k - s_q)}{\gamma(t_k - s_q)}V_{q,p}\right\}$$

で与えられる．ここで $V_{q,p}$ は以下の V の逆行列の (q,p) -要素である．

$$V = \left(I - \frac{\gamma}{\pi}\frac{\sin(f_p - f_q)}{\gamma(f_p - f_q)}\right)_{p,q=1,\ldots,r+\ell}$$

また，$t\in\mathbb{R}$ であり，

$$f_p = \begin{cases} k_p & p = 1,\ldots,r \\ s_p & p = r+1,\ldots,\ell \end{cases}$$

である．

[Hou3] の結果の特別な場合であるこの定理は，統計的な「欠値データ」に関する結果であると解釈できる．一様な密度 d の条件と，規則的なサンプリング点及びギャップを有する不規則な点が混在するデータ集合に関して，スペクトルが $(-\gamma d, \gamma d)$, $\gamma < \pi$ の範囲に含まれる過程の部分は厳密に（$L^2(P)$ 内で）復元される．帯域制限の仮定の下での 2 乗平均誤差の主要な部分は，$E|\int_{|\lambda|\geq\gamma d} e^{it\lambda}dZ(\lambda)|^2 = \int_{|\lambda|\geq\gamma d} dF(\lambda)$ によって押さえられる（「欠値データ」問題に関するより詳細な議論については Parzen [Pa] を参照のこと）．

次にまず定理 9.18 の Ψ_k の式を与える計算を示す．補題 9.15 の $g(x)$ を e^{itx} で置き換えることにより，より不格好ではあるが別の式を導くことができる．詳細な説明と完全な証明はやはり [Hou3] に示されてる．

補題 9.19　$\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell\}_{k\in\mathbb{Z}-\{k_1,\ldots,k_r\}}$ とし，また $0 < \gamma < \pi$ とする．補題 9.15 の内容はこの場合も以下のように成立する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx &= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma \\ &\quad + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\langle g(\cdot), e^{ik_p\cdot}\rangle_\gamma\langle e^{ik_q\cdot}, e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma V_{q,p} \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sum_{p=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\langle g(\cdot), e^{is_p\cdot}\rangle_\gamma\langle e^{is_q\cdot}, e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma V_{q,p}\end{aligned}$$

ここで，$V_{q,p}$ は以下のものの逆行列の (q,p)-要素である．

$$\left(I-\frac{\gamma\sin\gamma(f_p-f_q)}{\pi\gamma(f_p-f_q)}\right)_{p,q=1,\ldots,r+\ell}$$

なお，

$$f_p=\begin{cases} k_p & p=1,\ldots,r \\ s_p & p=r+1,\ldots,r+\ell \end{cases}$$

である．

証明　補題 9.15 により，$L^2(-\gamma,\gamma),\ 0<\gamma<\pi$ に関して指数関数列 $\{e^{it_k\cdot}\}$ は緊密でも完全でもないフレームを構成する．ここで任意の $g\in(L^2(-\gamma,\gamma),\ \langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma)$ について Plancherel の定理により，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\neq k_1,\ldots,k_r}|\langle g(\cdot),e^{ik\cdot}\rangle_\gamma|^2+\sum_{j=1}^{\ell}|\langle g(\cdot),e^{is_j\cdot}\rangle_\gamma|^2\\
&\quad\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle g(\cdot),e^{ik\cdot}\rangle_\gamma|^2+\ell\|g\|_\gamma^2\\
&\quad=\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma}e^{-ikx}g(x)dx\right|^2+\ell\|g\|_\gamma^2\\
&\quad=\left(\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2+\ell\right)\|g\|_\gamma^2
\end{aligned}$$

である．従って，フレーム作用素は逆変換を持ち，$T^{-1}=C\sum_{n=0}^{\infty}(I-CT)^n$ を得る．なお，ここで $C=((\pi/\gamma)^2+\ell)^{1/2}$ である．しかし，フレーム作用素 T は $T=\pi/\gamma I-S$ によってもまた与えられる（残念ながら $\|\gamma/\pi S\|<1$) かどうかは明らかではない）．ただしここで，$Sg(\lambda)=\sum_{j=1}^{r}\langle g(\cdot),e^{ik_j\cdot}\rangle_\gamma e^{ik_j\lambda}-\sum_{j=1}^{\ell}\langle g(\cdot),e^{is_j\cdot}\rangle_\gamma e^{is_j\lambda}$ である．従って一様な作用素の位相において，$T^{-1}=C\sum_{n=0}^{\infty}((1-C\pi/\gamma)I+CS^n)$ となる．そこで，$L^2(-\gamma,\gamma)$ において

$$\begin{aligned}
g(\lambda)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dxe^{it_k\lambda}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle T^{-1}g(\cdot),e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma e^{it_k\lambda}
\end{aligned}$$

である．従って，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx\\
&\quad=C\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\left(\left(1-C\frac{\pi}{\gamma}\right)I+CS\right)^n g(\cdot),e^{it_k\cdot}\right\rangle_\gamma
\end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + C\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\left(1-C\frac{\pi}{\gamma}\right)^{n-p}C^p\langle S^p g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma \tag{9.26}$$

となる．最後に，$\langle S^n g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma,\ n\geq 1$ を評価する必要がある．ここで，${}^k x$ を

$${}^k x_{(p-1)(r+\ell)+q} = \langle \pm g(\cdot), e^{if_p\cdot}\rangle_\gamma\langle e^{if_q\cdot}, e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma, p=1,\ldots,r+\ell$$

を要素とする $1\times(r+\ell)^2$ の行列とし， $q=1,\ \ldots,\ r+\ell,\ (q=1,\ \ldots,\ r$ の場合$+g$ ，そして $q=r+1,\ \ldots,\ r+\ell$の場合 $-g$ ）とした時， $\langle S^n g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma = {}^k x M^{n-1}y,\ n\geq 1$ となることを記しておく（詳細は [Hou3] を参照のこと）．ここで M は $(r+\ell)^2\times(r+\ell)^2$ の全く同一のブロック $(\langle e^{if_p\cdot}, e^{if_q\cdot}\rangle_\gamma)_{p,q=1,\ldots,r+\ell}$を有する $(r+\ell)^2\times(r+\ell)^2$ のブロック対角行列とし，y は

$$y_q = \begin{cases} 1 & q=(p-1)(r+\ell)+p,\ p=1,\ldots,r+\ell \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を要素とする $(r+\ell)^2\times 1$ 行列とする．そこで式 (9.26) と $\langle S^p g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma$ の形から以下が導かれる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + C\,{}^k x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\left(1-C\frac{\pi}{\gamma}\right)^{n-p}C^pM^{p-1}y \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + C\,{}^k xM^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(1-C\frac{\pi}{\gamma}\right)I+CM\right)^n - \left(1-C\frac{\pi}{\gamma}\right)^n\right\}y \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + C\,{}^k xM^{-1}\left\{\left(C\frac{\pi}{\gamma}I-CM\right)^{-1} - \left(C\frac{\pi}{\gamma}\right)^{-1}\right\}y \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + \frac{\gamma}{\pi}\,{}^k xM^{-1}\left\{\left(I-\frac{\gamma}{\pi}M\right)^{-1} - I\right\}y \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\,{}^k x\left(I-\frac{\gamma}{\pi}M\right)^{-1}y
\end{aligned} \tag{9.27}$$

最後に，式 (9.26) と式 (9.27)，そして M の形から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma}\bar{h}_k(x)g(x)dx \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\langle g(\cdot), e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma + \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r}\langle g(\cdot), e^{ik_p\cdot}\rangle_\gamma\langle e^{ik_q\cdot}, e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma V_{q,p} \\
&\quad - \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sum_{p=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\langle g(\cdot), e^{it_p\cdot}\rangle_\gamma\langle e^{it_q\cdot}, e^{it_k\cdot}\rangle_\gamma V_{q,p}
\end{aligned}$$

を得る． ∎

さてこれで（補題 9.19 の $g(\cdot)$ を $e^{it\cdot}$ によって置き換えることにより）Ψ_k は明示的に与えられた．ここで，上記の定理証明に関する幾つかの重要点を示したい．初めに，同等収束の結論（補題 9.15）ないしは核 $\sum_{-n}^{n} \Psi_k(t)e^{it_k\lambda}$ の有界性は L^2 における結果を与える．

定理 9.20　X は定常かつ $(-\lambda, \lambda)$, $0 < \lambda < \pi$, の範囲で帯域制限されているとし，また $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{k, s_1, \ldots, s_\ell\}_{k\in\mathbb{Z}-\{k_1,\ldots,k_r\}}$ とする．その時，$L^2(P)$ で $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)X(t_k)$ であり，これは R のコンパクトな部分集合上一様である．

証明　前述の補題を関数 $g_t(\lambda) = e^{it\lambda}$, $t \in \mathbb{R}$, $-\gamma < \lambda < \gamma$ に適用し，

$$X(t) = \int_{|\lambda|<\gamma} e^{it\lambda} dZ(\lambda) = \int_{|\lambda|<\gamma} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \Psi_k(t)e^{it_k\lambda} dZ(\lambda)$$

を得る．ここで極限と積分の操作順序を交換する．これは以下のようにして可能である．まず $L^2(-\pi,\pi)$ において，$e^{it''\lambda}\chi_{(-\gamma,\gamma)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)e^{it_k\lambda}$ である．従って，同等収束の結果（補題 9.15 または 9.19 と注 9.16）より，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\gamma<\lambda<\gamma} \left| \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin\gamma(t-k)}{\gamma(t-k)} e^{ik\lambda} - \Psi_k(t)e^{it_k\lambda} \right| = 0$$

である．しかし，$\sup_{-\gamma<\lambda<\gamma} |\sum_{k=-n}^{n} \sin\gamma(t-k)/\gamma(t-k)e^{ik\lambda}| \le C$, $(t \in K \subset \mathbb{R}$, K はコンパクトかつ $n \ge 0)$ は古典的結果である．X のスペクトル測度 F は有界であるため，有界収束定理から結果を得ることが可能である．∎

L^2-収束が確かめられたため，今度は概収束に関する結果を探すことにする．次の（証明なしの）補題は核 $\sum_{k=-n}^{n} \Psi_k(t)e^{it_k\lambda}$ について幾つかの有益な推定評価をもたらす．

補題 9.21　$S_n(\lambda) = \sum_{k=-n}^{n} \Psi_k e^{it_k\lambda}$, $\lambda \in (-\gamma, \gamma)$, $t \in K \subset \mathbb{R}$, K はコンパクトとする．

i. $|S_n(\lambda) - S_m(\lambda)| \le C(m-n)/m$, $2^p \le n < m < 2^{p+1}$
ii. $|S_n(\pm\lambda) - S_m(\pm\lambda)| \le C\{(m-n)|\gamma \mp \lambda| + 1/n\}$, $1 \le n < m$, $\gamma - 1/n \le \pm\lambda < \gamma$, $\lambda \ge 0$
iii. $|S_n(\pm\lambda) - e^{\pm i\lambda t} + e^{\pm i\gamma t}| \le C\{n|\gamma \mp \lambda| + 1/n\}$, $n \ge 1$, $\gamma - 1/n \le \pm\lambda < \gamma$, $\lambda \ge 0$"
iv. $|S_n(\pm\lambda) - e^{\pm i\lambda t}| \le C\{1/n|\gamma \mp \lambda| + 1/n\}$, $n \ge 1$, $0 \le \pm\lambda \le \gamma - 1/n$, $\lambda \ge 0$

以上の推定評価と Gaposhkin [G] による証明の戦略を合わせることにより，証明のための全ての準備が整ったことになる．

証明　（定理 9.18 の証明の概略）　始めに以下の式が示される．

$$\lim_{p\to+\infty} \max_{2^p<n\le 2^{p+1}} |S_n X - S_{2^p} X| = 0$$

即ち，この問題は 2 進整数を用いた核 $S_nX(t) = \sum_{-n}^{n} \Psi_k(t)X(t_k)$ に関する考察に簡略化可能である．これは n の 2 進分解と上記の推定評価 $\boldsymbol{i,ii,iv}$ を用いることにより可能である．一度，問題の最初の簡略化が行われれば，

$$\begin{aligned} X(t) - S_nX(t) &= \{-S_nX(t) + S_{2^p}X(t)\} \\ &\quad +\{X(t) - S_{2^p}X(t) - e^{i\gamma t}Z(\gamma - 2^{-p}, \gamma) - e^{-i\gamma t}Z(-\gamma, -\gamma + 2^{-p})\} \\ &\quad +\{e^{i\gamma t}Z(\gamma - 2^{-p}, \gamma) + e^{-i\gamma t}Z(-\gamma, -\gamma + 2^{-p})\} \end{aligned}$$

と書くことができる．定理 9.18 を証明することは，$\mathbb{R}$ のコンパクト集合内の t に関して一様に確率 1 で

$$\lim_{p\to\infty} \{X(t) - S_{2^p}X(t) - e^{-i\gamma t}Z(-\gamma, -\gamma + 2^{-p}) - e^{i\gamma t}Z(\gamma - 2^{-p}, \gamma)\} = 0$$

が成立することと等価である．これは言い換えれば以下を示すことで十分であることを意味する．

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} |e^{i\lambda t} - S_{2^p}(\lambda) - e^{i\gamma t}\chi_{(\gamma-2^{-p},\gamma)}(\lambda) - e^{-i\gamma t}\chi_{(-\gamma,-\gamma+2^{-p})}(\lambda)|^2 dF(\lambda) < +\infty$$

これは，$|\lambda| < \gamma$ を $0 < |\lambda \mp \gamma| < 2^{-p}$ と $|\lambda \mp \gamma| \geq 2^{-p}$ に分割し，これら二つの領域に関して推定評価を与えることで証明可能である．例えば，$|\lambda \mp \gamma| < 2^{-p}$ についてもし $A_k = \{2^{-k-1} \leq |\lambda \pm \gamma| < 2^{-k}\}$ であるならば，補題 9.21$\boldsymbol{iii}$ は以下を与える．

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty} \int_{0<|\lambda\mp\gamma|<2^{-p}} |e^{\pm i\lambda t} - S_n(\pm\lambda) - e^{\pm i\gamma t}|^2 dF \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} \sum_{k=p}^{\infty} \int_{A_k} |\lambda \mp \gamma|^2 dF + C\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2p}} \\ &\leq C\sum_{p=1}^{\infty} 2^{2p} \sum_{k=p}^{\infty} 2^{-2k} F(A_k) + C\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2p}} \\ &\leq C\sum_{p=1}^{\infty} F(A_p) + C\sum_{p=1}^{\infty} \frac{F(A_p)}{2^p} + C < +\infty \end{aligned}$$

$|\lambda \mp \gamma| \geq 2^{-p}$ については，補題 9.21$\boldsymbol{iii}$ ではなく補題 9.21$\boldsymbol{iv}$ を用いることで，推定評価は上記と本質的に類似のものとなる．∎

定理 9.18 が言う本質的な意味は，もし帯域の端点がフィルタされているかまたは過程のスペクトルが十分に滑らかならば，ランダムなデータの条件でかつサンプリングと再構成のみを考える限りは，その確率過程は表現可能であるということである．

ここで以下に X や $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の特別な場合に簡略化が可能であることを表す二つの簡単な系を述べる．最初の系は特に定常な Gaussian 過程に当てはまるものである．

系 9.22　X と $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が定理 9.18 の仮定を満足し，Z が独立な増分を有するものとする．この時，確率 1 で $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Psi_k(t)X(t_k),\ t\in\mathbb{R}$ が成り立つ．

証明　定理 9.20 より，$L^2(P)$ において

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty} e^{i\gamma t}Z(\gamma-2^{-p},\gamma)+e^{-i\gamma t}Z(-\gamma,-\gamma+2^{-p})\\
&\quad= \lim_{p\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty} e^{i\gamma t}Z(\gamma-2^{-k},\gamma-2^{-k-1}]+e^{-i\gamma t}Z[-\gamma+2^{-k-1},-\gamma+2^{-k})\\
&\quad= 0
\end{aligned}$$

である．独立性により概収束が得られる．▮

系 9.23　X と $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が定理 9.18 の仮定を満足し，$dF(\theta)=fd\theta,\ f\in L^{1+\epsilon}(-\gamma,\gamma),\ \epsilon>0$ とする．この時，確率 1 で $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Psi_k(t)X(t_k)$ が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{\infty} E\left|e^{i\gamma t}Z(\gamma-2^{-p},\gamma)+e^{-i\gamma t}Z(-\gamma,-\gamma+2^{-p})\right|^2\\
&\qquad\le C\sum_{p=1}^{\infty}\int_{0<|\lambda\pm\gamma|<2^{-p}} f(\lambda)d\lambda\\
&\qquad\le C\sum_{p=1}^{\infty}2^{-p\epsilon/(1+\epsilon)}\left(\int_{|\lambda|<\gamma} f^{(1+\epsilon)}(\lambda)d\lambda\right)^{1/1+\epsilon} < +\infty
\end{aligned}$$

▮

これ以上はこの問題を追求しないことにするが，確率 1 で収束するスペクトル密度 f の最も良い可能な「挙動」に関する条件を調べるためには，今一度より詳細な [Hou3] を参照されたい．この文献には一様な密度 1 を有する一般的な列に関する共分散関数やサンプリング結果について，またより一般的な過程の族についても同様に，最適な条件が述べられている．

9.5　ウェーブレットによるノンパラメトリック関数の推定

この章を締めくくるに当たって，ノンパラメトリック統計へのウェーブレット手法の適用に関する幾つかの知見を述べたい．ここで紹介する知見は現在 Ed Wegman の “work in progress” という文献で研究されつつあるものである．

幾つかの標本データ，即ち $x_1, x_2, \ldots, x_n$，に基づいて一般的な関数 f を推定することを考

える．これは実際上，統計的推論における最も初等的な推定問題である．しばしば，求めようとする関数は確率分布関数であったり確率密度関数であったりする．最もよく取られる方法は，何らかのパラメータ，例えば θ，によって示される一つのパラメトリック関数族内の関数を用いることである．直接に f そのものを求めるよりも，f_θ についてパラメータ θ を推定し，そして $\hat{f}_\theta = f_{\hat{\theta}}$ として関数推定される．しかし多くの状況下においては，パラメトリック関数族の不適切な指定によって起こる問題を避けるには，ノンパラメトリックな方法を採用することが遥かに望ましい．これは特に，データが比較的大量にあって，かつパラメトリックモデルによって取り込まれる情報が統計的有効性を持たない場合にはよく行われる．

確率密度推定とノンパラメトリック非線形回帰分析の二つが，恐らく最も広く研究されているノンパラメトリック関数推定問題である．しかしながら，興味が浮かぶ他の問題としては，全ての時系列解析におけるスペクトル密度推定や伝達関数推定，インパルス応答関数推定などがある．信頼性 / 寿命測定の分野では，同様な問題として故障率関数推定や生存関数推定がある．このように単純に形式的制約の無い関数推定を行いたい場合がある一方，例えば，正値性や，滑らかさ，同調性，凸性，過渡性，固定した不連続性など一つかまたはそれ以上の制約を与えたい場合もある．特に最も一般的な仮定は滑らかさ，それもしばしばある一つの核や畳み込み平滑作用素などを用いた推定である．そこで，一般的かつ最適なノンパラメトリックの枠組みを構成したくなるわけである．

ここでは最適化問題を以下のように構成する．H を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とノルム $\|\cdot\|$ を有する，例えば（実数値の）関数からなる Hilbert 空間とする．$\mathcal{L}: H \to \mathbb{R}$ を一つの線形汎関数，即ち全ての $f, g \in H$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$ である．加えて，全ての $f, g \in S$ と $0 \le t \le 1$ について，$\mathcal{L}(tf + (1-t)g) \le t\mathcal{L}(f) + (1-t)\mathcal{L}(g)$ が成り立つならば，$\mathcal{L}$ は $S \subseteq \mathcal{H}$ 上で 凸であるという．もし不等号が反対ならば $\mathcal{L}$ は 凹であるという．もし不等号が真に成立するならは，$\mathcal{L}$ は S 上で狭義に凸（凹）であるといわれる．全ての $f, g \in S$ と $0 \le t \le 1$ について，もし $t\mathcal{L}(f) + (1+t)\mathcal{L}(g) - \mathcal{L}(tf + (1-t)g) \ge ct(1-t)\|f-g\|^2$ ならば，$\mathcal{L}$ は S 上で一様に凸であるといわれる．

この最適化のフレームワークの下では，$\mathcal{L}$ を一般的な目的汎関数として用いる．例えば尤度について考える場合には，我々は対数尤度を取り上げるだろう．

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i) \qquad (x_i\text{は } f\text{からのランダム標本})$$

もし検定標本があるならば，

$$\mathcal{L}(g) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \log g(x_i) + \sum_{i=1}^{n} (1-\delta_i) \log \overline{G}(x_i)$$

を考えることになる．ここで，x_i はやはりランダム標本であり， δ_i は検定ランダム変数，

$\overline{G} = 1 - G$，$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)du$ である．これは検定対数尤度である．もう一つの例は，一般化最小二乗法である．この場合，以下のようになる．

$$\mathcal{L}(g) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (Lg(u))^2 \, du$$

ここで L は微分作用素であり，適当な問題領域におけるこの最適化問題の解は，ペナルティー付きの平滑化 L-スプラインと呼ばれる．もし $L = D^2$ ならば，その解はよく知られた立方スプラインである．

基本的な考えは，S を滑らかさや同調性のような望ましい制約を満たす関数 g の集まりとした時，$S \subseteq H$ であるように構成することである．ここで $\mathcal{L}(g)$ を S 上で最適化したいわけである．最適化推定量は S の一つの要素であり，S について如何なる性質を選んでも必ず存在する．推定量は $\mathcal{L}(g)$ を最適化し，解析者が指定する如何なる最適化規範によっても選定可能である．この意味で，設計者の推定量，即ち対象とする問題の性質に合うように解析者によって設計された推定量を構成可能である．

もちろん，多くの多様性を持つ本質的に異なる条件で，これらの多くの推定量は既に知られている．しかしながら，Wegman[W] の以下の定理により一般的な枠組みでの存在が証明される．

定理 9.24　以下のような $\mathcal{L}(f)$ を $f \in S \subseteq H$ について最小化（最大化）する最適化問題を考える．この時，

i. もし H が有限次元であり，$\mathcal{L}$ が連続かつ凸（凹），かつ S が閉じていて有界であれば，少なくとも一つの解が存在する．

ii. もし H が無限次元であり，$\mathcal{L}$ が連続かつ凸（凹），かつ S が閉じていて有界であり凸であれば，少なくとも一つの解が存在する．

iii. もし ***i*** または ***ii*** の $\mathcal{L}$ が狭義に凸（凹）であれば，解は唯一つ存在する．

iv. もし H が無限次元であり，$\mathcal{L}$ が連続かつ一様に凸（凹），そして S が閉じていて凸であれば，唯一つの解が存在する．

この定理は最適なノンパラメトリック関数推定量の構成のための統一的な枠組みを与える．しかしながら，これはノンパラメトリック関数推定量の構成のためのある定まった方法を指定するわけではない．次の幾つかの節では構成のための枠組みを示すことにするが，定理 9.24 の証明とこの結果を用いる他の多くの例については Wegman [W] を参照願いたい．

今 H の基底があり，それが $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ であるとする．この基底は明らかに H の“部分”集合 S を張り，従って S に属する任意の我々が“設計したい”関数は基底 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ によって記述可能である．不必要な基底の要素に関する係数は単に 0 となる．しかしある意味では，この基底はあまりにも豊富な内容を含み，ノイズの多い推定環境下では余計な基底の要素はノイズのみ

を推定することにしか寄与しない．そこで我々が“設計したい”集合 S としては，最小の数の基底を含むようにしたい．ここで幾つかの構成方法を考えてみよう．H の基底として $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ を考える．以下のルーチンによって S に対する基底 B_S を構成する．即ち，もし $\langle g, e_k\rangle \neq 0$ であるような $g \in S$ が存在するならば，$e_k \in B_S$ とする．一方もし $\langle g, e_k\rangle \neq 0$ であるような $g \in S^{\perp}$ が存在するならば，$e_k \in B_{S^{\perp}}$ とする．残念ながら $B_S \cap B_{S^{\perp}} = \varphi$ とはならない場合がある．しかしこのアルゴリズムは $\{e_k\} = B_S \cup B_{S^{\perp}}$ をもたらす．しかも $S \subseteq span(B_S)$ である．従って不必要な基底の要素を省くことができるであろう．通常，もし我々が希望する Sの特性と基底の集合 $\{e_k\}$ の性質が知られているならば，そのまま単純に基底集合 B_s を構成するためのテスト関数 g を構成することができる．もし S が部分空間であるならば，$S = span(B_S)$ である．何れにせよ，

$$\hat{f} = \sum_{e_k \in B_S} \hat{c}_k e_k \tag{9.28}$$

によって推定可能である．全くノイズの無い環境では，式 (9.28) は本当にノルム等式となる，即ち $\|f - \sum_k c_k e_k\| = 0$ である．もし $H = L^2(\mathbb{R})$ であれば，式 (9.28) は実際，以下のようになる．

$$f = \sum_k c_k e_k, \quad \text{Lebesgue 測度 1 で成立．ただし}, c_k = \langle f, e_k\rangle \tag{9.29}$$

この c_k の選択は最小ノルムの選択である．一方，f が厳密に知られていないノイズの多い環境では，c_k を直接計算することはできない．しかしながら，標準的な推定手法を使えば c_k を評価することは可能であろう．

例 9.25 （ノルム推定）

c_k の最小ノルム推定は $\|f - \sum_k c_k e_k\|$ を最小化する選択である．ただし，$c_k = \langle f, e_k\rangle$ である．$L^2(\mathbb{R})$ においては，

$$\langle f, e_k\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_k(x) dx$$

である．もし f が確率密度関数であるなら，$\langle f, e_k\rangle = E(e_k)$ であり，これは $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} e_k(x_j)$ によって簡単に推定可能である．ただしここで，x_j, $j = 1, \ldots, n$ は観測の標本である．

例 9.26 （推定の一般形）

一般に最適化関数 $\mathcal{L}$ について

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\sum_{e_k \in B_S} c_k e_k\right) = \mathcal{L}(\{c_k\}) \tag{9.30}$$

である．式 (9.30) は可付番個の変数 $\{c_k\}$ の関数であり，正規方程式を見つけることができ，適切な基底の選択によって解を導出可能である．このために，典型的には $\mathcal{L}$ として全ての c_k に関して 2 回微分可能なものを選択する．

従来よく選択された基底は指数関数ベースのものであった．ここでは他の基底としてウェーブレット基底の選択を薦めたい．以下順を追って簡単に説明する．$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$ とする．ここで ψ はいわゆるアドミッシビリティ条件を満たす，即ち $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\lambda)|^2/|\lambda|\,d\lambda < +\infty$ である．ある ψ の選択の下で，$L^2(\mathbb{R})$ に関する (高次の Sobolev 空間と同様に種々の関数空間についても）2 重に添字付けされた正規直交基底を構成する．少し後に見るように，ウェーブレット基底はその拡大縮小と平行移動の特性から f の同時的時間-空間分解による解釈を可能にする．更にウェーブレットを使うことによって，より少ない基底の要素で鋭い変化や不連続性へのフィッティングが可能になる．このことは,「局在化」した基底の要素の導入によって,「滑らかではない」状況での高速な収束が可能になることを意味する．

例 9.25　（続き）

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x/2^j - k)}{2^{j/2}} f(x)\,dx$$

である．ここで，密度推定の場合は

$$c_{j,k} = E\left(\frac{\psi(x/2^j - k)}{2^{j/2}}\right)$$

となる．従って，自然な一つの推定量は

$$\hat{c}_{j,k} = \frac{1}{n2^{j/2}} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{x_i}{2^j} - k\right)$$

となる．ここで，x_i, $i = 1, \ldots, n$, は観測集合である．

この節の最後として，フレームが適切なことについて述べたい．二つの特に有用な場合を考える．始めにもし有限な数のアドミッシブル空間，即ち S_i の合併を取るならば，基底の合併 $\cup_i B_{S_i}$ は $\cup_i S_i$ に関するフレームとなる．第 2 にもし基底 B_S を有するアドミッシブル空間 S があり，しかも若干の付加的要素，例えば $\{g_j, j \in \mathbb{Z}\}$ を付け足したいならば，$B \cup \{g_j, j \in \mathbb{Z}\}$ は拡大空間に関するフレームである．これは例えば数カ所の不連続点を除いて滑らかな空間（例：Sobolev 空間）を考える場合には有用である．

ここまでウェーブレットとフレームについて言及してきたが，ウェーブレット分解がノンパラメトリック関数推定において特別な意義を持つ理由を説明してこなかった．これを説明するために，統計理論における Fourier または他の調和解析の従来手法についてもう一度振り返っ

てみよう．一つの関数 $f(x)$ に対応して，f の **Fourier 変換関数**

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx$$

が存在する．逆 **Fourier 変換**は以下の式によって計算される．

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \tag{9.31}$$

常に完全な $\hat{f}$ が計算可能とは限らないので，離散標本形式を考えると有用である．この場合，いわゆる離散的 Fourier 変換

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \tag{9.32}$$

となる．ここで

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_k x} f(x)\, dx$$

は Fourier 係数である．高速 Fourier 変換 (FFT) は離散 Fourier 変換を計算するための高速計算アルゴリズムである．Fourier 手法は定常確率過程を解析するのに適当である．というのは，定常性は共分散関数の構造が時間不変であることを意味するからである．通常，Fourier 変換はスペクトル密度を得るために共分散関数に対して行われるため，定常過程の周波数構造は時間不変である．従って，従来の Fourier 変換手法が非定常または過渡的な確率過程を解析するには不適切であることは明らかである．式 (9.32) の列は非定常の状況では，$f(x)$ のうまくまとまった表現とはなっていないため収束が遅くなる．

そこで，時間と周波数の双方に関して局在化することが望ましいわけである．そのような一つのやり方は，**短時間 Fourier 変換** (STFT) かまたは **Gabor 変換**と呼ばれる以下の式を使うことであった．

$$Gf(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) \bar{w}(x-\tau)\, dx$$

即ち，STFT は窓付き Fourier 変換である．しかし残念ながらこのやり方には問題がある．STFT は窓の長さより大きい波長を解析すること，即ち低い周波数を解析ことが苦手である．一方，STFT は窓の長さに亘って信号エネルギーを平均化してしまうため，高い周波数信号の位置決めを行うのが苦手である．固定された窓の長さでは，STFT の時間及び周波数分解能は不確定性原理によって限られてしまう．必要なのは，低い周波数信号に関しては大きな窓幅を，また高い周波数信号に関しては非常に小さい窓幅を許す方法を用いることである．

ウェーブレットの基本的考えは STFT のように過渡的波形を用いることであり，しかも周波数が増加した時にも一定の相対的な周波数帯域幅の分解能を維持するために時間分解能を必要

以上に増加させないことである．実際には，まず雛形となるウェーブレット $\psi(t)$ を選定し，この母ウェーブレット ψ の伸張と平行移動によって以下のようなアフィンウェーブレットを考える．

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

連続ウェーブレット変換 (CWT) は以下のように定義される．

$$W_a f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{\psi}_{a,\tau}(x)\,dx$$

また，その逆ウェーブレット変換 は

$$f(x) = C\int_{a>0}\int_{\mathbb{R}} W_a f(\tau)\psi_{a,\tau}(x)\frac{d\tau da}{a^2} \tag{9.33}$$

で与えられる．この最後の方程式は時々 $a = e^{\nu}$ によってパラメータが再定義されることがある．丁度 f の Fourier 級数表現を扱うように，ウェーブレット級数の表現を取り扱いたいためである．パラメータ a （またはその代理の ν ）は拡張パラメータと呼ばれ，通常の調和解析の場合の周波数 ω に相当するものである．これはスケールパラメータと考えるとより適切に理解できる．パラメータ τ は時間-位置パラメータである．

前に示したように，スケールの減少は周波数の増加に（即ち大きなスケールは低い周波数に，小さなスケールは高い周波数に）対応する．時間とスケールのパラメータは $a = a_0^j$ と $\tau = ka_0^j\tau_0$ によって離散化できる．ここで j と k は整数である．この時，ウェーブレットは

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{a_0^{j/2}}\psi\left(\frac{t}{a_0^j} - k\tau_0\right)$$

となり，ここでウェーブレット係数は以下の式によって与えられる．

$$c_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)\,dx$$

もし， a_0, τ_0 と $\psi(t)$ が適切な性質を有していれば，Fourier 級数の場合と同様に以下の関係を期待できる．

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x) \tag{9.34}$$

これはまさに正規直交基底またはフレームに関係する形式である．従って，ウェーブレットが基底やフレームを構成することを示せるならば，式 (9.34) が導かれる．もし a_0 が 1 にいくらでも近いならば，式 (9.34) の 2 重和は式 (9.33) の 2 重積分の Reimann 和近似になる．そして，そのような条件を仮定するのはあまり無理はない．ウェーブレットを計算可能なものにするためには，しかしながら通常 $a_0 = 2$ が取られる．更に母ウェーブレット ψ がコンパクト台ならば，

2 重無限列の中で有限個の項のみが $f(x)$ の値に寄与するので，計算上非常に利点が生まれる．

この節を終えるにあたって，ノンパラメトリック推定問題は関数解析の最適化問題として言い換え可能であるという関係を繰り返して言いたい．これらの問題に対する統計的解はアドミッシブルな族の関数系に関する基底を見つけることによって導かれる．局在化された性質を持つウェーブレット基底は，畳み込み平滑化のような従来の手法によっては得られなかった新たな可能性の領域を開くものである．

参考文献

[B1] J. Benedetto. 1992. "Stationary frames and spectral estimation," in *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis*, NATO-ASI-1991, J.S. Byrnes, ed., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 117–161.

[B2] J. Benedetto. 1992. "Irregular sampling and frames," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., New York: Academic Press, pp. 445–507.

[BHe] J. Benedetto and W. Heller. 1990. "Irregular sampling and the theory of frames I," *Note Math.*, **10**(Suppl. 1): 103–125.

[CHou] S. Cambanis and C. Houdré. 1992. "On continuous wavelet transforms of second order random processes," University of North Carolina Center for Stochastic Processes Technical Report No. 390.

[Cr] H. Cramér. 1962. "On some classes of non- stationary stochastic processes," in *Proc. IV Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob.*, **2**, J. Neyman, ed., Berkeley: Univ. of California Press, pp. 57–78.

[D] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.*, **41**: 909–996.

[DLa1] I. Daubechies and J. Lagarias. 1991. "Two-scale difference equations: I. Existence and global regularity of solutions," *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 1388– 1410

[DLa2] I. Daubechies and J. Lagarias. 1993. "Two-scale difference equations: II. Local regularity, infinite products and fractals," *SIAM J. Math. Anal.*, **23**: 1031–1079.

[DuSc] R. Duffin and A. Schaeffer. 1952. "A class of nonharmonic Fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**: 341–366.

[DunSch] N. Dunford and J. Schwartz. 1957. *Linear Operators*, New York: Interscience Publishers.

[F] P. Flandrin. 1989. "On the spectrum of fractional Brownian Motions," *IEEE Trans. Inform. Theory* **35**(1): 197–199.

[Fu] H. Furstenberg. 1963. "Noncommuting random products," *Trans. Amer. Math. Soc.* **108**: 377- -428

[FuKe] H. Furstenberg and H. Kesten. 1960. "Products of random matrices," *Ann. Math. Statist.* **31**: 457–469.

[G] V.F. Gaposhkin. 1977. "A theorem on the convergence almost everywhere of measurable functions, and its applications to sequences of stochastic integrals," *Math. USSR Sbornik* **33**: 1–17.

[GoGu] I. Goldsheid and Y. Guivarc'h. 1991. "Dimension de la loi gaussienne pour un produit

de matrices aléatoires indépendantes et adhérence de Zariski," *C.R. Acad. Sci.* **313**: 305–308.

[HCo] C. Heil and D. Colella. 1993. "Dilation equations and the smoothness of compactly supported wavelets," this volume, Chap. 4.

[HWa] C. Heil and D. Walnut. 1989. "Continuous and discrete wavelet transforms," *SIAM Rev.*, **31**: 628–666.

[Ho] J. Horowitz. 1977. "Une remarque sur les bimesures," in *Sém. Pro. XI*, Lect. Notes Math. **581**, Berlin: Springer- Verlag, pp. 59–64.

[Hou1] C. Houdré. 1990. "Harmonizability, V- boundedness, $(2,p)$-boundedness of stochastic processes," *Probab. Theor. Rel. Fields*, **84**: 39–54.

[Hou2] C. Houdré. 1991. "On the linear prediction of multivariate $(2,p)$-bounded processes," *Ann. Probab.*, **19**: 843–867.

[Hou3] C. Houdré. 1992. "Path reconstruction of processes from missing and irregular samples," University of North Carolina, Center for Stochastic Processes, Technical Report No. 359, February 1992, *Ann. Probab.*, to" appear.

[Hou4] C. Houdré. 1992. "On the discrete wavelet transform of second order processes," preprint.

[K] M.I. Kadec. 1964. "The exact value of the Paley– Wiener constant," *Sov. Math. Dokl.* **5**: 559– 561

[Le] E. Le Page. 1982. *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*, Lect. Notes in Math. **928**, Berlin: Springer-Verlag, pp. 258–303.

[Le] N. Levinson. 1940. *Gap and Density Theorems*, Colloq. Publ. **26**, New York: Amer. Math. Soc.

[M] S.G. Mallat. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–87.

[MaV] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. 1968. "Fractional Brownian motions, fractional noises, and applications," *SIAM Rev.* **10**(4): 422–437.

[Me] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, vols. I, II, Paris: Hermann.

[PWi] R.E.A.C. Paley and N. Wiener. 1934. *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Colloq. Publ. **19**, New York: Amer. Math. Soc.

[Pa] E. Parzen. 1984. *Time Series Analysis of Irregularly Observed Data*, Lect. Notes in Stat. **25**, New York: Springer-Verlag.

[RZ] J. Ramanathan and O. Zeitouni. 1991. "On the wavelet transform of fractional Brownian Motion," *IEEE Trans. Inform. Theory.* **37**(4): 1156–1158.

[S] E. Slud. 1986. "Stability of exponential rate of growth of products of random matrices under local random perturbations," *J. London Math. Soc.* **33**: 180- -192

[St] G. Strang. 1989. "Wavelets and dilation equations: a brief introduction," *SIAM Rev.* **31**: 614–627.

[W] E. Wegman. 1984. "Optimal nonparametric function estimation," *J. Stat. Plann. Inference* **9**: 375– 387

[Y] R. Young. 1980. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, New York: Academic Press.

第 10 章 ウェーブレットと適応波形解析

Ronald R. Coifman and M. Victor Wickerhauser*

【概要】 この章の目的は，調和解析や数値解析，信号処理において必要とされる様々な問題に対して解析手法を適応するための道具について述べることである．ここで最も述べたい点は，空間的かつ周波数的に適切に局在化された直交基底を選ぶことで，各問題の構造や効率性の双方について深く理解することができるということである．具体的にここでは指紋画像についての識別アルゴリズムと高速フーリエ変換による分解方法，ウェーブレットに基づくノイズ低減アルゴリズムについて述べる．

この章の目的は，調和解析や数値解析，信号処理において必要とされる様々な問題に対して解析手法を適応するための道具について述べることである．ここで最も述べたい点は，空間的かつ周波数的に適切に局在化された直交基底を選ぶことで，各問題の構造や効率性の双方について深く理解することができるということである．ここでは実際に計算効率性を探求することが，データ表現（圧縮表現など）やパターン抽出，ないしは構造理解における効率性に深く関係することを主張する．

従来，偏微分方程式や調和解析においては，超局所化が作用素の構造理解のための主な手段であった．これは相空間において適切な 1 の分割を行う，すなわち相空間をセルに分解することにより行われる．波形解析の手法は，相互作用を記述するのに最大の効率を達成する分割が計算されるような超局所化のための一つの数値的方法を与える．この方法は古典的解析手法に光をあてるだけではなく，作用素の体系化と解析の新しい方法を示唆するものである．これらは非標準形式や離散的な相空間における近似を含んでいる．ここでの目的は，数学者や科学者，技術者が一連の解析方法の中から適切な道具を選択し，かつそれを実際の問題に適用可能にするような種々の技術を紹介することである．

適応波形変換 (AWT) 手法では，その使用者は信号の特定の種類に応じて，ウェーブレット，ウェーブレットパケット，窓つき三角関数波形などの標準の波形ライブラリーから適切なものを選ぶことができるようになっている．これらのライブラリーには高速な数値計算アルゴリズ

*Coifman は DARPA と NSF の援助を一部受けており，Wickerhauser は AFOSR の援助を一部受けている．

ムが装備されており，データ圧縮，パターン認識や診断のためのパラメータ抽出，デジタルデータの高速変換や操作のような種々の解析，信号処理タスクの実時間実行が可能である．

解析の過程は，通常，集められたデータセグメントと蓄えられた波形との比較を行うことでなされる．ここでの数値的な比較アルゴリズムは疎な直交変換であり，高速で完全な望ましい条件を満たすものである．信号の圧縮に最も効率的な正規直交基底が選択され，適切な特徴の抽出及び操作が行われる．

このようにしてデータ操作や大規模計算に有効な高速数値アルゴリズムを用いた適応変換手法を可能にする，圧縮変数を用いた計算方法が開発された．

10.1　窓つき高速フーリエ変換と適応窓選択

我々の手法を示すために，はじめにある関数の $[0,1]$ と $[1,2]$ 上でのフーリエ展開から $[0,2]$ 上のフーリエ展開を計算するアルゴリズムを説明する．f を $[0,2]$ 上で定義し $f = f^0 + f^1$ と表すとする．ここで，

$$f^0 = \begin{cases} f & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

である．そして，

$$\hat{f}^0_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt \quad \text{及び} \quad \hat{f}^1_n = \int_1^2 f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt$$

を用いて

$$\hat{f}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 f(t) e^{-2\pi i m t/2}\, dt$$

を計算したい．明らかに $m = 2n$ のとき

$$\hat{f}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\hat{f}^0_n + \hat{f}^1_n\}$$

である．さらに $m = 2n+1$ のとき

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\hat{f}^0_n - \hat{f}^1_{n+1}\}$$

と定義すると，

$$\hat{f}_{2n+1} = \frac{1}{\pi i} \sum \frac{d_k}{(n - k + \frac{1}{2})}$$

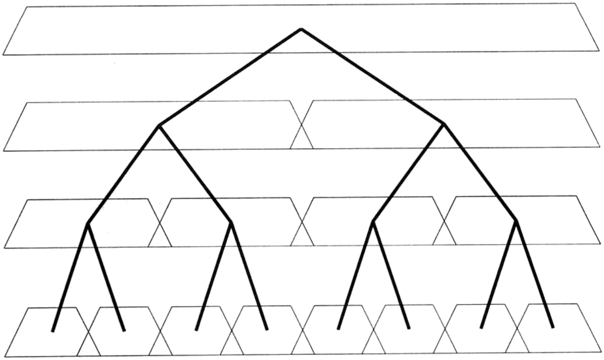


図 **10.1** スキームの記述

となる．実際，

$$\hat{f}_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 [f(t) - f(t+1)]e^{-i\pi t}e^{-2\pi int}\,dt$$

である．d_nは $f(t) - f(t+1)$ の $[0,1]$ 上でのフーリエ変換であり，$1/(\pi i(n+1/2))$ は $e^{-i\pi t}$の係数なので，これらの系列を畳み込むことにより$\hat{f}_{2n+1}$の係数を得る．一方，$\hat{f}_{2n+1}$を計算するもう一つの方法は，d_nの $[0,1]$ 上での逆変換を計算し，$e^{-it/2}$を掛け，$[0,1]$ 上の変換を再計算することである．

大きな区間でのフーリエ変換を計算するために，隣り合う小さい区間から始めて，それらの結合上での展開を得るために係数を組合せ，最上位レベルの最も大きい区間に到達するまでこれを継続することができる．その過程において，中間計算結果として倍々で区間が大きくなるすべての窓つきフーリエ変換を得る．明らかにすべての離れた区間の集合とそれらに関する直交基底は，区間の結合に対しても直交基底となる．窓つきフーリエ変換に関連して生じる自然な疑問は，如何に窓を設定するかである．図 10.2 と図 10.3 を比較すると，展開の大きい係数について多くの値に窓選択の影響が見られる．

そこで，関数の効率的な表現を得るために窓を最適化する方法について考えて見よう．次のように考えることができるだろう．すなわち，隣り合う小さい区間から始めて，個々の区間ごとで別個に展開係数を決定する．そして，信号のエネルギーの 99%を捕捉するのに必要な係数の数が最小になるような展開を選ぶようにする．または，情報コストやコーディングコスト，エラーコスト…などの「コスト」を最小にするように選ぶこともできる．二つの隣り合う区間の組に対し選択した展開のコストと，それら区間の結合に対する展開のそれを比較し，そのうち最も良いほうを選ぶことにする．たとえば図 10.4 に，デジタル形式での音声記録に適応化され

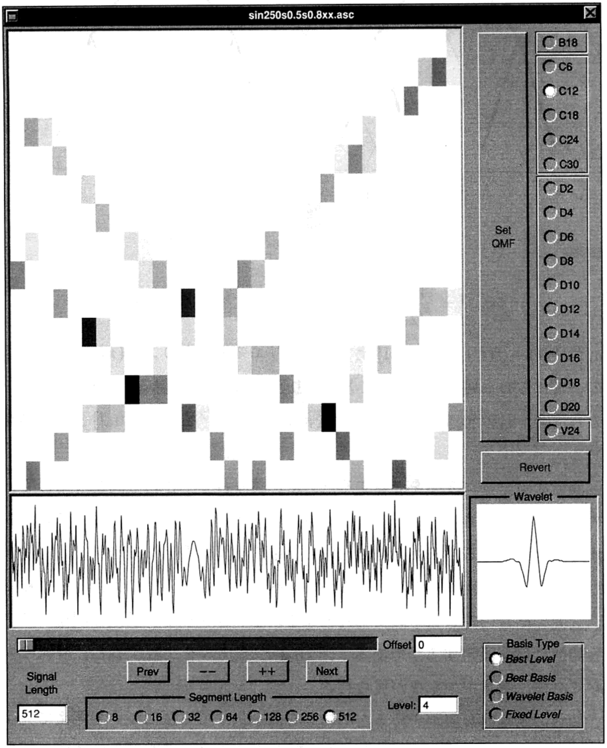

sin250s0.5s0.8xx.asc
B18
C6
C12
C18
C24
C30
D2
D4
D6
D8
D10
D12
D14
D16
D18
D20
V24
Set QMF
Revert
Wavelet
Offset 0
Prev
--
++
Next
Signal Length
512
Segment Length
8
16
32
64
128
256
512
Level: 4
Basis Type
Best Level
Best Basis
Wavelet Basis
Fixed Level

図 **10.2**　最適な窓選択

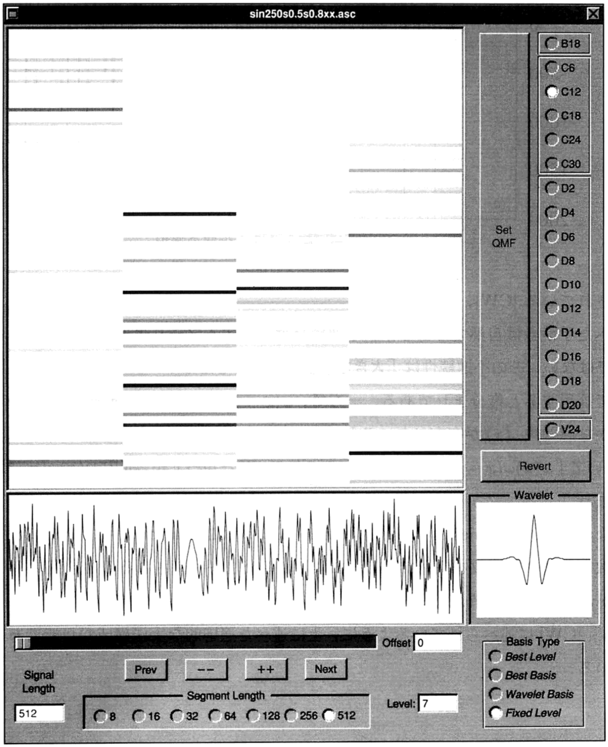

sin250s0.5s0.8xx.asc
B18
C6
C12
C18
C24
C30
D2
D4
D6
D8
D10
D12
D14
D16
D18
D20
V24
Set
QMF
Revert
Wavelet
Offset 0
Prev
--
++
Next
Signal
Length
512
Segment Length
8
16
32
64
128
256
512
Level: 7
Basis Type
Best Level
Best Basis
Wavelet Basis
Fixed Level

図 **10.3** 大きな窓選択

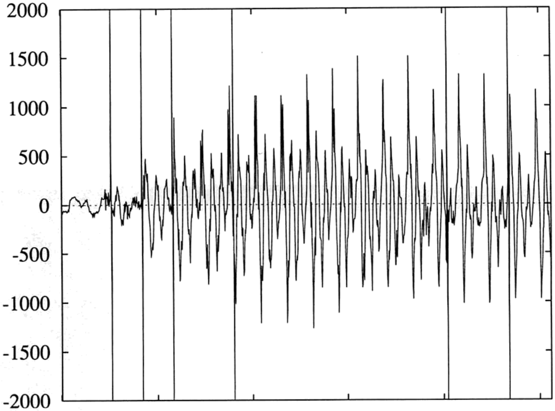


図 **10.4**　音の一部に関する適応化窓の選択

た窓が示されている [CW].

上に述べた手続きは自然ではあるが，不連続な窓を有するフーリエ変換を用いる場合にはあまり有効ではない．その不連続性は「大きな」展開係数をもたらす．まだ各区間の余弦関数基底を窓として採用すると幾分ましである．一方で，$\omega(x-k)e^{2i\pi nx}$が直交するような $(-1/2, 3/2)$ 上の滑らかな窓関数$\omega(x)$ が存在しないことは良く知られている．(もし存在するならば，すべての m について$\int \omega(x)\omega(x-1)e^{-2\pi imx}\,dx = 0$ であり，したがって恒等的に$\omega(x)\omega(x-1) \equiv 0$ となってしまう.)

最近になって，Daubechies と Jaffard，Journé[DJaJo] 及び Malvar[M] は，一様に滑らかな窓と正弦関数または余弦関数を採用することにより，直交性が保持されることを発見した．Coifman と Meyer[CMe] は，異なる大きさごとに窓を選択可能であることを示した．これらは，文献 [CMeW], [CW] に述べられているように，上に述べた適応的な手法構成が可能であることを意味している．

10.2　変調された波形ライブラリー

ここでは,「正規直交基底のライブラリー」という概念を想起することから始める．説明を容易にするために，最近になって提唱された数値的に有用な二つのクラスの波形であるウェーブレットパケット [CMeW] と局所化三角関数系波形[CMe] に絞って考えることとする．

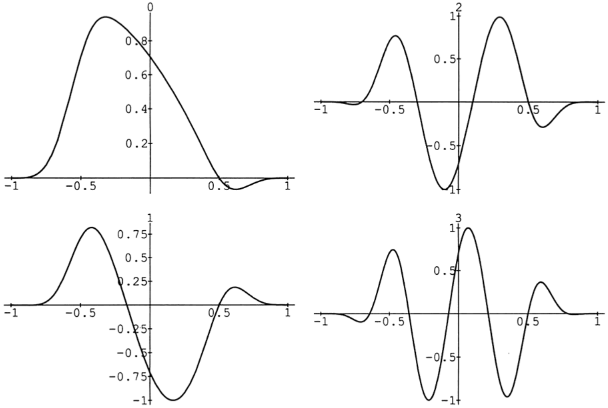


図 **10.5** 局在化余弦関数変換 (LCT) の基関数

はじめに局所化三角関数系波形から考察する．これらは $\mathbb{R}$ の，またはより一般的には多様体の区間による被覆に付随した局所化正弦関数変換 (LST) である．ここで $I = [\alpha_i, \alpha_{i+1})$ かつ $\alpha_i < \alpha_{i+1}$であるような被覆 $\mathbb{R} = \bigcup_{-\infty}^{\infty} I_i$を考える．$\ell_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = |I_i|$ と表記することとし，また $p_i(x)$ を $[\alpha_i - \ell_{i-1}/2, \alpha_{i+1} + \ell_{i+1}/2]$ において台を持ち

$$\sum_{-\infty}^{\infty} p_i^2(x) = 1$$

かつα_{i+1}の近くで

$$p_i^2(x) = 1 - p_i^2(2\alpha_{i+1} - x)$$

となるような窓関数とする．すると関数

$$S_{i,k}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\ell i}} p_i(x) \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2\ell_i}(x - \alpha_i)\right]$$

は分割 p_iに従属した $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を構成する．このような基底の集まりは正規直交基底のライブラリーとなる [CMe]．同様にして正規直交な局所化余弦関数基底のライブラリーを構成することも可能である．

$$C_{i,k}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\ell i}} p_i(x) \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2\ell_i}(x - \alpha_i)\right]$$

これらの基底関数の幾つかが図 10.5 に描かれている．もし H_iが $S_{i,k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$によって

張られる関数空間を表すとすると，$H_i + H_{i+1}$は関数

$$P(x)\frac{1}{\sqrt{2(\ell_i+\ell_{i+1})}}\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2(\ell_i+\ell_{i+1})}(x-\alpha_i)\right],\quad k=0,1,2,\cdots$$

によって張られる空間となる．ここで

$$P^2 = p_i^2(x) + p_{i+1}^2(x)$$

が区間 $I_i \cup I_{i+1}$を覆う「窓」関数である．

10.3　ウェーブレットとウェーブレットパケットへの関係

ここで周波数軸 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ と $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ の結合に分けて考える．$L^2(\mathbb{R}^+)$ 上で

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p^2(2^{-k}\xi) = 1 \quad \text{かつ} \quad \operatorname{supp} p(\xi) \subset \left(\frac{3}{4}, 3\right)$$

であるような窓関数 $p(\xi)$ を導入する．明らかに $p(2^{-k}\xi)$ は区間 $(2^k, 2^{k+1})$ 上での窓関数と見なすことができ，かつ関数

$$s_{k,j} = s_{k,j}(\xi) = p(2^{-k}\xi)\sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{\xi-2^k}{2^k}\right)\right]$$

は $L^2(\mathbb{R}^+)$ の正規直交基底を構成することがわかる．同様に，

$$c_{k,j} = c_{k,j}(\xi) = p(2^{-k}\xi)\cos\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{\xi-2^k}{2^k}\right)\right]$$

は別の正規直交基底を与えるが，この場合，各要素は関数 $s_{k,j}$に対しては直交しない．しかしながら，もし $S_{k,j}$を $s_{k,j}$ の $\mathbb{R}$ への奇関数としての延長，及び $C_{k,j}$を $c_{k,j}$の偶関数としての延長と定義するならば，すべての j, k, j', k'について $S_{k,j} \perp C_{k',j'}$となる．これは$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\pi/2\xi}p(\xi)$が [Me] で定義されている Meyer のウェーブレットΨ のフーリエ変換であるとしたときに，$C_{k,j} \pm iS_{k,j} = e^{\pm ij\pi\xi/2^k}\hat{\psi}(\xi/2^k)$ と書くことを可能にする．この計算の内容については [AWeW] に詳しい．したがって，ウェーブレット解析は「オクターヴ」窓 $(2^k, 2^{k+1})$ 内の窓周波数空間の切り出しに対応することがわかる．

周波数空間でのすべての倍々の長さの窓と適応化窓の選択を許すことで，以上の自然な拡張がもたらされる．この種の解析はウェーブレットパケット解析を行うことに等しい．ウェーブレットパケット解析のアルゴリズムは，異なる周波数帯において関数を連続的にフィルターすることによって，時間領域で直接的に適応化フーリエ窓処理を実施することを可能にする．窓選択の双対版は適応的なサブバンドコーディングアルゴリズムを実現する．そして，ウェーブレットパケットライブラリーはウェーブレットアルゴリズムを繰り返すことによって構成され

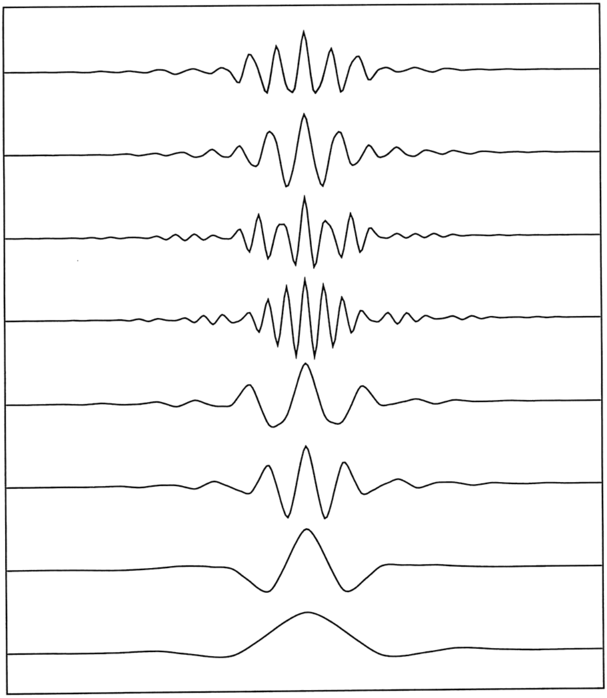


図 **10.6** ウェーブレットパケット

る．このライブラリーはウェーブレット関数基底と Walsh 関数，ウェーブレットパケットと呼ばれる Walsh 関数の滑らかなものを含む [CMeW].

これらの波形は相互に直交するばかりではなく，さらにそれらの各々はそれらのすべての整数移動や倍々に再スケールされたものにも直交する.（平行移動や再スケールしたものを含めて）これらのウェーブレットパケットのすべての集まりがライブラリーとなる．これらの関数は，解析や合成において信号に効率的にあてはめようとする場合に有効な標準波形ないしは基本波形となる．

基底関数と対象関数との「距離」を，ここでは Shannon のエントロピーの形式で測定することにする．この距離はある与えられた関数の展開について，特定の基底の効率を測定するものである——大まかにいえば，ある展開が他よりも効率的であるかどうかを，係数がより急激に減少するかどうかによって判定するものである．以下，より一般的に議論する．Hを Hilbert 空

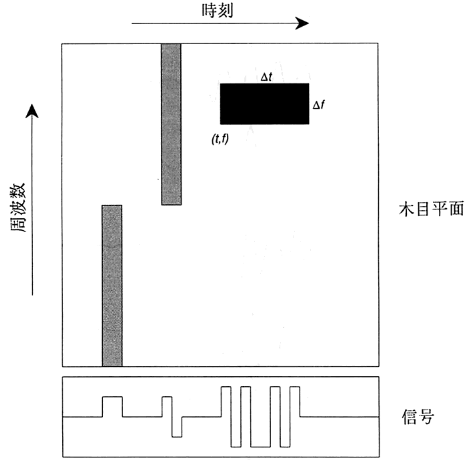


図 **10.7**　相平面内のセル

間とする．$v \in H$, $\|v\| = 1$ とし，$H = \oplus \sum H_i$を直交和と仮定する．ここで，

$$\varepsilon^2(v, \{H_i\}) = -\sum \|v_i\|^2 \ln \|v_i\|^2$$

を vと直交分解の間の距離とする．すると，ε^2はピタゴラスの定理のある形式である Shannon の方程式によって特徴づけられる．H^iと H_jが直交分解 $H_+ = \sum H^i$, $H_- = \sum H_j$を与えるとし，もし $H = \oplus(\sum H^i) \oplus (\sum H_j) = H_+ \oplus H_-$とすれば，

$$\varepsilon^2(v, \{H^i, H_j\}) \;\; = \;\; \varepsilon^2(v, \{H_+, H_-\}) + \|v_+\|^2 \varepsilon^2\left(\frac{v_+}{\|v_+\|}, \{H^i\}\right) + \|v_-\|^2 \varepsilon^2\left(\frac{v_-}{\|v_-\|}, \{H_j\}\right)$$

である．これがエントロピーに対する Shannon の方程式である．量子力学におけるように，もし $\|P_{H_+} v\|^2$を部分空間 H_+に vが存在する「確率」であると解釈すると，この方程式は，[CW] に述べられているように，信号の最も低いエントロピーを探すことを可能にする．

ウェーブレットパケット展開はアルゴリズム的にはサブバンドコーディングの手法に対応し，数値的には「高速」フーリエ変換 (FFT) と同程度の計算速度を有する．これは，与えられた信号ないしは信号の組合せに関する最もエントロピーの低いウェーブレットパケット基底を探す問題の複雑さを含めて考えても成立する．

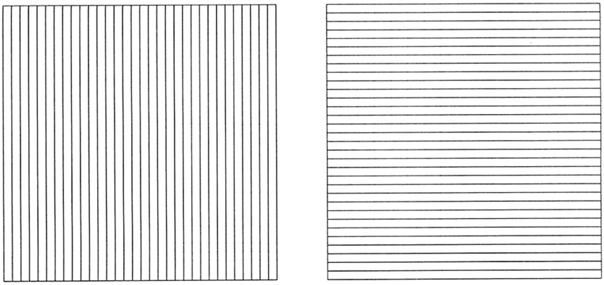


図 **10.8**　標準的なフーリエ基底による相平面分解

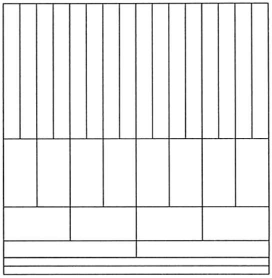
10.4　時間–周波数解析

各ウェーブレットパケットないしは局在化三角関数は，時刻 t と周波数 fの関数である．それぞれΔt とΔfの量の不確定性が存在し，Heisenberg の不確定性原理により$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1$ が成立する．これは (t, f) の周囲に位置する辺々がΔt,Δfの長方形を表している．この長方形をここでは Heisenberg セルと呼ぶことにする．対応するウェーブレットパケットや局在化余弦関数の強度は，この長方形に関する陰影の濃さとして表現できる．

もし時間と周波数についてほとんど最適に局在化した基底要素（すなわち，$\Delta t \cdot \Delta f \approx 1$）を選択するならば，一つの基底を単位面積のセルによる相平面の被覆によって表すことができる.「時間–周波数領域の基本要素」としての正規直交基底は，単位面積セルによる理想化された相空間の重なりの無い被覆に対応する．厳密にいえば，この対応関係は Haar–Walsh ないしは Shannon のウェーブレットパケットのライブラリーの場合の相互に重なりのない倍々のスケールの被覆についてのみあてはまる．LST とウェーブレットパケットのライブラリーは，周波数での展開に従う空間の分割ないしは空間領域での展開に従う周波数領域の分割に対応するため，それらの被覆が相互に重なりのない倍々のスケールの被覆の部分集合に限定されているときのみ，正規直交基底を成す．

一つの基底はセルの形の観点から特徴づけられる．図 10.8 で，標準基底は（有限次元の場合に）一つの行に存在する最も縦長で幅の狭いセルに対応して，時間的に最良な局在化を示すが，周波数的には全く局在しない．また,（離散的な）フーリエ基底は一つの列に存在する最も横長で高さの低いセルに対応して，周波数的に最良な局在ではあるが時間的には全く局在していないという特性を有する．ウェーブレット基底は図 10.9 の被覆に示されるように，相平面のオクターヴ幅での分解である．

ウェーブレットパケットの最良の基底は，最も少数の Heisenberg のセルに陰影を最も良く凝



ウェーブレット基底

図 10.9　ウェーブレット変換による相平面分解

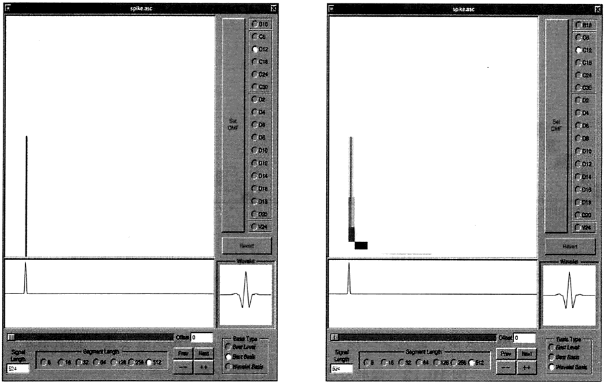
縮するように信号を覆うものである．サンプルされた信号の圧縮率は相平面の全面積（N点のサンプル信号については N）を黒いセル（各面積は 1）の全面積で割って得られる比として簡単に評価できる．この方法は，あらゆる縦横比の長方形の Heisenberg セルへの適用が可能である．最良のレベルないしは適応的なサブバンド基底は信号に対する等しい縦横比の長方形による被覆に対応し，陰影を最も良く凝縮する．これにより自動的に最良の基底で信号を展開することで解析を行い，対応する相平面表現を描くことができる．当然明らかなことであるが，無視可能な小さいエントロピー成分を含む部分相空間にはないので，平面上には描かれない．

以下に計算機プログラム “WPLab” [W1] によるある種の標準的な信号に関する自動解析について述べる．解析者が，画面右側の 17 種類のリストから一つの QMF(quadrature mirror filter) を選択すると，そのフィルタによって決定された「マザー・ウェーブレット」が左下の小さい正方形のウインドウに表示される．信号は一番下の長方形ウインドウにプロットされ，相平面の表現は大きなメインの正方形ウインドウに示される．

はじめに 512 点サンプルの信号の中で 7 サンプルに拡がった比較的滑らかな過渡電流を解析することにする．右側のウェーブレット解析は高い周波数成分において正しくピークの位置を捉えているが，低い周波数成分についてはあまり位置を捕捉できていない．最良の基底解析によってライブラリー中の最適な表現が見つかり，この場合にはそれが殆ど一つのウェーブレットパケットになっている．

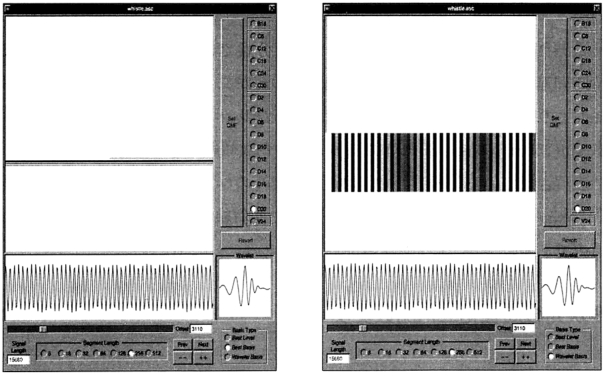
二つ目の信号（図 10.11）は人の口笛の（8012 サンプル/秒での）記録から抜き出したものである．この場合は最良基底解析が非常に狭い帯域を特定できているにもかかわらず，ウェーブレット基底は 1 オクターブ内の周波数に局在化できるのみである．ウェーブレットの Heisenberg セル間の垂直方向の縞は周波数帯域をさらに特定するのに有効であろうが，最良基底分解解析はこの解析を自動的に実施する．

鳥や虫の鳴き声は変調が強くなっていく振動信号である．区間 $0 < t < 1$ 上で 512 点のサン



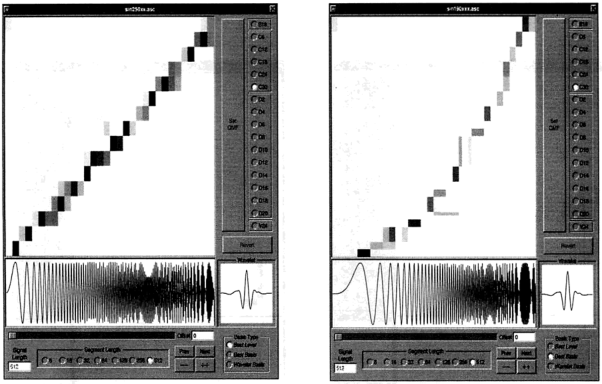
最良基底　　　　ウェーブレット基底

図 **10.10**　速い過渡電流の表示



最良基底　　　　ウェーブレット基底

図 **10.11**　口笛の表示



線形変化の鳴き声，最良レベル　　2次曲線変化の鳴き声，最良基底

図 **10.12**　線形及び 2 次曲線的変化の鳴き声

プルデータから成る関数 $\sin(250\pi t^2)$ と $\sin(190\pi t^3)$ の例が，図 10.12 に示されている．

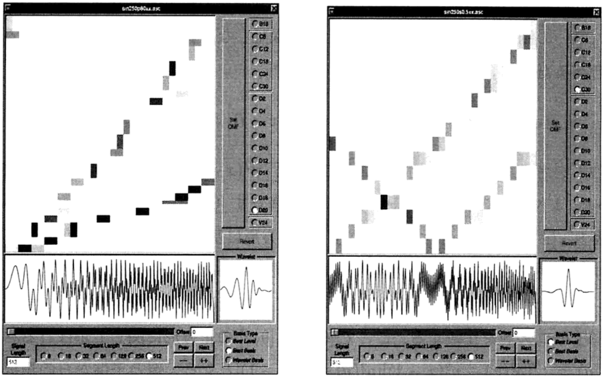
そこでは変調がそれぞれ線形及び 2 次曲線的に強まっている．最良基底における陰影のついたセルについても，直線及び放物線弧を描いている．最良レベルの解析では，すべての Heisenberg セルは直線に対して適切な同じ縦横比を有している．一方，最良基底の解析では，傾きがゼロの部分に近い Heisenberg セルは，大きな傾き部分付近のセルに比べて小さい縦横比を示している．

このような時間–周波数解析は重なった鳴き声を分離できる．図 10.13 では，明確に異なる変調法則や時間遅れを有する二つの線形な鳴き声の組が見られる．両方とも 512 サンプルの区間 $0 < t < 1$ 上の関数である．左側は最良なウェーブレットパケット基底によって解析された場合の関数 $\sin(250\pi t^2) + \sin(80\pi t^2)$ である．穏やかな傾斜の鳴き声はより平たい縦横比のセルによって表現されている．一方，右側は最良レベルのウェーブレットパケットで解析された $\sin(250\pi t^2) + \sin(250\pi(t-1/2)^2)$ である．下向きの傾斜線は負の周波数の折り返し効果により発生したものである．

10.5　多次元の局在化三角関数変換

先に見たように，滑らかな局在化した余弦関数と正弦関数の波形の直交性を維持したままで，滑らかな重なりを持つ窓に時間を分割できる．

同様な手続きはより高次の次元において，単純に各次元の基底のテンソル積をとるか，また



異なる傾き，最良基底　　異なる位相，最良レベル

図 **10.13**　重なった鳴き声

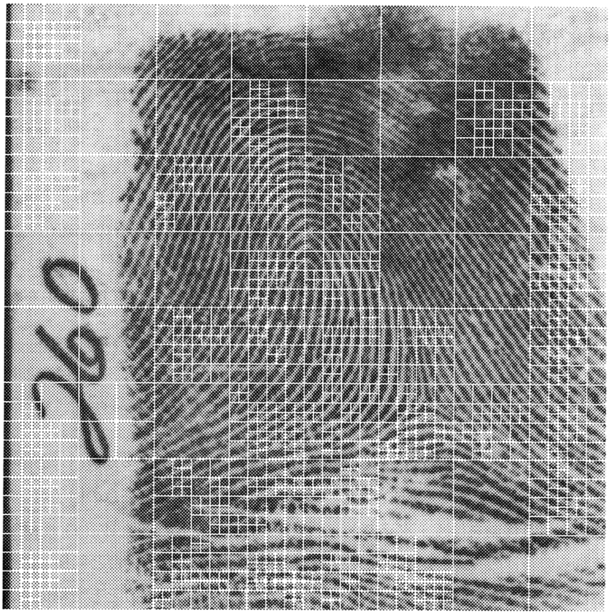


図 **10.14**　指紋の圧縮のための LCT 窓の選択

はより一般的に与えられた縦横比の平行多面体により高次の相平面を分割することによって可能である．唯一の制約は種々の窓関数の適合性を保証しなければならないことである．

厳密に考えるために，

$$S_{i,k}(x) = \sqrt{2}p(x-i)\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2k}(x-i)\right], \quad i,\ k \in \mathbb{Z}^+, i \geq 0$$

の形式の波形を考えることから始める．ここで，$\sum p^2(x-i) = 1$ かつ p は 0 付近で $p^2(x) = 1 - p^2(-x)$ ，1 付近で $1 - p^2(2-x) = p^2(x)$ を満たす $[0,1]$ 上のベル型関数である．すると 2 変量関数 $S_{i,k}(x)$ と $S_{i',k'}(y)$ は,「大きさ」1 の正方形に基づく $\mathbb{R}^2$内の局在化した三角関数基底を形成する．さてここで，より効率的な展開を見つけるために 2×2 のサイズの正方形上の関数を，1×1 のサイズの四つの部分正方形上のこの基底によって展開し，この展開コストと元の正方形上のコストを比較する．ここで $[0,2] \times [0,2]$ の正方形に関して選ばれるベル型関数は $P^{(2)}(x,y) = \sqrt{[p^2(x)+p^2(x-1)][p^2(y)+p^2(y-1)]}$となる．親と子供からの選択は，コーディングの効率ないしは近似の割合に依存して決まる．この手順は異なる大きさの正方形に基づく基底の選択を繰り返しながら，数世代に亘って続けられる可能性がある．

この手順を二つの 2 変量解析に適用する．図 10.14 は圧縮対象の指紋画像であり，図 10.15 は疎にすべき行列を示している．両方の図において，如何にしてアルゴリズムがそれらを分割するかを示すために，選択された窓が画像に重ねて描かれている．図 10.15 の行列に関して，2 次元の音響散乱の計算において有用な振動–核作用素から導かれた適応化した箱型展開は，振動と幾何形状の間の相互作用を陽に記述するための効率的な方法を提供する．それは空間の領域が相互作用の効率的な記述を行うためにどのように結合されるべきであるかを示している．この圧縮された形式は，その画像を行列と見なしてベクトルに適用するための直接の高速な数値アルゴリズムを導く [W2]．この方法は，空間と周波数双方の局在化という視点で作用素の分解を行う従来の方法に類似なものを我々の新しい言語で表現したものといえる．このような作用素分解は，特異積分やフーリエ積分作用素の研究において，長い歴史を有している．

10.6　多次元のウェーブレットパケット変換

QMF(quadrature mirror filter) のアルゴリズムは変数分離によって多変数信号の場合に拡張される．反復的なフィルタによって生成されるウェーブレットパケットは，任意の格子点に対する等方的な拡大縮小と平行移動を伴う 1 次元のウェーブレットパケットの直積 $W_n(x) = \prod_{i=1}^{d} W_{n_i}(x_i)$ である．これらの多次元ウェーブレットパケットの内積は，1 次元の場合と同様に最も小さいスケールにおける平均から計算される．その係数は d 次元の区間の重なりとして構成され，直交基底の部分集合の簡素な特徴付けを有する．ここでは，$d = 2$ の場合に限って考察する．図 10.16

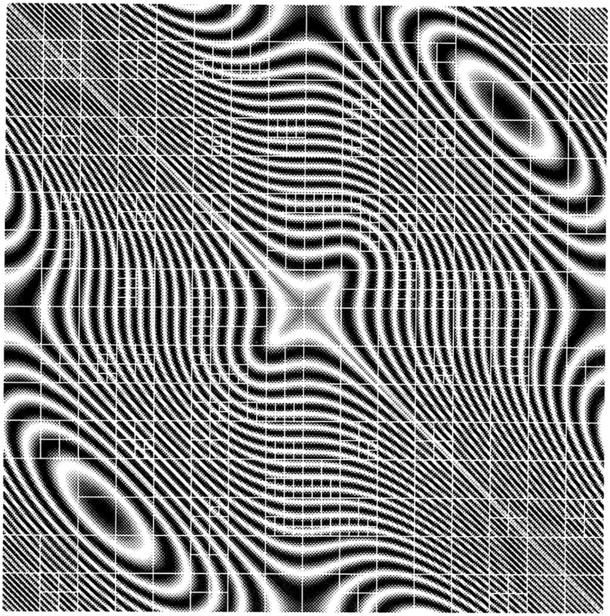


図 **10.15** 行列圧縮のための LCT 窓選択

のダイアグラムは3レベルのウェーブレットパケットツリーへの単位正方形の分解を示している．

10.7 雑音低減化とコヒーレント構造の抽出

以上のアイディアを組合せた応用として,「ノイズ低減化」またはより厳密にはコヒーレントな構造の抽出を行うためのアルゴリズムについて述べることにする．もし，信号 fが基底の波形と良い相関を持たない，言い換えればそのエントロピーが小さいδに関して $2^{-\delta}$ 程度の悪い圧縮率を与える $\log_2 N - \delta$のオーダーの大きさであるならば，その信号はノイズを多く含む，または基底 $\{\omega_i\}$ に対してコヒーレントでないという．この表現から幾つかの事前に定められた正規直交基底のライブラリーを基にした以下の反復的なアルゴリズムが導かれる．

ここでは長さ Nの信号 fについて，各ライブラリーから最良の基底を見つけだし，それらから$\varepsilon(f)$ を最小にする基底を選び出すことにする．まず，係数$\alpha_i = \langle f, \omega_i \rangle$ を絶対値 $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq$

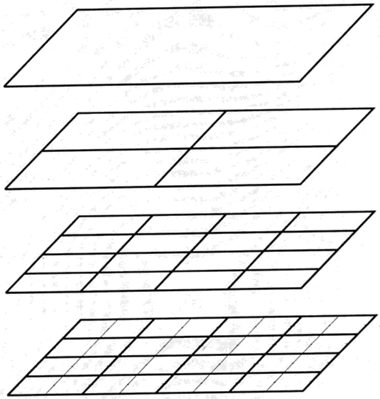


図 10.16　3レベルへの2次元ウェーブレット分解

$\cdots \geq |\alpha_{N_0}|$ の大きい順から並べ替える．また $i \geq N_0$ に対する各α_iは精度制限値以下の大きさであると仮定し，たとえば，全エネルギーの 0.1%以下であるとする．そして，

$$c_M = \sum_{1}^{M} \alpha_i \omega_i, \quad r_M = \sum_{M+1}^{N_0} \alpha_i \omega_i$$

としたとき，$f = c_M + r_M$というように分解するものとする．このときもし，$\varepsilon(r_M) \geq \tau_0$であれば c_Mはコヒーレントである，r_Mはコヒーレントでないという．そして閾値τ_0は，$\{\omega_i\}$ を用いた r_Mの圧縮が許容できないほど悪いかどうかを判定するために適切な値が設定される．そして，$\varepsilon(r_M) \geq \tau_0 > 0, 0 < \tau_0 < 1$ であるか，または

$$\sum_{i=M_0+1}^{N_0} \frac{\alpha_i^2}{\|r_M\|^2} \lg_2 \left(\frac{\|r_M\|^2}{\alpha_i^2} \right) \geq \lg_2(N_0 - M_0 + 1) - \lg_2 \tau_0$$

である Mに到達するまで，$r_1, r_2, \ldots$ をテストすることにより解析を進める．

Mallat によって述べられた“当てはめ追跡”の手順に従い，今度は r_Mを一つの新しい信号と見なし，信号分解を続けることができる．すなわち，新しい最良の基底を選択して $r_M = c'_{M_1} + r'_{M_1}$ に分解することができる．一定回数の分解までで止めることもできるし，もはや新しいコヒーレントな部分が得られなくなるまで続けることも可能である．そしてこれら得られたコヒーレントな部分を重ねることで，信号全体としてのコヒーレントな部分のみを構成することができる．最後に残る成分は，我々の持つ時間–周波数の基本要素の如何なる系列によってもうまく表すことができないという意味で，我々にとって真に「ノイズ」と見なせる部分である．

ノイズ低減化アルゴリズムの様子が図 10.17–10.24 に描かれており，以上で述べたように如

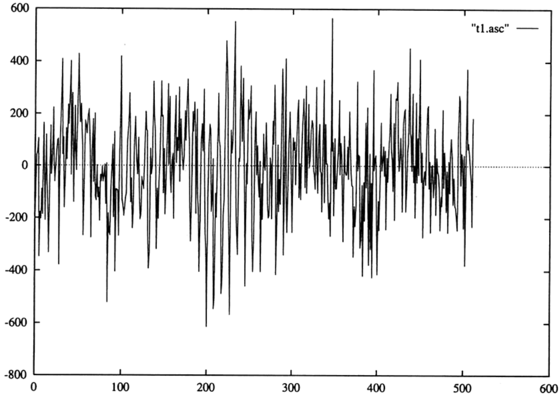


図 **10.17** 水中音響信号

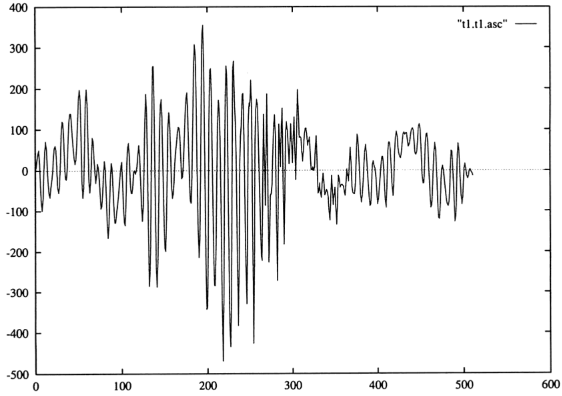


図 **10.18** 水中音響信号の最初のコヒーレントな成分

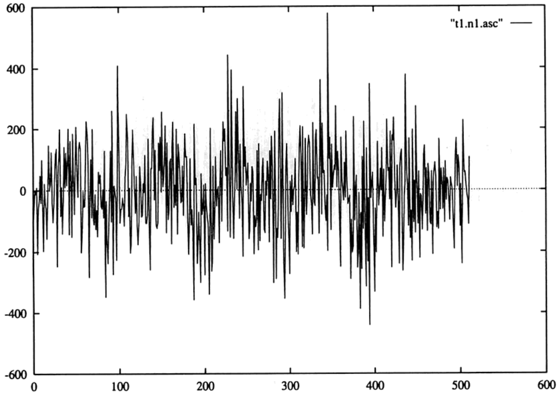


図 **10.19**　水中音響信号の最初のノイズ残差

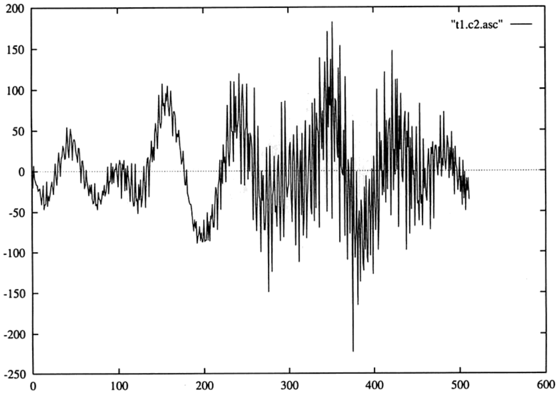


図 **10.20**　先のノイズ部分のコヒーレント部分

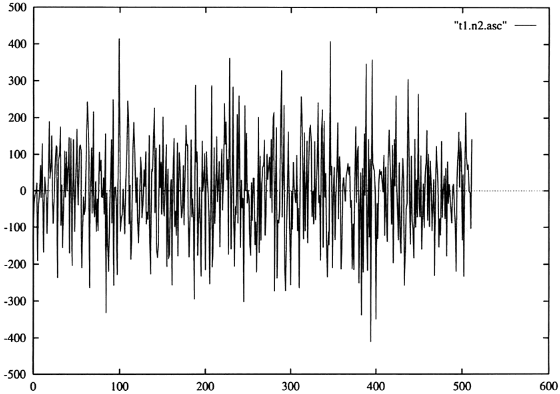


図 **10.21**　2 番目のノイズ成分

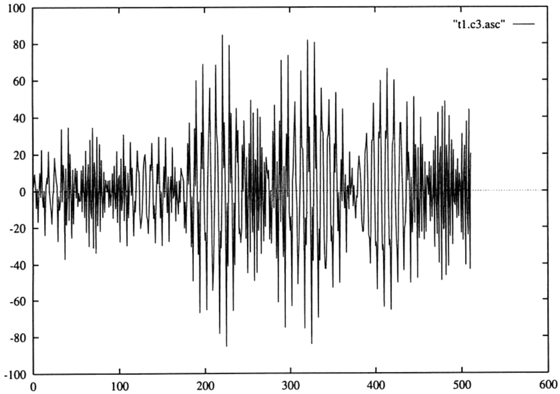


図 **10.22**　3 番目のコヒーレントな成分

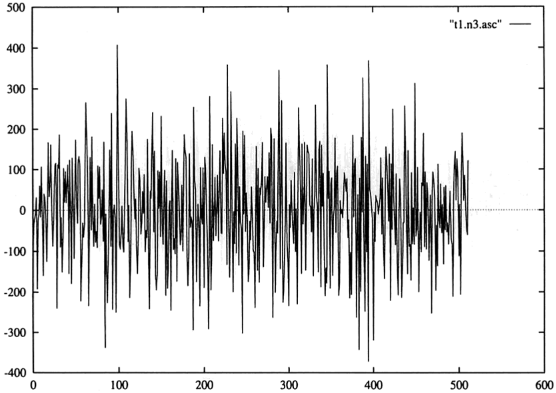


図 **10.23**　3番目のノイズ成分

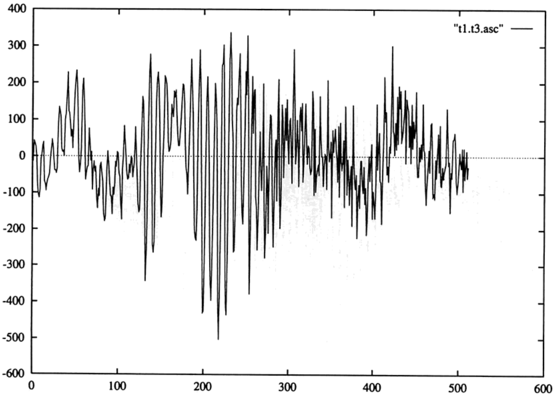


図 **10.24**　コヒーレント部分の全体和

何にして特定の信号が複数の層に剥ぎ分けられるかが示されている．元々の信号は水面下のマイクロフォンを通じて記録された機械の轟きであり，海中生物のノイズによってマスクされている．この計算は “denoise” というプログラム [CMaW] により実施された．

参考文献

[AWeW] P. Auscher, G. Weiss, and M. V. Wickerhauser. 1992. “Local sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets,” in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 237–256.

[CMaW] R. R. Coifman, F. Majid, and M. V. Wickerhauser. No date. Denoise. Available from FMA&H, 1020 Sherman Ave., Hamden, CT 06514.

[CMe] R. Coifman and Y. Meyer. 1991. “Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre,” *C. R. Acad. Sci.*, Sér. 1, **312**: 259–261.

[CMeW] R. R. Coifman, Y. Meyer, and M. V. Wickerhauser. 1992. “Wavelet analysis and signal processing,” in *Wavelets and Their Applications*, M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael, eds., Boston: Jones and Bartlett, pp. 153–178.

[CW] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser. 1992. “Entropy based methods for best basis selection,” *IEEE Trans. Inform. Theory* **32**: 712–718.

[D] I. Daubechies. 1988. “Orthonormal bases of compactly supported wavelets,” *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[DJaJo] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journé. 1991. “A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay,” *SIAM J. Math. Anal.* **22**: 554–572, Erratum **22**: 878.

[M] H. Malvar. 1990. “Lapped transforms for efficient transform/subband coding,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* **38**: 969–978.

[Me] Y. Meyer. 1985–1986. “De la recherche pétrolière à la géometrie des espaces de Banach en passant par les paraproduits,” *Seminaire équations aux dérivées partielles*, preprint, École Polytechnique, Palaiseau.

[W1] M. V. Wickerhauser. 1991. WPLab, version 1.5, *pascal.math.yale.edu.* Available by anonymous ftp in the folder pub/software.

[W2] M. V. Wickerhauser. 1993. “Computation with adapted time-frequency atoms,” in *Proc. Int. Conf. Wavelets Appl.*, Toulouse, 8–13 June 1992, to appear.

第 11 章 直交ウェーブレット展開の近最適圧縮

C.-c. Hsiao, B. Jawerth , B.J. Lucier , and X. M. Yu*

【概要】 直交ウェーブレットの有限線形結合による関数の最適近似の問題を考える．誤差は標準的な超関数空間で測られる．広いクラスの空間において，係数の大きさのみに基づくアルゴリズムが本質的に最適であることを示す．これにより，ウェーブレットによる非線形近似に関するいくつかの以前の結果をよくすることや，近似の度合いに対して新しい関数の特徴付けを確立することができる．我々は上の結果を，Lebesgue 空間 L_pと数列空間 l_p を比較する古典的な問題と関係付け，離散 Lorentz 空間の立場でできる限りの埋めこみを得る．また，ある Besov 空間に作用する作用素の圧縮を考え，作用素核の（矩形）ウェーブレット係数の大きさの点でよく圧縮されうる作用素の特徴付けを行なう．

11.1 導入

我々がこの論文で考える問題は「損失の多い」画像圧縮 ([DeJLu] 参照) の立場から動機付けられ，理解することができる．このような圧縮では，与えられた画像に対し，質をあまり劣化させずに元の画像の情報をいくらか取り除くことに興味がある．このようにして得られた「圧縮された」画像は，少ない容量で蓄えること，コミュニケーションチャンネルをより速く，より小さいバンド幅で転送することができる．つまり，圧縮された画像は元の画像の近似である．圧縮のアルゴリズムを見つけるために，まずどのような種類の近似を考えるのかを決める．次に，近似の質を判定するには，元の画像と近似の誤差を測る方法を決める必要がある．誤差の測定方法と近似の種類が決まったら，どのようにして最適，または少なくとも近最適な近似を得るかという最適化問題に至る．この近最適近似が実用的であるためには，これを構築する有効なアルゴリズムが伴っていなくてはならない．最後に，アルゴリズムを選んだら，そのアルゴリズムでどのような画像がよく圧縮されるのかを理解することが重要な問題となる．

ウェーブレット変換とウェーブレット分解に基づく圧縮を考えることとし，Littlewood-Paley の描像が成り立つ空間で誤差を測ることにして，上に述べた問題を扱う．この点で本論文は

* Jawerth は NSF Grant DMS 8803585, AFOSR Grant 89-0455, ONR Grant N0001-90-J-1343 の援助を一部受けており，Lucier は NSF Grant DMS-9006219, ONR Contract N00014-91-J-1152 の援助を一部受けている．

[DeJPo] の続きである．その中のウェーブレットによる非線形近似に関するいくつかの結果はより強いものとなり，証明が簡単化されているものもある．また数々の新しい結果も確立する．

ψ を決まった関数とし，さらに各二進キューブ

$$I = I_{\nu k} = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-\nu} k_i \le x_i < 2^{-\nu}(k_i + 1), i = 1, \cdots, d\}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d$$

に対して

$$\psi_I(x) = 2^{\nu d/2} \psi(2^\nu x - k)$$

とする．一般の関数 f に対して，その展開

$$f = \sum_{I:\ \text{二進キューブ}} a_I \psi_I \tag{11.1}$$

は f のウェーブレット分解と呼ばれる．ψ が適当な条件を満たすときにこのような分解ができることはよく知られている．特に，ψ_I が $L_2(\mathbb{R})$ で正規直交であり（あるいはもっと一般的に有限個の関数 $\psi^{(i)}, i = 1, \cdots, N$ が二進移動と二進ダイレーションにより $L_2(\mathbb{R}^d)$ の正規直交基底となり）考えている空間 $\mathfrak{F}$ の基底であるような，直交ウェーブレットに関心がある．このような直交基底はほとんどの古典的な超関数空間に対して [S],[Me],[D] により構築されている．ウェーブレット基底の最も簡単な例はもちろん $L_2(\mathbb{R})$ 上の Haar 系である．

正規直交基底の場合，係数 a_Iが

$$a_I = \langle f, \psi_I \rangle$$

によって与えられることに注意しよう．次の変換

$$f \to \{\langle f, \psi_I \rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}} \tag{11.2}$$

はウェーブレット変換と呼ばれる．

元の関数 fを，0 でないウェーブレット係数が有限個である関数によって近似することにする．これが次の定義の動機付けとなる．$\{\psi_I\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ を，ある超関数空間 $\mathfrak{F}$ の直交ウェーブレット基底とし，さらに

$$\sigma_N(f)_{\mathfrak{F}} := \inf_{\#\Gamma \le N} \left\| f - \sum_{I \in \Gamma} b_I \psi_I \right\|_{\mathfrak{F}}, \quad N \ge 1 \tag{11.3}$$

とする．すなわち，我々は次の非線形近似問題に興味があるのである．$\mathfrak{F}$ を標準的な超関数空間であるとするとき，誤差$\sigma_N(f)_{\mathfrak{F}}$ を最小にするにはどのように N個の係数 b_Iをとればよいか？この問題は，L_p空間（$1 < p < \infty$），Hardy 空間 H_p（$0 < p < \infty$）およびもっと一般的にこれらの空間に基づく Sobolev 空間を含む広いクラスの空間 $\mathfrak{F}$ に対して，同値なものを除いて解か

れる．より厳密には，N個の係数 $\{\langle f,\psi_I\rangle\}_{I\in\Gamma}$, $\#\Gamma=N$が存在して，これに対して

$$\sigma_N(f)_{\mathfrak{F}} \approx \left\| f - \sum_{I\in\Gamma} \langle f,\psi_I\rangle\,\psi_I \right\|_{\mathfrak{F}} \tag{11.4}$$

であり，$\{\langle f,\psi_I\rangle\}_{I\in\Gamma}$ を全ての $\langle f,\psi_I\rangle$ から選ぶアルゴリズムが係数の大きさに基づいていることを 11.3 節で証明する．面白いことにこのことを証明するには，Banach によってすでに考えられていた L_pのような関数空間と l_pのような数列空間の関係についての問題を考える必要があるのである．Banach [B] は，L_pと l_pは $p=2$ または $p=\infty$ のときのみ同型であることを示した．例えば Haar 基底を用いれば，L_2が l_2に同型であることを示すのはとても簡単なことであり，L_∞が l_∞に同型であることは 50 年代に Pelczynski が示している．このことから，$p\neq 2,\infty$ の他の p については何がいえるかという問いが生じる．我々は，11.4 節で L_p, $1<p<\infty$ が連続的な包含関係

$$l_{p,\min(p,2)} \subset x_p \subset l_{p,\max(p,2)}$$

を満たす空間 x_pに同型であることを示す．ここで $l_{p,q}$は可算無限の添字集合に基づく Lorentz 空間である．

$\sigma_N(f)_{\mathfrak{F}}$ についての結果 (11.4) の系として，[DeJPo] の主要な結果の一つが，やはり 11.4 節でただちに得られる．それは，ψに関するある条件の下で $1<p<\infty$ およびある範囲の α に対して

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^{\alpha/d}\sigma_N(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)}]^{\tau}\frac{1}{N} < \infty \iff f\in B^{\alpha} \tag{11.5}$$

が成り立つというものである．ここで $B^\alpha = B_\tau^{\alpha,\tau}$, $\tau=(\alpha/d+1/p)^{-1}$ は Besov 空間（定義については 11.2 節を見よ）である．[DeJPo] では $p=\infty$ の場合が未解決であった．$p=\infty$ のときには実は誤差を測るのに使う空間の自然な候補が二つある．最も明らかなものはもちろん L_∞ である．しかし，よく知られているように L_p空間を規格化して，p を無限大にしたときの極限が，平均振動が有界であるような関数の空間である BMO となるようにすることができる．さて，上に述べた結果は $f\in B^\alpha$ が$\sum_{N=1}^{\infty}[N^{\alpha/d}\sigma_N(f)_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}]^{\tau}1/N<\infty$, $\tau=d/\alpha$ と同値であることを示唆している．11.4 節で Rochberg-Taibleson の結果からただちにこれが正しいことを示す．

L_∞は無条件基底を持たないので，L_∞を，その元のウェーブレット係数の大きさによりうまく記述することはできない．BMO がその代わりになることがある．しかしながら，ある種の応用においては Besov 空間 $B_\infty^{0,1}$ の方がよい．というのは $B_\infty^{0,1}$ において小さい誤差は，L_∞でも小さいことが保証されるからである．11.5 節で，誤差を $B_\infty^{0,1}$ で測る場合の，与えられた fの近最適近似を作るアルゴリズムを導く．11.6 節では，作用素の圧縮に関して同様なテクニック

を開発する．より詳しく述べると，誤差を作用素ノルムで測った場合に，Besov 空間 $B_1^{\alpha,1}$ に作用する作用素の，ある自然でより単純な作用素による最適近似をどのようにして得るのかを示すのである．

次節 11.2 では，まず後で必要となる補助的な結果をまとめ，我々の考える空間 $\mathfrak{F}$ のクラスを定義する．

最後に，他にも我々のテクニックと結果をあまり変更せずに応用することができる状況があることを注意しておきたい．今にわかることだが，関数空間や超関数空間から対応する数列空間へ変換ができるということは重要なことである．これは例えば双正規直交ウェーブレットならばできるので ([CoDFe], [Co] 参照)，我々の結果はこのようなもっと一般的な状況でも小さい変更だけで成り立つ．

記法上の簡潔さのため，結果を 1 次元の場合にのみ述べることにする．高次元の場合に結果が大きく違ってくるときにはそのことをはっきりと述べる．

11.2 関数空間

この節では我々の考える空間を定義し，その性質を思い出しておく．短くまとめて詳しいことは [FJ] にゆずる．古典的なことであるが，多くの関数空間は共通の構造を持っている．L_p $(1 < p < \infty)$ またはより一般的に（実）Hardy 空間 H_p, $0 < p < \infty$，これらの空間に基づく Sobolev 空間，Besov 空間，そして有界平均振動の関数からなる BMO 空間 のような空間は全て，例えば適当な Littlewood–Paley 表現により定義することができる．

$L_p = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ の場合をもっと詳しく見てみよう．この空間のノルムは古典的にはもちろん

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

により定義される．さて $\{h_I\}_{I:\text{ 二進キューブ}}$ を直線上の Haar 系とする．関数 h_I は単一の関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1/2 \text{ のとき} \\ -1 & 1/2 < x < 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

から平行移動とダイレーションによって得られる．

$$h_I(x) = 2^{\nu/2} h(2^\nu x - k)$$

ただし，ある整数ν と kに対して $I = [2^{-\nu}k, 2^{-\nu}(k+1))$ である．Haar 系は L_2 の直交基底で

ある．その結果一般の関数 $f \in L_2$ は

$$f(x) = \sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \langle f, h_I \rangle\, h_I(x),$$

という展開ができ，

$$\|f\|_{L_2} = \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

である．つまり写像 $S_h : f \to \{\langle f, h_I \rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ は L_2 と l_2の等長写像である．他の $p \neq 2$ についても，Haar 系は無条件基底であり，Littlewood–Paley 理論から次が成り立つ．

$$\|f\|_{L_p} \approx \left\| \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(|\langle f, h_I \rangle| \tilde{\chi}_I(x) \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \tag{11.6}$$

ここで$\tilde{\chi}_I(x) = \chi(x)/|I|^{1/2}$ は「L_2-規格化された」I の特性関数である．($C_1 \|f\| \leq \|g\| \leq C_2 \|f\|$ となる定数 C_1 および C_2 が存在するとき，$\|f\| \approx \|g\|$ と書く．) $p = 2$ のときは Fubini の定理により右辺は $\{\langle f, h_I \rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ の l_2-ノルム に帰着する．これは他の p についても数列空間のノルムを定義するが，l_p-ノルム に比べて非常に複雑であり，この複雑なノルムを持った数列空間が L_pと同型となる．

Haar 系は直交ウェーブレット基底の最も単純な例である．他の例として，任意になめらかで，任意に多くの数だけのモーメントが 0 である，すなわち与えられた定整数 $N \geq 1$ に対して$\psi \in C^{(N)}$ でありかつ $\int x^\gamma \psi(x)\, dx = 0$ が全ての $0 \leq \gamma \leq N$ について成り立つような関数 ψ から，同じ様な方法で ψ_I を作った $\{\psi_I\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ がある．実際，多重解像度解析（[M], [D] 参照）により無限遠で非常に速く減衰する ψ や，台がコンパクトであるような ψ （台の測度は N に比例する）さえも見つけることができる．このようなより洗練された基底に対しても，(11.6) に似た L_p の特徴付けができる．このような基底は，他の空間を特徴付けるのにも使える．例えば Hardy 空間は $p > 1$ のとき L_p と一致し，全ての p, $0 < p < \infty$ に対してもし N が十分大きければ（正確には p によってその大きさは決まる）

$$\|f\|_{H_p} \approx \left\| \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(|\langle f, \psi_I \rangle| \tilde{\chi}_I(x) \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \tag{11.7}$$

が成り立つ．

Sobolev 空間でも事情は同様である．$l \geq 0$ を整数とし，$1 < p < \infty$ とする．(斉次) Sobolev 空間 H_p^l は l階微分が L_p に入るものとして定義される．

$$\|f\|_{H_p^l} = \left\| D^l f \right\|_{L_p} < \infty$$

与えられた l に対して，N が十分大きければ

$$\|f\|_{H_p^l} \approx \left\| \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(|I|^{-l} |\langle f, \psi_I \rangle| \tilde{\chi}_I(x) \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \tag{11.8}$$

が成り立つ．

空間 H_p^l は l が非整数であるのを許すことと，p の範囲を $0 < p < \infty$ とすることの二つの有用な方法で一般化できる．$I^\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{R}$ を f の α次の Riesz ポテンシャルとすると，$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi)$ である．空間 H_p^α, $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$ は

$$\|f\|_{H_p^\alpha} = \left\| I^{-\alpha} f \right\|_{H_p} < \infty$$

であるような全ての要素 f（正確には多項式で割った超関数 $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$）を集めたものである．$\alpha = l$ で $p > 1$ のときはこの空間は，ノルムの同値を除いて H_p^l と一致する．対応する数列空間は

$$\|s\|_{h_p^\alpha} = \left\| \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(|I|^{-\alpha} |s_I| \tilde{\chi}_I(x) \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} < \infty \tag{11.9}$$

である数列 $s = \{s_I\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ の空間 h_p^α である．(高次元では指数 $-\alpha$ は $-\alpha/d$ で置き換えられる．) ウェーブレット変換 $f \to \{\langle f, \psi_I \rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ はこの場合 H_p^α と h_p^α の同型写像である（ただし N は p と α に依存して十分大きい場合）．

Besov 空間はなめらかさを表すモジュライやさまざまな Littlewood–Paley 関数を使うなどして，いくつもの同等な方法で定義できる．ここでは複数の異なる記述を必要としない．必要なのは直交ウェーブレットによる特徴付けである．まず，適当な数列空間を定義しよう．空間 b_p^α, $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty$ は

$$\|s\|_{b_p^\alpha} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{l(I) = 2^{-\nu}} |I|^{-\alpha} |s_I| \tilde{\chi}_I(x) \right\|_{L_p}^p \right)^{1/p} < \infty \tag{11.10}$$

であるような全ての数列 $s = \{s_I\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ の集合である．(ここでも高次元の場合には $-\alpha$ は $-\alpha/d$ で置き換えられる．) この定義に関して注意すべきことがいくつかある．同じ長さの二進区間は互いに交わらないので L_pノルムに含まれる積分は簡単に実行できる．このようにして

$$\|s\|_{b_p^\alpha} = \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(|I|^{-\alpha - 1/2 + 1/p} |s_I| \right)^p \right)^{1/p}$$

となる．特に

$$b_2^0 = l_2$$

であり，また

$$\text{もし}\ \frac{1}{p}=\alpha+\frac{1}{2}\text{ならば}\ \|s\|_{b_p^\alpha}=\left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}}|s_I|^p\right)^{1/p} \tag{11.11}$$

である．

ここで Besov 空間 B_p^α を

$$\|f\|_{B_p^\alpha}=\|\{\langle f,\psi_I\rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}}\|_{b_p^\alpha}<\infty$$

により定義することができる．ウェーブレット変換 $f\to\{\langle f,\psi_I\rangle\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ はここでも等長変換であり，これにより B_p^α と b_p^αを同一視できる．

この論文では主に関数空間のいわゆる斉次バージョンを扱うことになる．このような空間は伝統的にドットを用いて表される（例えば$\dot{B}_p^\alpha$）ここでは記法の簡潔さのためこのドットを省く．Besov 空間の場合，ここでの定義が，なめらかさや Littlewood–Paley による描像だけの違いを含んでいたりする古典的な定義と一致するためには，一般にパラメータ N, α, および p に標準的な制限を課さなくてはならない（[FJ] 参照）．さらに注意として非等質空間の場合にも我々の証明する結果に明らかに似た結果があることを挙げておく．

11.3　基本的な圧縮の原理

前節で議論したように，我々の考える空間 $\mathfrak{F}$ はそれぞれ対応する数列空間 $\mathfrak{f}$ と同型である．各二進キューブ I に対して e_I を Kronecker 列

$$(e_I)_J=\begin{cases}1 & J=I\text{のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とする．与えられた有限集合 Γ に対して $1_{\Gamma,\mathfrak{f}}$ を規格化された特性列

$$1_{\Gamma,\mathfrak{f}}=\sum_{I\in\Gamma}\frac{e_I}{\|e_I\|_{\mathfrak{f}}}$$

とする．全ての有限集合 Γ に対して

$$C_1(\#\Gamma)^{1/p}\le\left\|1_{\Gamma,\mathfrak{f}}\right\|_{\mathfrak{f}}\le C_2(\#\Gamma)^{1/p} \tag{11.12}$$

となるような定数 C_1,C_2 が存在するとき，$\mathfrak{F}$ を p-空間（$1\le p\le\infty$）という．$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{f}$ は同型であるので，この条件は

$$\left\|\sum_{I\in\Gamma}\frac{\psi_I}{\|\psi_I\|_{\mathfrak{F}}}\right\|_{\mathfrak{F}}\approx(\#\Gamma)^{1/p},\quad N\ge 1 \tag{11.13}$$

と同値である．このような p-空間に対して次の原理が成り立つ．

基本原理 11.1 $1 \le p \le \infty$ とする．もし $\mathfrak{F}$ が p-空間ならば，

$$\frac{1}{c}\left\|f^N\right\|_{\mathfrak{F}} \le \sigma_N(f)_{\mathfrak{F}} \le \left\|f^N\right\|_{\mathfrak{F}}, \quad N \ge 1$$

ここで f^N は f の分解から $|\langle f, \psi_I\rangle|\,\|\psi_I\|_{\mathfrak{f}}$ をできるだけ大きくするように選ばれた N 個の項である．

証明 $\sigma_N(f)_{\mathfrak{F}}$ が右辺に押さえられていることは明らかで，我々は反対側の不等式を証明すればよい．この不等式を数列空間レベルで言い換えると，各数列 $s = \{s_I\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ に対して

$$\frac{1}{c}\left\|s^N\right\|_{\mathfrak{f}} \le \Sigma_N(s)_{\mathfrak{f}} := \inf_{\#\{I: s_I^0 \neq 0\} \le N} \left\|s - s^0\right\|_{\mathfrak{f}} \tag{11.14}$$

であることを示せば十分である．ただし，$s^N = \{s_I^N\}_{I:\ \text{二進キューブ}}$ は数列 s から N 個の要素を $s_I\,\|e_I\|_{\mathfrak{f}}$ をできるだけ大きくするように選ばれたものである．s の要素を出発点にすればこれを完全に使ってしまってもよいことがわかる．より詳しくは

$$\Sigma_N(s)_{\mathfrak{f}} = \inf_{\#\Gamma \le N} \left\|s^\Gamma\right\|_{\mathfrak{f}}$$

である．ただし，各集合 Γに対して s^Γ は $I \in \Gamma$ならば $(s^\Gamma)_I = 0$，その他の場合は$= s_I$と定義される．適当な集合（Γ_0 とする）に対して $s^N = s^{\Gamma_0}$となる．さて，Γ が $\#\Gamma \le N$ であるような任意の集合であるとすると，$I \in (\Gamma \cap \Gamma_0) \cup (\Gamma^c \cap \Gamma_0^c)$ であるときには $(s^\Gamma)_I = (s^{\Gamma_0})_I$ であり，したがって三角不等式により

$$\left\|s^{\Gamma_0}\right\|_{\mathfrak{f}} \le \left\|\{s_I\}_{I \in \Gamma \cap \Gamma_0^c}\right\|_{\mathfrak{f}} + \left\|\{s_I\}_{I \in \Gamma^c \cap \Gamma_0^c}\right\|_{\mathfrak{f}} \le \left\|\{s_I\}_{I \in \Gamma \cap \Gamma_0^c}\right\|_{\mathfrak{f}} + \left\|s^\Gamma\right\|_{\mathfrak{f}} \tag{11.15}$$

が成り立つ．Γ_0の定義により

$$\max_{I \in \Gamma \cap \Gamma_0^c} |s_I|\,\|e_I\|_{\mathfrak{f}} \le \min_{I \in \Gamma_0 \cap \Gamma^c} |s_I|\,\|e_I\|_{\mathfrak{f}}$$

が成り立つ．$\mathfrak{F}$ が p-空間であることから

$$\begin{aligned}\left\|\{s_I\}_{I \in \Gamma \cap \Gamma_0^c}\right\|_{\mathfrak{f}} &\le \max_{I \in \Gamma \cap \Gamma_0^c} |s_I|\,\|e_I\|_{\mathfrak{f}} \left\|1_{\Gamma \cap \Gamma_0^c, \mathfrak{f}}\right\|_{\mathfrak{f}} \\ &\le \min_{I \in \Gamma_0 \cap \Gamma^c} |s_I|\,\|e_I\|_{\mathfrak{f}} \frac{\#(\Gamma \cap \Gamma_0^c)^{1/p}}{\#(\Gamma_0 \cap \Gamma^c)^{1/p}} \frac{c_2}{c_1} \left\|1_{\Gamma_0 \cap \Gamma^c, \mathfrak{f}}\right\|_{\mathfrak{f}} \le \frac{c_2}{c_1} \left\|s^\Gamma\right\|_{\mathfrak{f}}\end{aligned} \tag{11.16}$$

である．これを (11.15) に代入して$\left\|s^{\Gamma_0}\right\|_{\mathfrak{f}} \le (c_2/c_1 + 1)\left\|s^\Gamma\right\|_{\mathfrak{f}}$ となり，Γ は任意であるので，$c = 1 + c_2/c_1$として (11.14) が証明された． ∎

定理 11.2 空間 H_p^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, は p-空間である．

証明　前節で述べたように $H = H_p^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ は $h = h_p^\alpha$ と同型である．

我々は次の式を主張する．

$$c_1(\#\Gamma)^{1/p} \le \left\| \sup_{I\in\Gamma} |I|^{-1/p}\chi_I(x) \right\|_{L_p} \tag{11.17}$$

連続な埋め込み $l_2 \subset l_\infty$ より

$$\left\| \sup_{I\in\Gamma} |I|^{-1/p}\chi_I(x) \right\|_{L_p} \le \left\| \left(\sum_{I\in\Gamma} (|I|^{-1/p}\chi_I(x))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} = \|1_{\Gamma,h}\|_h$$

である．よって，(11.17) から (11.12) の不等式の一つが証明される．

不等式 (11.17) は簡単に証明できる．$F(x) = \sup_{I\in\Gamma} \frac{1}{|I|^{1/p}}\chi_I(x)$ とし，$\Gamma_k = \{I \in \Gamma : l(I) = 2^{-k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ とする．

$$\begin{aligned}
\int F(x)^p\,dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^{k/p} \le F < 2^{(k+1)/p}} F(x)^p\,dx \\
&\ge c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k |\{x : F(x)^p \ge 2^k\}| \\
&\ge c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \sum_{I\in\Gamma_k} |I| = c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \#\Gamma_k = c\#\Gamma
\end{aligned}$$

が成り立つ．これにより (11.17) が証明された．

連続な埋め込み $l_1 \subset l_2$ より，(11.12) の 2 番目の不等式を証明するには

$$\left\| \sum_{I\in\Gamma} |I|^{-1/p}\chi_I(x) \right\|_{L_p} \le C_2(\#\Gamma)^{1/p} \tag{11.18}$$

を示せばよい．同じ長さの二進キューブは互いに交わらないので，x に依存する適当な整数 k_0 に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in\Gamma} |I|^{-1/p}\chi_I(x) &\le \sum_{k\le k_0} 2^{k/p} = 2^{k_0/p}\,1/(1-2^{-1/p}) \\
&\le 1/(1-2^{-1/p}) \left(\sum_{I\in\Gamma} |I|^{-1}\chi_I(x) \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺を p 乗して積分すると $C_2 = 1/(1-2^{-1/p})$（高次元では $C_2 = 1/(1-2^{-d/p})$）として (11.18) になる．∎

後でわかることだが，どんな p に対しても p-空間となっていないような古典的空間がある．あまり古典的ではないが画像圧縮に関連して興味深い例 ([DeJLu] 参照) が今固定した数列 $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$,

$\nu \in Z$ に対して

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \left(\sum_I |\langle f, \psi_I \rangle |I|^{-\alpha_\nu/d}|^2\right)^{1/2}$$

をノルムとする空間 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{\alpha_\nu\})$ である．これはスケールによって変わりうるなめらかさのパラメータをもった Sobolev タイプの空間である．α_ν が定数でないときにはこの空間を単一の p に結びつけられないことを見るのは簡単である．実際，

$$\sigma_N(f)_{\mathcal{E}} = \left\|\{\langle f, \psi_I \rangle\}^N\right\|_{\mathcal{E}}$$

である．ここで $\{\langle f, \psi_I \rangle\}^N$ は $\{\langle f, \psi_I \rangle\}$ から N 個の係数を $|\langle f, \psi_I \rangle |I|^{-\alpha_\nu/d}|$ をできるだけ大きくするように選んでできた数列である．

11.4　L_p と数列空間

$l_{p,q}$, $0 < p, q \le \infty$, を二進キューブに個数測度を与えた測度空間に基づく Lorentz 空間とする．(Lorentz 空間およびその基本的性質，参考文献については [BeL] を参照のこと．) (11.12) 式が，任意の数列 $s = \{s_I\}_{I:\ 二進キューブ}$ に対して

$$C_1 \|s\|_{l_{p,\infty}} \le \left\|\{s_I/\|e_I\|_{\mathfrak{f}}\}\right\|_{\mathfrak{f}} \le C_2 \|s\|_{l_{p,1}} \tag{11.19}$$

が成り立つことを要請することと同値であることを示すのは簡単な練習問題である．このように再定式化しておくと便利であり，例えば p-空間に関する補間の結果をただちに導くことができる．

「両立する」空間の組 $\bar{A} = (A_0, A_1)$ が与えられとき，実補間空間を定義する一つの方法として

$$E(\lambda, s; \bar{A}) = \inf_{\|s^0\|_0 \le \lambda} \left\|s - s^0\right\|_1$$

により定義される最良近似汎関数を使うものがあったことを思い出しておこう ([BeL] 参照)．実補間空間 $\bar{A}_{\theta q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ はすべての $s \in A_0 + A_1$ からなり，

$$\|s\|_{\bar{A}_{\theta q}} = \left(\int_0^\infty (\lambda^{1-\theta} E(\lambda, s; \bar{A})^\theta)^q \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q}$$

をノルムとする．特に l_p-空間の場合，固定した $0 < p \le \infty$ と $0 < r \le \infty$ に対して，$1/\tau = (1-\theta)/\theta + 1/p$, $1/q = 1 - \theta + \theta/p$ として

$$(l_0, l_{p,r})^\theta_{\theta,q} = l_\tau \tag{11.20}$$

が成り立つことはよく知られている ([BeL], ch. 7 参照)．ここで l_0 は「ノルム」$\|s\|_{l_0} = \#\{I : s_I \neq 0\}$ が備わった有限数列の空間である．

定理 11.2 と (11.20) を組合せて (11.19) を用いれば，有限ウェーブレット展開による与えられた度合いの非線形近似による空間の特徴付けがただちに得られる．

系 11.3　固定された $\alpha \in \mathbb{R}$ と $1 \leq p < \infty$ に対し $H = H_p^\alpha$とする．このとき

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^{\beta/d} \sigma_N(f)_H]^\tau \frac{1}{N} < \infty \iff f \in B_\tau^{\alpha+\beta}$$

ただし $1/\tau = 1/p + \beta/d$，$\beta > 0$ である．

証明　$\|e_I\|_h = |I|^\gamma$，$\gamma = 1/p - \alpha/d - 1/2$ に注意しよう．これより，$s = \{\langle f, \psi_I \rangle |I|^\gamma\}_I$ として (11.19) を使えば

$$\frac{1}{c} E(N, s; l_0, l_{p,\infty}) \leq \sigma_N(f)_H \leq c E(N, s; l_0, l_{p,1})$$

を得る．(11.20) と単純な離散化により，必要十分条件 $s \in l_\tau$ で $\sum_{N=1}^\infty [N^{\beta/d} \sigma_N(f)_H]^\tau 1/N$ は有限である．しかし，(11.11) を使えば簡単に $\{\langle f, \psi_I \rangle |I|^\gamma\}_{I:\text{ 二進キューブ}} \in l_\tau$ が $f \in B_\tau^{\alpha+\beta}$と同値であることがわかり，これで証明終わりである．　∎

ここで少し脱線して，(11.19) の包含関係がどれくらい洗練されうるか，そしてそれが l_p型の数列空間で L_p にどの程度近づけるかを与えてくれる事情を見ておく．もちろん L_2 が l_2と同型であることは自明であり，Pelczynski [P] により L_∞ が l_∞と同型であることが 30 年ほど前に示されている．導入でも述べたように，可能性はこれ以外にないというのが Banach [B] による古典的な結果である．つまり，L_p と l_p は，$p = 2$ と $p = \infty$ 以外に同型になることはない．次に，定理 11.2 の証明中に確立された不等式のいくつかと簡単な補間に関する結果を組合わせると，L_p, $1 < p < \infty$ が Lorentz 空間 $l_{p,\max(p,2)}$ および $l_{p,\min(p,2)}$ のあいだに連続的に埋め込まれるある数列空間と同型であることがわかる．より詳しくは，連続的に埋め込まれるのは空間 $h_p^{\alpha,2}$, $\alpha/d = 1/p - 1/2$ である．もちろん $h_p^{\alpha,2} \approx h_p^0 \approx L_p$ であるのでこれで十分である．対応する結果は Hardy 空間 H_1についても正しいことを注意しておく．

命題 11.4　$1 \leq p < \infty$ とし $\alpha/d = 1/p - 1/2$ とする．このとき，次の連続的な包含関係がある．

$$l_{p,\min(p,2)} \subset h_p^\alpha \subset l_{p,\max(p,2)}$$

証明　空間 h_p^α は，次のノルム

$$\|s\|_{h_p^{\alpha,q}} = \left\| \left(\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} (|I|^{-\alpha/d} s_I \tilde{\chi}_I(x))^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p}$$

を与えたより一般的なクラスの空間 $h_p^{\alpha,q}$ に属する．ただし $\tilde{\chi}_I = \chi_I/|I|^{1/2}$ は I の L_2特性関数である．特に $h_p^\alpha = h_p^{\alpha,2}$ である．この空間の中で表現すると，(11.17) は $\alpha/d = 1/p - 1/2$ として $h_p^{\alpha,\infty} \subset l_{p,\infty}$ を意味する．同様に (11.18) から $\alpha/d = 1/p - 1/2$ として $l_{p,\infty} \subset h_p^{\alpha,1}$ が示される．$q = p$ のときには空間 $h_p^{\alpha,q}$ の定義中の積分を実行できて，$h_p^{\alpha,p} = l_p$ が示される．いまや命題は補間により導かれる．例えば $p \geq 2$ としよう．すると，$1/2 = (1-\theta)/1 + \theta/p$ ならば

$$l_{p,2} = (l_{p,1}, l_p)_\theta \subset (h_p^{\alpha,1}, h_p^{\alpha,p})_\theta = h_p^{\alpha,2} \tag{11.21}$$

である．ここで Lorentz 空間と空間 $h_p^{\alpha,q}$ が補間において自然にふるまうことを用いた（[R], [Hu], [FJ] 参照）．一方，$p < 2$ ならば $h_p^{\alpha,q}$ の定義中で埋め込み $l_p \subset l_2$ を用いることにより

$$l_p = h_p^{\alpha,p} \subset h_p^{\alpha,2} \tag{11.22}$$

となる．二つの包含関係 (11.21) と (11.22) が問題となっている包含関係の左側の証明となっている．右側の証明も同様である．∎

定理 11.19 中の包含関係は $\min(p,2)$ をそれより大きい q で，$\max(p,2)$ をそれより小さい q で置き換えることができないという意味で可能な最良のものである．この事情をみておくために，数列$\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を一つ固定しよう（簡単のため 1 次元で議論する）．まず，長さ 1 のキューブに数列の数を次のように分布させる．すなわち $s^{(1)} = \{s_I^{(1)}\}$ を

$$s_I^{(1)} = \begin{cases} \lambda_k & I = k + [0,1] \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

により定義する．長さ 1 の二進区間 1 は互いに交わらないので，

$$\left\| s^{(1)} \right\|_{h_p^\alpha} = \left(\sum_k |\lambda_k|^p \right)^{1/p} \tag{11.23}$$

が成り立つことがわかる．一方 $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}_{i=1}^\infty$ を，大きさが減少するように λ を並べ変えた数列とする．そして，できた数列の数を区間 $I \subset [0,1]$ に，区間 $[0,1]$ と数 λ_1^* から始めて順に分布させていく．より正確には，$s^{(2)} = \{s_I^{(2)}\}$ を

$$s_I^{(2)} = \begin{cases} I|^{1/2-1/p} \lambda_{k+2^\nu}^* & I = [k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}),\quad \nu \geq 0,\ 0 \leq k < 2^\nu \text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義するのである．簡単な計算により

$$\left\|s^{(2)}\right\|_{h_p^\alpha} \approx \left(\sum_{\nu\geq 0}(2^{\nu/p}\lambda_{2^\nu}^*)^2\right)^{1/2} \approx \|\lambda\|_{l_{p,2}} \tag{11.24}$$

がわかる．二つの等式 (11.23) と (11.24) は，明らかに命題中の指数が最良のものであることを示している．実は，これらの等式はもう少し強いことを示している．x を各点の質量が 1 であるように正規化された可算無限離散測度空間に基づく再配列不変空間としよう．x が連続的に h_p^α に埋め込まれるならば，x は l_p にも $l_{p,2}$ にも埋め込まれる．逆に h_p^α が x に連続的に埋め込まれるならば，l_p と $l_{p,2}$ にも埋め込まれる．特に次の定理が成り立つ．

定理 11.5　$1<p<\infty$ とする．x を，各点の質量が 1 に正規化された，可算無限離散測度空間に基づく再配列不変空間とする．L_p が x に同型ならば，

$$l_{p,\min(p,2)} \subset x \subset l_{p,\max(p,2)}$$

が成り立つ．同様なことは Hardy 空間 H_1についても正しい．

証明　これは, Lorentz 空間 $l_{p,q}$ の大きさが 2 番目のパラメータとともに増大する，つまり $l_{p,q_1} \subset l_{p,q_2}$, $q_1 \leq q_2$ を単に使えば，定理の前の議論から導かれる．∎

11.5　BMO 空間における圧縮

多くの応用においては L_∞ が誤差を測るのに自然な空間である．残念ながら L_∞ は無条件基底を持たず，特に直交基底による Littlewood–Paley による描像を持たない．L_∞ の代わりはいくつかある．調和解析でよく使われるものが，有界平均振動関数からなる BMO 空間である．この節ではこの空間について考える．次の節では，やはり L_∞ によく似ている Besov 空間を用いる．

Rochberg–Taibleson [RoT] の結果からただちに，BMO ノルムで測った誤差について有限ウェーブレット分解により, よく近似できる関数の特徴付けが得られることを，簡単にみておこう．

まず，$p=\infty$ の場合の空間 $h_p^{\alpha,q}$ が必要である．有限の p の場合は命題 11.19 で導入しておいた．$h_p^{q,\alpha}$ のノルムの表現で L_p を L_∞ に単純に置き換えて得られるもっとも明らかな $p=\infty$ への拡張は，残念ながら正しくない．正しい定義はもっと複雑である（[FJ] 参照）．次のようにする．

$$\|s\|_{h_\infty^{\alpha,q}} = \sup_{I:\text{ 二進キューブ}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I \sum_{J\subset I}(|J|^{-\alpha/d}|s_J|\tilde{\chi}_J(x))^q\,dx\right)^{1/q}$$

通常通り $q = \infty$ の場合，上の式は和を適切な上限で置き換えたことになっている．特に，$h_\infty^{\alpha,\infty} = b_\infty^\alpha$ であることが簡単にわかる．$q < \infty$ の場合，積分を実行すると

$$\|s\|_{h_\infty^{\alpha,q}} = \sup_{I:\ \text{二進キューブ}} \left(\frac{1}{|I|} \sum_{J \subset I} (|J|^{-\alpha/d-1/2}|s_J|)^q |J| \right)^{1/q}$$

が得られる．このことにより，$\|s\|_{h_\infty^{\alpha,q}}^q$ が実は離散測度のいわゆる Carleson ノルム

$$\sum_J (|J|^{-\alpha/d-1/2}|s_J|)^q |J| \delta_{x_J, l(J)}$$

と同値であることが明らかとなる．ここで $x_J = 2^{-\nu}k$ は $J = J_{\nu k}$ の「左下角」である．ここで [RoT] の結果を次のようにあらわすことができる．

命題 11.6　(Rochberg-Taibleson [RoT])
各々固定された $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{N=1}^\infty [N^{\beta/d} \Sigma_N(s)_{h_\infty^{\alpha,q}}]^\tau \frac{1}{N} \approx \sum_{N=1}^\infty [N^{\beta/d} \Sigma_N(s)_{b_\infty^\alpha}]^\tau \frac{1}{N}$$

が各 $0 < \tau \leq \infty$ と $\beta > 0$ について成り立つ．

言い方を変えると，空間 $h_\infty^{\alpha,q}$ は，異なる q についてとても近く，近似空間は全て同じなのである．

このことを関数空間の場合に使ってみよう．ウェーブレット変換は有界平均振動関数の空間 BMO と $h_\infty^0 = h_\infty^{0,2}$ の等長写像を与える．したがって補題 11.6 からただちに次を得る．

命題 11.7　$1/\tau = \beta/d$ として

$$\sum_{N=1}^\infty [N^{\beta/d} \sigma_N(f)_{\mathrm{BMO}}]^\tau \frac{1}{N} < \infty \iff f \in B_\tau^\beta$$

が成り立つ．

証明　数列空間に戻って命題 11.6 を使えば，これは実は $1/p = (1-\theta)/\theta\ 1/q = 1-\theta$ として $(l_0, l_\infty)_{\theta,q}^\theta = l_p$ を言い換えているに過ぎない ((11.20) 参照)． ∎

11.6　L_∞ 近くでの別の圧縮方法

Besov 空間 B_∞^{01} は L_∞ の代わりとして使えるもう一つの空間である．第一に L_∞ に連続に埋め込まれており，B_∞^{01} で誤差が小さければ L_∞ でも誤差は小さい．さらに B_∞^{01} にはウェーブ

レット展開による単純な特徴付けがある．b^{01}_∞ を

$$\|\{\langle f, \psi_I\rangle\}\|_{b^{01}_\infty} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sup_{l(I)=2^{-\nu}} |s_I|/|I|^{1/2} < \infty$$

であるような数列 $s = \{s_I\}$ 全ての空間とする．このとき，ウェーブレット変換は B^{01}_∞ と b^{01}_∞ の同型写像である．

そこで，L_∞の代わりに B^{01}_∞ における近似を考えよう．つまり，$\sigma_N(f)_{B^{01}_\infty}$ に対してほとんど最適であるような N 個の係数を探すことに興味がある．これまでと同様に，この問題を数列のレベルで言い換えることができ，このとき問題は行列に関する次の問題の特別な場合となる．

二つの（空でない）可算添字集合 I と J に対し，$\mathfrak{b} = l_1(l_\infty)$ を

$$\|a\|_{\mathfrak{b}} = \sum_{i\in I} \sup_{j\in J} |a_{ij}| < \infty$$

を満たす行列 $a = \{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ 全ての集合とする．また，

$$\Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}} = \inf_{\#\{a^0_{ij}\neq 0\}\leq N} \left\|a - a^0\right\|_{\mathfrak{b}}, \quad N \geq 1 \tag{11.25}$$

とする．我々は行列 a^0 を選ぶほとんど最適な方法をみつけたい．まず，各 $\epsilon > 0$ に対して $\#\{a^0 \neq 0\} \leq N$ であるような a^0 で$\Sigma_N(a) \leq \left\|a - a^0\right\| \leq (1+\epsilon)\Sigma_N(a)$ を満たすものをみつけることができることに注意しよう．さらにまた，a^0 は a から N 個の要素を選ぶことにより得られると常に仮定してよい．つまり，$\#\Gamma_N = N$となるある集合Γ_Nに対して

$$(a^0)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ij \in \Gamma_N \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である．実はより強いことがすぐにいえる．固定した各 $i \in I$ に対して N_i を a_{ij} から i の段階で選んだ数とする．特に $0 \leq N_i \leq N$ であり $\sum_{i\in I} N_i = N$である．さて明らかに a^0 は各段階 $i\ (i \in I)$ で（大きさの）大きいものから N_i 個選んで得られると仮定してよい．したがって，実際の問題は各段階で何個を使うかを決めることにある．

ほとんど最適な数列 a^0 をみつけて a から取り除く我々のアルゴリズムは補助的な数列 $\bar{a}$ に基づいている．$\bar{a}$ がどのように構成されるかを次に述べよう．

数列 a を固定する．各 $i \in I$ に対し $a^*_i = \{(a^*_i)_k\}^\infty_{k=1}$ を $\{a_{ij}\}_{j\in J}$ を非増加に並べ換えたものとする．$t \geq 0$ に対し $a^*_i(t)$ を

$$k - 1 \leq t < k \quad \text{に対して} \quad a^*_i(t) = (a^*_i)_k \tag{11.26}$$

により定義し，$\bar{a}^*_i(t), t \geq 0$ を $a^*_i(t)$ の最大凸マイノラントとする．数列 $\bar{a} = \{\bar{a}_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ は全ての $k \geq 1$ に対して $(\bar{a}^*_i)_k = \bar{a}^*_i(k)$ であるような任意の定まった数列である．

補題 11.8　与えられた数列 a に対し $\bar{a}$ を上で定義した数列とする．このとき

$$\Sigma_{2N}(\bar{a})_{\mathfrak{b}} \le \Sigma_{2N}(a)_{\mathfrak{b}} \le 2\Sigma_N(\bar{a})_{\mathfrak{b}}, \quad N \ge 1$$

が成り立つ．

証明　$\epsilon > 0$ の範囲内で $E(2N, a)$ を探すには，各レベル i で然るべき数の最も大きい要素を選ばなくてはならない．この数を $(2N)_i$, $i \in I$ としよう．さて，$\bar{a}_i^*$ が a_i^* のマイノラントであったことに注意しよう．したがって，各レベル i で $\bar{a}$ の $(2N)_i$ 個の最も大きい要素をとってくると，明らかに $\Sigma_{2N}(\bar{a})_{\mathfrak{b}} \le \sum_i (\bar{a}_i^*)_{(2N)_i} \le \sum_i (a_i^*)_{(2N)_i} \le (1+\epsilon)\Sigma_N(a)$ である．$\epsilon > 0$ は任意であるので，これで最初の不等式は証明された．2 番目の不等式は次の補題 ($\delta = 1/2$ として) から同様に導かれる．∎

補題 11.9　$f : \bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ を非増大関数とする．このとき最大凸マイノラント $\bar{f}$ は各 $0 < \delta < 1$ に対して

$$\bar{f}(t) \le f(t) \le \frac{1}{1-\delta}\bar{f}(\delta t), \quad t > 0$$

を満たす．

証明　簡単な練習問題．∎

補題 11.8 により，(11.26) で定義される各 $a_i^*(t)$ が凸であると仮定してよい．このようなとき最適分解を見つけるのは簡単である．各 $i \in I$ について $a_i^*(t)$ が凸であるような数列 a に対し，各 $k \ge 1, i \in I$ について

$$(\Delta a_i^*)_k = (a_i^*)_k - (a_i^*)_{k+1}$$

と定義する．a_i^* は非増大 $(\Delta a_i^*)_k \ge 0$ であり，凸性を仮定しているので，a_i^* は各固定した i について非増大数列となる．当然各要素 a_{ij} は適当な $k = k(j)$ に関してただ一つの $(a_i^*)_k$ と一致する．各 a_{ij} に量 $(\Delta a_i^*)_k(j)$ を結び付けて，数列 $a_{\mathrm{opt}} = a_{\mathrm{opt}}(N)$ を a の中の N 個の要素で $(\Delta a_i^*)_k$ の最も大きいものとする．明らかに a_{opt} は $\Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}}$ の定義に陰にでてきた極値問題の解であり，もっと明確には

$$\Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}} = \|a - a_{\mathrm{opt}}\|_{\mathfrak{b}}$$

であり

$$\#\{a_{\mathrm{opt}} \ne 0\} \le N$$

である．

注意 11.10　同様な議論を用いてもっと一般的に $\mathfrak{b} = l_q(l_p),\ 0 < p,\ q \leq \infty$ のときの類似した極値問題を解くこともできる．

さて，上の結果を B^{01}_{∞}での近似という特別な場合に応用しよう．定数 $N \geq 1$ と関数 fを固定し，対応する係数を $a = \{\langle f, \psi_I \rangle\}$ とする．各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し，同じ長さ $|I| = 2^{-i}$ を持った区間に対応する係数を Iの測度の適切な巾で割ったものを集めた族を a_iとする．

$$a_i = \{\langle f, \psi_I \rangle / |I|^{1/2}\}_{|I|=2^{-i}}$$

各々の族の元を非増大の順に並べる．各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して非増大数列 $a_i^* = \{(a_i^*)_k\}_{k=1}^{\infty}$ が得られる．各 $(a_i^*)_k$ は，ある長さ $|I| = 2^{-i}$の区間 I に対する $\langle f, \psi_I \rangle / |I|^{1/2}$ と等しい．このとき，この I が $(a_i^*)_k$ に対応するという．さて，各数列 a_i^* は最大凸マイノラント $\bar{a}_i^*(t)$ を持つ．全ての i と kに対して全ての $(\Delta a_i^*)_k$を考慮して最大の $(\Delta a_i^*)_k$を持つ N個の要素を取除く．これは N個の特別な区間 Iに対応する．この区間の族をΓ_Nとする．a_{opt} を

$$(a_{\mathrm{opt}})_I = \begin{cases} \langle f, \psi_I \rangle & I \in \Gamma_N \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

により定義する．上の一般的な議論から

$$\frac{1}{2} \|a - a_{\mathrm{opt}}(2N)\|_{b^{01}_{\infty}} \leq \Sigma_N(a)_{b^{01}_{\infty}} \leq \|a - a_{\mathrm{opt}}(N)\|_{b^{01}_{\infty}}$$

がわかる．ここで関数のレベルに戻る．

$$\bar{f}^N = \sum_{I \notin \Gamma_N} \langle f, \psi_I \rangle \psi_I \tag{11.27}$$

とする．B^{01}_{∞} と b^{01}_{∞} がウェーブレット変換によって同型であることを用いると，次を得る．

定理 11.11　与えられた関数 $f \in B^{01}_{\infty}$ に対し $\bar{f}^N$ を上の (11.27) で定義されたものとする．このとき，ある Nによらない定数 Cに対して

$$\frac{1}{C} \|\bar{f}^{2N}\|_{B^{01}_{\infty}} \leq \sigma_N(f)_{B^{01}_{\infty}} \leq \|\bar{f}^N\|_{B^0_1\infty}, \quad N \geq 1$$

が成り立つ．

注意 11.12　*多くの場合では $B^{\alpha}_q p$ の3番目のパラメータ qはあまり重要でない．しかし，ここではそうではない．$B^0_{\infty}\infty$ における近似に基づく近似空間は B^{01}_{∞}における近似に基づくものと

*この論文が書かれた後，B. Jawerth and M. Milman, *Wavelet decompositions and best approximation in Besov spaces* によりBesov空間で誤差を測った近似空間の厳密な記述が得られた．

は異なっている．これは単純な例をいくつか考えれば簡単にわかる．$\mathfrak{b}_1 = l_1(l_\infty)$ と $\mathfrak{b}_2 = l_\infty(l_\infty)$ を添字集合 $I = J = \mathbb{Z}$ に基づく行列の集合としよう．行列 $a = \{a_{ij}\}$ を固定した $\gamma \geq 1$ に対して

$$a_{ij} = \begin{cases} (i)^{-\gamma} & i \geq 1,\ j = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する．すると $\Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}_1} = \sum_{i>N} i^{-\gamma} \approx N^{1-\gamma}$ である．ただし $\Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}_2} = N^{-\gamma}$．したがって各 $0 < \theta < 1$ と $0 < \tau \leq \infty$ に対してγを

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} [N^{1-\theta} \Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}_1}^{\theta}]^{\theta} \frac{1}{N} \right)^{1/\tau} = \infty$$

となるように選ぶことができる．ただし

$$\left(\sum_{N=1}^{\infty} [N^{1-\theta} \Sigma_N(a)_{\mathfrak{b}_2}^{\theta}]^{\theta} \frac{1}{N} \right)^{1/\tau} < \infty$$

11.7 作用素の圧縮

注意 11.10 で述べたように，我々はただちに他の (ベクトル値) 空間に対する圧縮の結果を得ることができる．そのいくつかは関数空間上の有界作用素のクラスの圧縮に関係がある．

例を考えよう．我々は，Besov 空間 $B_1^{\alpha,1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ が (重み付き) l_1 空間に同型である，つまり

$$\|\{s_J\}_J\|_{l_1^\gamma} = \sum_J |J|^{-\gamma} |s_J|$$

として

$$\|f\|_{B_1^{\alpha,1}} \approx \|\{\langle f, \psi_J \rangle\}_{J:\ \text{二進キューブ}}\|_{l_1^\gamma}, \quad \gamma = \alpha/d - 1/2$$

であることを知っている．

同様に Besov 空間上の各有界作用素 Tは l_1 空間上の有界作用素に「行列」$A_T = \{\langle T, \psi_J \rangle \psi_I\}$ によって対応する．この写像 $T \mapsto A_T$ は同型写像であることが簡単にわかる．より正しくは，Schur の l_1上の有界作用素に関する古典的な結果により

$$\|T\|_{B_1^{\alpha,1} \to B_1^{\alpha,1}} = \sup_J \sum_I |\langle T, \psi_J \rangle \psi_I| \left(\frac{|J|}{|I|} \right)^\gamma$$

である ([FJ], section 10 参照)．さらに l_1^γ上の有界作用素に対応する行列 $A = \{A_{IJ}\}$ が与えら

れたとき，

$$Tf = T_A f = \sum_I \sum_J A_{IJ} \langle f, \psi_J \rangle \psi_I \tag{11.28}$$

により定義される作用素 Tは $B_1^{\alpha,1}$ 上で有界である．写像 $T \mapsto A_T$ と $A \mapsto T_A$ は互いに逆になっている．

$\#T$ を (11.28) の表現中の A_{IJ} の非負要素の個数と定義し，さらに

$$\sigma_N(T)_{B_1^{\alpha,1} \to B_1^{\alpha,1}} = \inf_{\#S \le N} \|T - S\|_{B_1^{\alpha,1} \to B_1^{\alpha,1}}$$

とする．数列空間との関係を用いて

$$\sigma_N(T)_{B_1^{\alpha,1} \to B_1^{\alpha,1}} = \Sigma_N(A_T)_{l_1^\gamma \to l_1^\gamma} = \inf_{\#A_S \le N} \|A_T - A_S\|_{l_1^\gamma \to l_1^\gamma}$$

を得る．ゆえに最適な S を探す問題と作用素 Tを特徴付ける問題を簡略化して数列空間上の対応する問題である程度まで近似することができる．次にこの二つの問題を詳しく考えよう．

二つの可算添字集合 I と Jからスタートする．$\mathcal{L}$ を

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup_j \sum_i |A_{ij}|$$

をノルムとする有界作用素 $l_1(J) \to l_1(I)$ 全体とする．与えられた行列 A と整数 Nに対し，まず

$$\Sigma_N(A)_{\mathcal{L}} = \inf_{\#B \le N} \|A - B\|_{\mathcal{L}} = \|A - A^{(N)}\|_{\mathcal{L}}$$

の意味で最適である行列 $A^{(N)}$ を見つけることに関心がある．これを解くために，空間 $\mathcal{L}$ を空間 $l_\infty(\mathbb{N} \times J)$ に次のようにして埋め込む．与えられた行列 $A = \{A_{ij}\}$ に対し $A_i^* = \{A_i^*(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を各 $i \in I$に対して数列 $\{A_{ij}\}_j$ を非増大に並べ換えたものとする．そして数列 $a = \{a_{ik}\}_{(i,k) \in I \times \mathbb{N}}$ を

$$a_{ik} = \sum_{l \ge k} A_i^*(l)$$

により定義する．少し考えれば次のことが成り立つことがわかる．

命題 11.13

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \|a\|_{l_\infty(I \times \mathbb{N})}$$

と

$$\Sigma_N(A)_{\mathcal{L}} = E(N, a; l_0, l_\infty) = a^*(N) \tag{11.29}$$

が成り立つ．ただし $l_\infty = l_\infty(I\times\mathbb{N})$ であり $l_0 = l_0(I\times\mathbb{N})$ である．ここで a^* は $a = \{a_{ik}\}_{(i,k)\in I\times\mathbb{N}}$ を非増大に並べ換えたものである．

もちろん l_0の要素によって $a \in l_\infty$の近似を見つける方法はわかっている．単純に a の N 個の最大元をとってくればよい．そして N個の最大元の対応する場所を保って元の行列 A に戻れば最適なもの $A^{(N)}$ を得る．

ここで関数空間に戻ることができる．作用素 Tが与えられたとき命題 11.13 は $B_1^{\alpha,1}$の作用素ノルムで誤差を測ったときの，A_S が N 個の非負成分を持つような Sで，最も良い近似 Sを得る方法を与えている．このことと，Hardy の不等式を応用すると，よく圧縮できる作用素の特徴付けが次のように得られる．

定理 11.14　$\beta > 0$ を仮定する．$1/S = \beta$, $\gamma = \alpha/d - 1/2$ とする．このとき

$$\sum_{I:\ \text{二進キューブ}} \sum_{k\geq 1} \left(k^{1+\beta}(A^\gamma_{I,\cdot})^*_k\right)^{1/\beta} \frac{1}{k} < \infty$$

の必要十分条件は

$$\left(\sum_N \left(N^\beta \sigma_N(T)_{B_1^{\alpha,1}\to B_1^{\alpha,1}}\right)^S \frac{1}{N}\right)^{1/S} < \infty$$

である．ここで $A^\gamma = A^\gamma_T = \{\langle T, \psi_J\rangle\, \psi_I(|J|/|I|)^\gamma\}_{I,J:\ \text{二進キューブ}}$ であり，$*$ は二進正方形の集合上の個数測度に関する非増大な並べ換えを意味する．

証明　A が l_1^γ 上で有界となる必要十分条件は A^γ が l_1上で有界であることに注意しよう．さらに，

$$\sigma_N(T)_{B_1^{\alpha,1}\to B_1^{\alpha,1}} = \sigma_N(A_T)_{l_1^\gamma\to l_1^\gamma} = \sigma_N(A^\gamma_T)_{\mathcal{L}}$$

である．ただし $\mathcal{L}$ は l_1上の有界作用素である．命題 11.13 によって，

$$\sigma_N(A^\gamma_T)_{\mathcal{L}} = E(N, a^\gamma; l_0, l_\infty) = (a^\gamma)^*(N)$$

であるので，したがって

$$\begin{aligned}\left(\sum_N \left(N^\beta \sigma_N(T)_{B_1^{\alpha,1}\to B_1^{\alpha,1}}\right)^S \frac{1}{N}\right)^{1/S} &= \left(\sum_N \left(N^\beta E(N, a^\gamma; l_0, l_\infty)\right)^S \frac{1}{N}\right)^{1/S} \\ &= \left(\sum_N \left(N^\beta (a^\gamma)^*(N)\right)^S \frac{1}{N}\right)^{1/S} = \|a^\gamma\|_{l_{1/\beta}}\end{aligned}$$

Hardy の不等式によりこの最後の式は

$$\left(\sum_I \|\{A^\gamma_{IJ}\}\|_{l_{1/(\beta+1)},1/\beta(J)}\right)^{1/\beta}$$

と等価である．離散 Lorentz 空間の定義を用いて目標の結論が得られる．∎

Besov 空間 $B^{\alpha,\infty}_\infty$ 上の作用素 T の圧縮に関して，この定理と対をなす定理がある．詳しくは [H] を見よ．

少なくとも形式的には次が成り立つことを注意しておく．

$$\langle T, \psi_J\rangle\,\psi_I = \int K(x,y)\psi_J(y)\,dy\,\psi_I(x)\,dx = \langle K, \psi_I\otimes\psi_J\rangle$$

ところで，$\psi_I\otimes\psi_J$ は矩形 $R=I\times J$ に関してウェーブレット ψ_R であり，$\langle K,\psi_I\otimes\psi_J\rangle=\langle K,\psi_R\rangle$ はこの矩形に対応する核 K のウェーブレット係数である．したがって，定理 11.14 は，T の核 K の矩形ウェーブレット係数に関するある大きさの条件に関してよく圧縮される作用素 T を特徴付けていることになる．

最後に，この節の結果は [BeyCoiRok] のやり方に沿って数値的に作用素の圧縮を研究するのにも使うことができることを注意しておく．これは [CH] で実行されている．

参考文献

[B]　S. Banach. 1932. *Theorie des operations lineaires.* Warsaw.

[BeL]　J. Bergh and J. Löfström. 1976. *Interpolation spaces: an introduction.* New York: Springer Verlag.

[BeyCoiRok]　G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. 1991. " Fast Wavelet Transforms and numerical algorithms I," *C ommun. Pure and Appl. Math.* **44**: 141–183.

[CH]　D. Chang and C.-c. Hsiao. 1992. "Compression of operators using rectangular wavelets, " Preprint.

[Co]　A. Cohen. 1991. "Biorthogonal wavelets," in *Wavelets: a tutorial in theory and applications*, C. K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 123-152.

[CoDFe]　A. Cohen, I. Daubechies, and J. C. Feauveau. 1992. "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **45**: 485–560.

[D]　I. Daubechies. 1988. "Orthonormal basis of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[DeJLu]　R. DeVore, B. Jawerth, and B. Lucier. 1992. "Image compression through wavelet transform coding," *IEEE Journal on Information Theory* **38**: 719–747.

[DeJPo]　R. DeVore, B. Jawerth, and V. Popov. 1992. "Compression of wavelet decompositions," *Amer. J. Math.* **114**: 737-785.

[FJ]　M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transform and decompositions of distribution spaces," *J. Funct. Analysis* **93**: 34–170.

[H]　C.-c. Hsiao. 1992.*Rectangular wavelets and compression of operators*, Thesis, Univ. of

South Carolina, Columbia.

[Hu] R. Hunt. 1964. "An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces," *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**: 803-807.

[M] S. Mallat. 1989. "Multiresolution approximation and wavelets," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–88.

[Me] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, Paris: Hermann.

[P] A. Pelczynski. 1958. "On the isomorphism of the spaces m and M," *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math., Astronom. Phys.* **6**: 695–696.

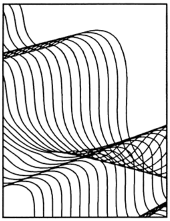
[R] N. Riviére. 1966. *Interpolation theory in s-Banach spaces*, Thesis, Chicago.

[RoT] R. Rochberg and M. Taibleson. 1988. "An averaging operator on a tree," in *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, J. Garcia-Cuerva, ed., Lect. Notes Math. **1384**, Berlin: Springer-Verlag, pp. 207–213.

[S] J.-O. Strömberg. 1981. "A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces," in *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund II*, W. Beckner et al., eds., Chicago: Univ. of Chicago Press, pp. 475–494.

第 3 部

ウェーブレットと偏微分演算子



第 12 章 微分方程式解法のためのウェーブレットに基づくアルゴリズム

G. Beylkin*

【概要】 ここでは，ウェーブレット展開に基づいて楕円型微分演算子に対する 2 点境界値問題のグリーン関数を求めるための N 次法について述べる．簡単のために，通常の $O(h^2)$ の有限差分スキームを考慮し，線形演算を実行するためのみウェーブレットを使うものとする．主な道具としては，ウェーブレット基底で表現された周期的微分演算子に対し利用可能な対角化前処理である．

12.1 はじめに

積分方程式を解くための直交ウェーブレット基底の役割は，[BcoR1] で言及されている．そこでは，広い範囲の演算子がウェーブレット基底において疎なものとなり，関数にこれらの演算子を適用して積分方程式を解くのに多くの速いアルゴリズムが使われることが述べられている．これらの演算子は Calderon-Zygmund の演算子と擬微分演算子を含んだウェーブレット基底の概念を使うことによって効果的に扱うことが可能であろう．ここでは後の考察へとすすむためにいくつか重要な点をまとめる．詳細については [BCoR1][BCoR2][Atetal] を参照されたい．積分方程式（Calderon-Zygmund または擬微分演算子）を考え，

$$T(f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy \tag{12.1}$$

とする．この演算子を 2 次元のウェーブレット基底によって行列表現すると，サブ-ブロック中の対角項からの距離の関数と考えた成分の減衰率はもとの核よりはやいということがわかる．この減衰率は基底関数の消失モーメントの数に依存する．例えば核がある $M \geq 1$ に対して次の条件を満たすものとする．

$$|K(x,y)| \leq \frac{1}{|x-y|}, \tag{12.2}$$

$$|\partial_x^M K(x,y)| + |\partial_y^M K(x,y)| \leq \frac{C_0}{|x-y|^{1+M}} \tag{12.3}$$

*この研究は ONR grantN00014-91-J4037 と Chevron Oil Field Research Company の援助を一部受けている．

このとき消失モーメント M をもったウェーブレット基底を選ぶことで，非標準系の核 K の表現行列の係数 $\alpha^j_{i,l}$，$\beta^j_{i,l}$，$\gamma^j_{i,l}$ について，次の評価

$$|\alpha^j_{i,l}| + |\beta^j_{i,l}| + |\gamma^j_{i,l}| \leq \frac{C_M}{1 + |i-l|^{M+1}} \tag{12.4}$$

を，すべての

$$|i-l| \geq 2M \tag{12.5}$$

に対して，満足させることができる．

さらに，(12.2) と (12.3) 式に，すべての 2 進区間 I で

$$\left| \int_{I \times I} K(x,y)\, dx\, dy \right| \leq C|I| \tag{12.6}$$

が成り立つという条件（いわゆる「弱い簡約条件」）を加えるならば，(12.4) はすべての i, l について，正しいものとなる．このとき，与えられた精度に対して (12.2) と (12.3) を満足する演算子の表現は疎なものとなるのである．そこで，計算のためには帯表現となる $\alpha^j_{i,l}$，$\beta^j_{i,l}$，$\gamma^j_{i,l}$ を使うのである．

(12.2) 式を満足するような核に対して，直接，帯域近似しても，それは満足のいく数値的な近似を与えないということに注意すべきである．[BCoR1] の方法は，対角項から離れるにしたがって減衰率を大きくするような行列の滑らかさを利用している．行列成分の低次の多項式によってよく近似される部分は，ウェーブレット展開での小さい係数によって表される．なぜなら，基底関数には消失モーメントがあるからである．疎な行列が得られると，積分方程式を解く際，様々な局面で高速アルゴリズムが適用可能となる．例えば，積分方程式を解くための $O(N)$ アルゴリズム，または $O(N)$ 演算子における一般逆行列を構成するための繰り返しアルゴリズムなどである．

この章においては「微分方程式を解くときにウェーブレット基底を使うと，その効果はどのようなものか？」という問いに答えよう．同じ様な問題は，微分方程式の境界値問題を解くときの問題として，また積分方程式を解くときの問題としてよく見受けられるものであろう．しかし数値解析の見地からいえば，これらの定式化には重要な違いが見られるのである．微分方程式の離散化においては，得られた行列の条件数は大きくなり，疎な線形代数系となる．一方，積分演算子の離散化においては条件数は小さくなり，稠密な行列が得られる．より正確にいえば，微分演算子から得られる行列の条件数は，通常ステップ幅の減少（ということは，つまり系の大きさが増大するということであるが）に対して，多項式的に増加する．2 次の有限差分演算子の行列の条件数は，$1/h^2$（または N^2）だけ増える．ここに h はステップ幅である．(N は分割する点の数である)．一方，第 2 種の積分方程式の離散化によって得られる行列の条件数はステップ幅の減少に応じて増大しないが，その行列は稠密である（普通これは実際にはな

んらかの改善が必要である）．

条件数が最大と最小の特異値の比として定義されるということを思い起こそう．行列がゼロ空間をもつ（実際にゼロ空間であるのかもしくは，与えられた精度に対してゼロ空間である）なら，条件数によって最小の特異値の比が精度の域を超えているということを知ることができる．条件数は，線形系を解く際の多くの反復計算の収束速度を制御することができる．例えば，共役勾配法の反復回数は $O(\sqrt{\kappa})$ である．ここで κ は行列の条件数である．

第2種の積分方程式の離散化によって得られる $N \times N$ の大きさの線形系を解くには単純に $O(N^2)$ の演算が必要であろう．微分演算子の表現から得られる疎な線形系を解くにはまた，$O(N^2)$ の演算が必要であろう．そして反復回数は $O(N)$ である．

[BCoR1] に示されているように，第2種の積分方程式の離散化によって得られる稠密な行列は，ウェーブレット座標系の疎な行列によって置き換えられる（演算子は例えば (12.2) と (12.3) を満たしている）ので，これらの積分方程式を解くのに $O(N)$ アルゴリズムが適用される．この章で示されるように，境界条件のある微分方程式の場合は，ウェーブレット座標系においては，条件数が $O(1)$ である疎な行列にのみ有効であるような代数的処理を施すことができる対角的前処理がある．それゆえ，対応する線形系を解くための $O(N)$ アルゴリズムもまた導入される．

ウェーブレット展開に基づいて楕円型微分演算子の2点境界値問題を解く方法について述べよう．ここで述べる方法と，例えば [Bri] にあるようなマルチグリッド法（例えば，[Bri] を見よ）や（階層的な）マルチレベル法や，[GR] にあるようなたいへん単純でしかもエレガントな方法のように，この種の2点境界値問題を数値的に解くための従来の方法との違いを示すため，$O(N)$ 演算における（逆演算子である）Green 関数を構築する．上で述べたような数値的な手法は $O(N)$ 演算における問題の解を与えることに注意しよう．しかしながら通常の Green 関数の行列表現は $O(N^2)$ の無視できない成分を必要とするので，この構築の際に速いアルゴリズムがすぐに利用できるわけではない．我々の方法も $O(N)$ 演算で問題を解くことを可能にするのであるが，ウェーブレット基底による Green 関数の表現に必要なのは（与えられた精度に対し） $O(N)$ 成分のみである．ここでは速いアルゴリズムについて述べることに集中しよう．

Green 関数が得られると，行列 - ベクトルの積を減らすような解法を見つけ出すことになる．ウェーブレット座標系では，それは $O(N)$ 手法である．加えて，もしベクトルの成分が滑らかで非周期的な関数の値であれば，ベクトルはウェーブレット座標系では疎なものとなる．この場合，Green 関数をベクトルに作用させる際の演算の回数は（ウェーブレット座標系での）このベクトルの（重要な）成分の比に比例する．ここでは，修正された Crank-Nicolson 法をウェーブレット座標系によって陽的かつ適合するスキームに変換することによって，これらの特性を明らかにしよう．

ここでの方法の主な道具になるものは，[B] にあるようなウェーブレット基底で周期的微分演

算子に対して有効な対角的前処理である．前処理という考えは，マルチレベルとマルチグリッド法での主要な考えであった．前処理に関する膨大な数の論文の中で，特に [BrPX] に注目したい．この論文の著者は，マルチレベルの前処理を構築するため，部分空間の（多重解像度解析に似た）正規直交鎖を考えている．明らかに，多重解像度解析とウェーブレット基底をよく知らなかったために，彼らは「実際には正規直交基底は，... あまり利用できない.」と述べている．実際には，正規直交ウェーブレット基底は前処理を行うための大変便利な道具を提供する．その上，ウェーブレット基底での逆演算子は疎なものになるので，$O(N)$ 演算における前処理を数値的に構築することが可能になるのである．

参考文献 [J] で，S.Jaffard はウェーブレット基底で楕円境界値問題を解くための理論的な解析を行い対角化について考察している．しかし，彼は実用的な方法を与えてはいない．ここでは，2点境界値問題にかぎって考えよう．なぜなら，今の時点ではウェーブレット基底の実用的な構築は任意の領域で可能であるわけではないからである．ここでは，2点境界値問題の Green 関数を数値的に構築できるように修正された選択方向法を使って，多重解像度の問題に近づこう．ここでの対角化法は [J] のものとは異なる．なぜなら，これを周期的微分演算子に適用し，ランク1の摂動によって境界値問題を解くからである．

簡単のために，2点境界値問題に対する通常の $O(h^2)$ 有限差分スキームを考え線形演算を実行するためのみに周期的ウェーブレットを使う．このような手順は他の手法との明確な比較が可能である．一方，これはまた，有限差分スキームの限界のいくつかを明らかにする．h^p 次（ここで p は任意である）の近似を達成するために区間のウェーブレット基底を使う [Cetal] より一貫した手順は，すでに一般的なものとなっており，いたるところで議論されている．

12.2　2点境界値問題

2点境界値問題を考えよう．

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \tag{12.7}$$

を，Dirichlet 境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ のもとで考える．a は十分に滑らかな関数であるものとし，$x \in (0,1)$ に対し，$a(x) > 0$ である．ここで述べる方法はもっと一般的な楕円型演算子，例えば

$$\mathcal{L}u = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) - b(x)u \tag{12.8}$$

にも適用可能である．ここに $b(x) > 0$ である．

この問題をスタガート格子上で離散化すると，次のような線形代数方程式を得る．

$$a_{i-1/2}u_{i-1} - (a_{i-1/2} + a_{i+1/2})u_i + a_{i+1/2}u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{12.9}$$

ここに，$u_i = u(x_i)$，$a_{i+1/2} = a(x_{i+1/2})$，$f_i = f(x_i)$，$x_i = ih$ で，$x_{i+1/2} = (i+1/2)h$ であり，明らかに $u_0 = u_{N+1} = 0$ とすることができる．

(12.9) は，次のようにも書ける．

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{12.10}$$

ここに $N \times N$ 行列 $\boldsymbol{L}$ は，次のようである．

$$L = \begin{pmatrix} -(a_{1/2}+a_{3/2}) & a_{3/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{3/2} & -(a_{3/2}+a_{5/2}) & a_{5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-3/2} & -(a_{N-3/2}+a_{N-1/2}) & a_{N-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1/2} & -(a_{N-1/2}+a_{N+1/2}) \end{pmatrix} \tag{12.11}$$

行列 $\boldsymbol{L}$ の条件数が大きくなる二つの理由がある．(12.7) と (12.11) で $a(x) = 1$ ならば 2 階微分 d^2/dx^2 の中心差分行列表現を得る． $\boldsymbol{L}$ の条件数が $O(N^2)$ であるのは明らかである．また，関数 $a(x)$ をかける演算子の条件数はいくらでも大きくなりうることがわかる．関数 $a(x)$ の大きさは $(0,1)$ の部分区間で，異なるにちがいないから，関数 $a(x)$ の積である演算子の条件数は，任意に大きくすることができるためである．

ここでの目的は， $O(-N \log \epsilon)$ の演算で数値的に $\boldsymbol{L}^{-1}$ を構築することにある．ここに ϵ は要求される精度である．この見たところ望みのない作業は（小さい Nに対しては普通の表現では $\boldsymbol{L}^{-1}$ は稠密になるということは容易に確認できる），実際には，ウェーブレット座標系においては簡単な解法となる．

問題 (12.7) に対する逆演算子の核は（楕円型演算子に対する Dirichlet 問題のグリーン関数）ウェーブレット座標系では，疎な表現となる．なぜならこのような核は (12.2) (12.3) のような評価を満足するからである．([BCoR1] を見よ) 行列$\boldsymbol{L}$より始めていかに数値的に $\boldsymbol{L}^{-1}$ が構築できるかを示すことにしよう．

12.3　周期的問題への適用

ウェーブレット基底を用いると周期的微分演算子に対する前処理行列は対角行列となる．このリスケールされた演算子の条件数は $O(1)$ であり，これは基底の選び方によるのである [B]．その上，いかなる周期的微分演算子の有限差分行列表現も対角的前処理によって変更される．このことを利用して (12.10) 式のような標準的な分割スキームを使って 2 点境界値問題を解くことができる．ここで，ウェーブレットは疎行列の条件数が（計算するということも含めて）制

御可能であるような座標系を提供するという補助的役割を果たすことになる．このような「混合した」方法を使うのには，二つの理由がある．第1は，ウェーブレット基底によって計算することの利点を明らかにするための簡単な方法であるためであり，第2に，普通に使われている有限差分スキームを改善をするための実用的な方法であるからである．

周期的微分演算子を使うために，周期行列の有限階数の摂動である行列 $\boldsymbol{L}$ を考えよう．

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A} - a_{1/2}e_1 e_N^T - a_{N+1/2}e_N e_1^T \tag{12.12}$$

ここで，

$$A = \begin{pmatrix} -(a_{1/2}+a_{3/2}) & a_{3/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1/2} \\ a_{3/2} & -(a_{3/2}+a_{5/2}) & a_{5/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-3/2} & -(a_{N-3/2}+a_{N-1/2}) & a_{N-1/2} \\ a_{N+1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1/2} & -(a_{N-1/2}+a_{N+1/2}) \end{pmatrix} \tag{12.13}$$

単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_N$ は次で与えられる．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.14}$$

この節では，関数 a の大きさが区間 $(0,1)$ で激しく変化しないような場合を考えよう．ウェーブレット座標系での対角化の効果を示そう．$a=1$ とし，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$とする．ここで，

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{12.15}$$

次の二つの例では，周期化2階微分の $N \times N$の行列 $\boldsymbol{D}$ の標準的な形である$\boldsymbol{D}_w$を計算する．ここで，$N = 2^n$であり，対角行列$\boldsymbol{P}$によって$\boldsymbol{D}_w$は次のようにリスケールされる．

$$\boldsymbol{D}_w^p = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_w\boldsymbol{P}$$

ここで $\boldsymbol{P}_{il} = \delta_{il}2^j$，$1 \le j \le n$，そしてこの j は i,l に依存して，$N - N/2^{j-1} + 1 \le i,l \le N - N/2^j$をみたし，$\boldsymbol{P}_{NN} = 2^n$である．行列 P を図 12.1 に示す．

表 12.1 と 12.2 は，もとの条件数である行列$\boldsymbol{D}$（即ち $\boldsymbol{D}_w$，これは直交変換によって得られるものなので）のκと，$\boldsymbol{D}_w^p$の κ_p を比較したものである．行列 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D}_w$ と $\boldsymbol{D}_w^p$ は（1次元の）ゼロ空間を持つので，条件数はこれら行列の値域で計算される．

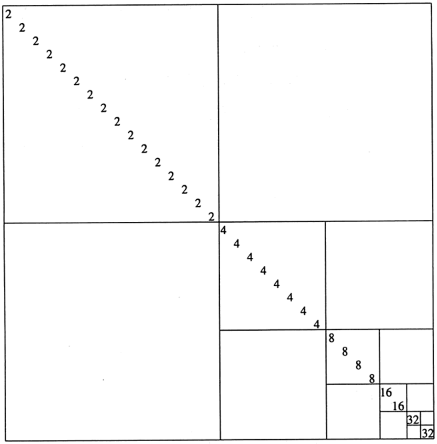


図 12.1　ウェーブレット座標系での周期的 2 階微分の行列 D_w をリスケールする対角行列 P の例 $(n=5)$

表 12.1　三つの消失モーメント (M=3) をもつ Daubechies のウェーブレットに関連した座標系での 2 階微分の行列（前処理があるときとないとき）の条件数

N	κ	κ_p
32	$0.10409 \cdot 10^3$	8.021
64	$0.41535 \cdot 10^3$	9.086
128	$0.16605 \cdot 10^4$	10.019
256	$0.66405 \cdot 10^4$	10.841
512	$0.26562 \cdot 10^5$	11.562
1024	$0.10625 \cdot 10^6$	12.197

表 12.2　六つの消失モーメント (M=6) をもつ Daubechies のウェーブレットに関連した座標系での 2 階微分の行列（前処理があるときとないとき）の条件数

N	κ	κ_p
32	$0.10409 \cdot 10^3$	5.2002
64	$0.41535 \cdot 10^3$	5.2610
128	$0.16605 \cdot 10^4$	5.2897
256	$0.66405 \cdot 10^4$	5.3035
512	$0.26562 \cdot 10^5$	5.3103
1024	$0.10625 \cdot 10^6$	5.3137

ここで，ウェーブレット座標系で 2 点境界値問題を解く方法について述べよう．$\boldsymbol{W}$を離散ウェーブレット変換の行列とする（実際の変換は，ピラミッドアルゴリズムによって適用されるのであるが．例えば，[BCoR1] を見よ）．$\boldsymbol{W}$が直交変換であることに注意すると，(12.10) 式と (12.12) 式はウェーブレット座標系で次のように書き直される．

$$(\boldsymbol{A}_w - a_{1/2}\hat{e}_1\hat{\boldsymbol{e}}_N^T - a_{N+1/2}\hat{\boldsymbol{e}}_N\hat{\boldsymbol{e}}_1^T)\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{f}} \tag{12.16}$$

ここで，

$$\boldsymbol{A}_w = \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^* \tag{12.17}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{u} \tag{12.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{f} \tag{12.19}$$

そして，$\hat{\boldsymbol{e}}_l = \boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_l$，$l = 1, N$である．

大きさが $N = 2^n$ のベクトルの離散（周期的）ウェーブレット変換は，n 個のスケールから成るが，もっとも疎なスケールにおいては差に対応する 1 個の係数と，平均に対応するもう 1 個の係数（全平均とよぶ）を得る．ベクトルの全平均は，ベクトルの成分を直接足したものに比例するということに注意しよう．行列 $\boldsymbol{A}$の列成分の和は，恒等的に 0 となるので行列 $\boldsymbol{A}_w$ は次の構造を持つ．

$$\boldsymbol{A}_w = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix} \tag{12.20}$$

ここで，$\boldsymbol{B}$ は $(N-1)\times(N-1)$ のフルランクの行列であり，その条件数は N^2に比例する．ベクトル$\boldsymbol{c}^T$を決定しよう．はじめに，$\boldsymbol{A}$ の行に変換を適用して $\boldsymbol{A}_w$ を計算すると，変換された行列の最後の行として次を得る．

$$\rho(a_{N+1/2} - a_{1/2})(\boldsymbol{e}_1^T - \boldsymbol{e}_N^T) \tag{12.21}$$

ここでρ は行列$\boldsymbol{A}$のサイズに依存する因子である．$\boldsymbol{A}_w$を得るためには，中間結果の行にさらにウェーブレット変換を適用しなければならない．このようにして，次を得る．

$$(\boldsymbol{c}^T, 0) = \rho(a_{N+1/2} - a_{1/2})(\hat{\boldsymbol{e}}_1^T - \hat{\boldsymbol{e}}_N^T) \tag{12.22}$$

ここで，次の表記法を導入しよう．

$$\hat{\boldsymbol{e}}_l = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_l \\ \rho \end{pmatrix}, \quad l = 1, N \tag{12.23}$$

ここで $\boldsymbol{r}_l$ はサイズ $N-1$ のベクトルであり，ρ は（両方のベクトルに共通な）スカラー因子，

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ s \end{pmatrix} \tag{12.24}$$

そして，

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^d \\ f^s \end{pmatrix} \tag{12.25}$$

ここで，$2a = a_{1/2} + a_{N+1/2}$，$\alpha = a_{1/2}/(2a)$，$\beta = a_{N+1/2}/(2a)$ とおく．$\alpha + \beta = 1$ である．(12.16) を次のように書き換えよう．

$$\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix} - 2a \begin{pmatrix} \alpha \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_N^T + \beta \boldsymbol{r}_N \boldsymbol{r}_1^T & \rho(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) \\ \rho(\alpha \boldsymbol{r}_N^T + \beta \boldsymbol{r}_1^T) & \rho^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^d \\ f^s \end{pmatrix} \tag{12.26}$$

ここで，

$$\boldsymbol{c}^T = 2a\rho(\beta - \alpha)(\boldsymbol{r}_1^T - \boldsymbol{r}_N^T) \tag{12.27}$$

s を次の式を用いて消去することによって，

$$s = -\frac{(\alpha \boldsymbol{r}_1^T + \beta \boldsymbol{r}_N^T)\boldsymbol{d}}{\rho} - \frac{f^s}{2a\rho^2} \tag{12.28}$$

$\boldsymbol{d}$に対する $(N-1) \times (N-1)$ の線形代数方程式系を得る．

$$\left[\boldsymbol{B} + 2a(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1^T - \boldsymbol{r}_N^T)\right]\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}^d - \frac{f^s}{\rho}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) \tag{12.29}$$

(12.7) の 2 点境界値問題を解法は $\boldsymbol{B}^{-1}$ 行列が疎なものであり $O(N)$ 演算によって解けることに基づいている．次の節で行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を構築するが，ここでは $\boldsymbol{B}^{-1}$ が使えるものとしよう．$\boldsymbol{B}^{-1}$ が分かれば，逆行列のランク 1 の更新に対する Sherman-Morrison の公式を使うことによって (12.29) 式を解くことができ，次式が得られる．

$$\boldsymbol{d} = \left[\boldsymbol{B}^{-1} - \sigma \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^T \boldsymbol{B}^{-1}\right]\left[\boldsymbol{f}^d - \frac{f^s}{\rho}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N)\right] \tag{12.30}$$

ここで，

$$\sigma = \frac{2a}{1 + 2a(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^T \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)} \tag{12.31}$$

注意 12.1　$\boldsymbol{P}$ によってスケールし直された後の疎行列 $\boldsymbol{B}$ の条件数は表 12.1 と 12.2 に示されているように，$O(1)$ である．そこで，線形系である (12.29) 式は，(12.30) 式を使って，標準的な反復法（例えば共役勾配法）によって，$O(N)$ の演算で解くことができる．なぜなら，(12.30) 式では，線形系$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$の解を見つければよいからである．

次の形式の逆演算子を求めると，

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q}^T & \gamma \end{pmatrix} \tag{12.32}$$

次のようになる．

$$\boldsymbol{\Gamma} = \left[\boldsymbol{B}^{-1} - \sigma \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^T \boldsymbol{B}^{-1}\right] \tag{12.33}$$

$$\boldsymbol{p} = -\frac{1}{\rho}\left[\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) - \sigma\kappa_1 \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)\right] \tag{12.34}$$

$$\boldsymbol{q}^T = -\frac{1}{\rho}\left[(\alpha \boldsymbol{r}_1^T + \beta \boldsymbol{r}_N^T)\boldsymbol{B}^{-1} - \sigma\kappa_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^T \boldsymbol{B}^{-1}\right] \tag{12.35}$$

$$\gamma \quad = \tfrac{1}{\rho^2}\left(\kappa_3 - \sigma\kappa_2\kappa_1 - \tfrac{1}{2a}\right) \tag{12.36}$$

ここで，

$$\kappa_1 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^T \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) \tag{12.37}$$

$$\kappa_2 = (\alpha \boldsymbol{r}_1^T + \beta \boldsymbol{r}_N^T)\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N) \tag{12.38}$$

そして，

$$\kappa_3 = (\alpha \boldsymbol{r}_1^T + \beta \boldsymbol{r}_N^T)\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) \tag{12.39}$$

(12.33)-(12.39) の全ての行列-ベクトル積は，疎行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ と疎ベクトル$\boldsymbol{r}_1$ と$\boldsymbol{r}_N$から成る．従って，$\boldsymbol{L}^{-1}$ の構成は行列$\boldsymbol{B}^{-1}$の計算に帰着される．

12.4 周期的演算子の逆行列の計算

$(N-1) \times (N-1)$ 行列 $\boldsymbol{B}$ を対角行列 $\boldsymbol{P}$によって変換することから始めよう．ここで，$\boldsymbol{P}_{il} = \delta_{il}2^j$， $1 \leq j \leq n$であり，j は i, l に応じて選ばれ，$N - N/2^{j-1} + 1 \leq i, l \leq N - N/2^j$ である（図 12.1 を見よ）．

$$\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{PBP} \tag{12.40}$$

であり，行列 $\boldsymbol{B}_p$ の条件数は $O(1)$ である（表 12.1 と 12.2 を見よ）．図 12.2 に示されるように行列 $\boldsymbol{B}$ と$\boldsymbol{B}_p$ は疎行列である．また，行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}_p$ はフルランクである．

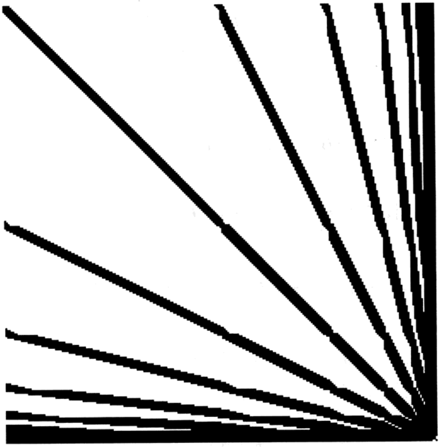


図 **12.2**　3 つの消失モーメントをもつ Daubechies のウェーブレットの基底に関連した座標系でのサイズ 255×255 の行列 B(**A=D** の場合)．絶対値が 10^{-14} 以上の成分が黒く示されている．

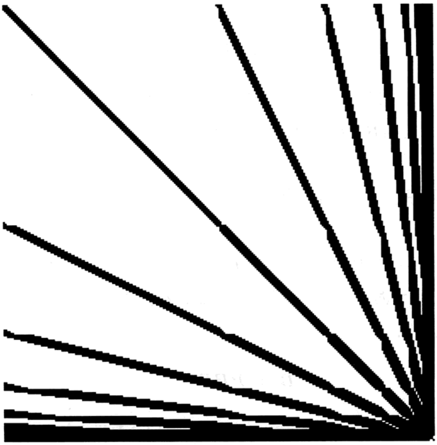


図 **12.3**　対角変換を使って，この節での反復アルゴリズムによって計算された行列 B^{-1}．絶対値が 10^{-9} 以上の成分が黒く示されており，$\|BB^{-1}-I\|$ は，$\|B^{-1}B-I\| \approx 10^{-9}$であることが確認される．

逆行列 $\boldsymbol{B}_p^{-1}$ は，反復法 [S] によって求める．

$$\boldsymbol{X}_{l+1} = 2\boldsymbol{X}_l - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{X}_l \tag{12.41}$$

初期値はつぎのように設定する．

$$\boldsymbol{X}_0 = \alpha\boldsymbol{B}_p^* \tag{12.42}$$

ここで， α は $0 < \alpha < 2/\sigma_1$ のように選ばれ，σ_1 は$\boldsymbol{B}_p$の最大の特異値である．

フルランクの行列に対して，(12.41) の反復は$\boldsymbol{B}_p^{-1}$に収束する．反復の回数は，行列 $\boldsymbol{B}_p$の条件数の対数に比例し，$O(1)$ となる．フルランクの行列に対して，(12.41) の反復は，自己修正的 (self-correcting) であり，この特性を次に述べるように利用する．

(12.41) の反復は， $\boldsymbol{B}_p$， $\boldsymbol{B}_p^{-1}$ およびすべての計算過程での行列 $\boldsymbol{X}_l$ がウェーブレット基底によって疎行列となるとき，(12.41) の反復は，逆行列を計算するための $O(N)$ アルゴリズムを与える．(与えられた精度 ϵに対して) ウェーブレット基底による $\boldsymbol{B}^{-1}$ は疎行列であるということを知っているので，必要なのは，計算過程での行列$\boldsymbol{X}_l$が，疎行列であることを維持することだけである．

反復は自己修正的なので，各反復の後で，絶対値が与えられた閾値（例えば 10^{-2}）よりも小さいようなすべての成分を取り除くことによって，まず低い精度の逆行列を計算する．一度，反復が収束したら，反復を続けることと，精度の閾値を下げることによって，逆行列の精度を良くする．結果として得られた行列 $\boldsymbol{B}_p^{-1}$ の疎度は，図 12.3 に示されている．

最終的に，次式で $\boldsymbol{B}^{-1}$を得る．

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_p^{-1}\boldsymbol{P} \tag{12.43}$$

行列 $\boldsymbol{P}$ は対角行列であり，また積の演算だけなので，(12.40) 式と (12.43) 式を経由しての計算では，精度の損失はないことに注意しよう．この特別な場合では，積は 2 のベキのみの含むので，いかなる丸め誤差も生じない．

12.5 様々な拡張

12.5.1 a の変化を補正するための前処理

2.3 節では，関数 a が区間 $(0,1)$ で大きく変化しないことを仮定した．この場合，(12.9) 式の有限差分スキームは 2 点境界値問題を解くのに適当であるので，(12.9) 式の系の行列に両側か

ら対角行列

$$\boldsymbol{P}_a = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_N}}\right) \tag{12.44}$$

をかけることによって，(12.9) 式をリスケールする．

(12.9) 式のかわりに次を得る．

$$\frac{a_{i-1/2}}{\sqrt{a_{i-1}a_i}}v_{i-1} - \frac{a_{i-1/2}+a_{i+1/2}}{a_i}v_i + \frac{a_{i+1/2}}{\sqrt{a_i a_{i+1}}}v_{i+1} = h^2\frac{f_i}{\sqrt{a_i}}, \quad i=1,\ldots,N \tag{12.45}$$

ここで，

$$v_i = u_i\sqrt{a_i} \quad i=1,\ldots,N \tag{12.46}$$

これは，(12.7) での演算子 $\mathcal{L}$ のかわりに，演算子

$$\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{12.47}$$

を考えることに対応する．

関数 a が十分に滑らかであるなら，次を得る．

$$\frac{a(x-\frac{1}{2}h)}{\sqrt{a(x-h)a(x)}} = 1+O(h^2) \tag{12.48}$$

$$\frac{a(x-\frac{1}{2}h)+a(x+\frac{1}{2}h)}{a(x)} = 2+O(h^2) \tag{12.49}$$

また，

$$\frac{a(x+\frac{1}{2}h)}{\sqrt{a(x)a(x+h)}} = 1+O(h^2) \tag{12.50}$$

ゆえに，(12.45) 式に対応する行列 $\boldsymbol{L}$ は次のように書ける．

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + h^2\boldsymbol{R} \tag{12.51}$$

ここで，

$$\boldsymbol{L}_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{12.52}$$

$h^2\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_0$ によって得られる行列 $h^2\boldsymbol{R}$ の成分を計算するときには，十分有意な桁数を確保するよう注意しなければならない．

演算子 $\boldsymbol{L}_0^{-1}$を用いると，

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{L}_0^{-1}(\boldsymbol{I} + h^2\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{R})^{-1} \tag{12.53}$$

となるので，$(\boldsymbol{I} + h^2\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}$の計算が必要である．再び，12.4 節の反復法を使うが，このとき，演算子 $\boldsymbol{T} = -h^2\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{R}$ の最大の特異値が 1 より小さいなら，

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1} = \prod_{j=0}^{\infty}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}^{2^j}) \tag{12.54}$$

となる．12.4 節の反復法は特に簡単になる．

12.5.2 注の追加

注意 12.2 一般逆行列 $\boldsymbol{D}^{-1}$（行列 $\boldsymbol{D}$ の範囲では，図 12.3 に示される行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ である ）が，ここでの方法では特別な役割をになう．だから，前もってこの行列を計算しておいてもよい．(12.13) 式の行列 $\boldsymbol{A}$ を行列 $\boldsymbol{D}$の摂動と考えることによって，12.4 節の反復法を逆行列を計算するために（(12.5) 式と同じように）使うことができる．事実，行列 $\boldsymbol{D}^{-1}$ は，標準的ではない形式でストアされ，使われるが [BCoR1]，それは計算の効率を上げるのに役立つ．

注意 12.3 ここでの方法は，ウェーブレット座標系での $O(h^2)$ の有限差分スキームを使っている．解及び，逆演算子の精度を上げるために Richardson の補外法を用いることができる．

12.6 ウェーブレットに基づく適合 Crank–Nicolson スキーム

楕円型の 2 点境界値問題の Green 関数が疎行列 として数値的に扱える，ということの持つ意味について考えてみよう．例として，

$$u_t = \mathcal{L}u \tag{12.55}$$

を解くための陰的 Crank-Nicolson スキームについて考えよう．Dirichlet 境界条件は $u(t,0) = u(t,1) = 0$ であり，初期条件は $u(0,x) = u_0(x)$ である．(12.55) 式を常微分方程式系で近似すると，

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{1}{h_x^2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{12.56}$$

となる．ここで行列 $\boldsymbol{L}$ は (12.11) 式で与えられ， h_x は x-座標でのステップ幅である．(12.56) 式に（時間に関して）台形則を適用して，次のような Crank-Nicolson 法を得る．

$$\boldsymbol{u}^{(n+1)} - \boldsymbol{u}^{(n)} = \frac{h_t}{2h_x^2}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}^{(n+1)} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}^{(n)}) \tag{12.57}$$

ここで， h_t は時間のステップ幅である．ゆえに，

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{h_t}{2h_x^2}\boldsymbol{L}\right)\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{h_t}{2h_x^2}\boldsymbol{L}\right)\boldsymbol{u}^{(n)} \tag{12.58}$$

となり，(12.55) 式を解くためのよく知られた陰的スキームを得る．

標準的な Crank-Nicolson 法においては，逆行列は決して計算されない．なぜなら，それは稠密な行列になるからである．その代わりに，各時刻において 3 重対角の線形系を解く．

行列 $(\boldsymbol{I} - (h_t/2h_x^2)\boldsymbol{L})^{-1}$ が，ウェーブレット座標系で疎行列となり，前の節で述べられたことと似た方法で，陽的に解かれるということに注意しよう．このように，(12.58) 式をウェーブレット基底に変換し，$(\boldsymbol{I} - (h_t/2h_x^2)\boldsymbol{L})^{-1}$を計算することによって陽的スキームを得る．そこで，

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(n+1)} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)} \tag{12.59}$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{h_t}{2h_x^2}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^*\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{h_t}{2h_x^2}\boldsymbol{W}\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^*\right) \tag{12.60}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{u} \tag{12.61}$$

$\boldsymbol{W}$ は，離散ウェーブレット変換の行列である．行列 $\boldsymbol{C}$ は，図 12.2 と図 12.3 の行列と似た構造を持つ疎行列である．

このような方法を高次スキームに適用することには，かなりの利点があるであろう．また，もしベクトル$\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}$ がウェーブレット座標系で疎であるなら，陰的スキームから陽的スキームへの変換の利点は明らかであろう．この場合，時間ステップごとの演算回数は，ベクトル$\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}$の有意な成分の数に比例する．

ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}$ は，ウェーブレット座標系において n （時間ステップ）の増加につれて，さらに疎になっていく．なぜなら，演算子 $\mathcal{L}$ の大きい固有値に対応する振動モードは，小さい固有値に対応する振動モードよりもはやく減衰するからである．このように，(12.59) 式による計算の速さは，解のなめらかさに適合するが，これは標準的スキームでは望めない性質である．

例として，演算子 $\mathcal{L}$ の最小の固有値を計算することを考えよう．演算子 $\mathcal{L}$ の最小の固有値を求める一つの方法は，(12.58) 式を使い，各時間ステップ後の解を規格化することである．最小の固有値に対応するモードのみが，いくつかの時間ステップの後の解の一部として残ることになるだろう．最小の固有値に対応する固有ベクトルは滑らかで，振動的ではないことがわかる．初期条件を一定のベクトルになるように選んでみよう．このようなベクトルはウェーブレット

座標系で疎なものとなり（事実，これはたった一つの数によって表せる），また (12.55) 式の解が滑らかで振動的ではないことがわかっているので，一つ時間ステップはただ $O(1)$ 演算で済むと結論できる．

多次元の場合のこの方法を一般化すること，そして交互方向の Crank-Nicolson スキームを使うことによって，多次元の楕円型演算子の最小固有値を計算するための速い方法を得ることも可能であろう．

参考文献

[Aetal] B. Alpert, G. Beylkin, R.R. Coifman, and V. Rokhlin. 1993. "Wavelet-like bases for the fast solution of second-kind integral equations," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **14**(1): 159–184.

[B] G. Beylkin. 1992. "On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets," *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**(6): 1716–1740.

[BCoR1] G. Beylkin, R.R. Coifman, and V. Rokhlin. 1991. "Fast wavelet transforms and numerical algorithms, I," *Commun. Pure and Appl. Math.*, **44**: 141–183.

[BCoR2] G. Beylkin, R.R. Coifman, and V. Rokhlin. 1992. "Wavelets in numerical analysis," in *Wavelets and Their Applications*, M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, eds., Boston: Jones and Bartlett, pp. 181–210.

[BCoR3] G. Beylkin, R.R. Coifman, and V. Rokhlin. 1993. "Fast wavelet transforms and numerical algorithms, II," in progress.

[BrPX] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu. 1990. "Parallel multilevel preconditioners," *Math. Comput.*, **55**(191): 1–22.

[Bri] W. L. Briggs. 1987. *A Multigrid Tutorial*, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math.

[Cetal] A. Cohen, I. Daubechies, B. Jawerth, and P. Vial. 1992. "Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval," *C. R. Acad. Sci.*, sér. 1, to appear.

[GR] L. Greengard and V. Rokhlin. 1989. "On the numerical solution of two-point boundary value problems," Yale Univ. Technical Report, YALEU/DCS/RR-692.

[J] S. Jaffard. 1992. "Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**(4): 965–986.

[S] G. Schulz. 1933. "Iterative berechnung der reziproken matrix," *Z. Angew. Math. Mech.*, **13**: 57–59.

第 13 章　ウェーブレットと非線形解析

Stéphane Jaffard

【概要】この章では，いくつかの例によって，ウェーブレットの正規直交基底が，偏微分方程式または特異点の幾何に関連した非線形問題の研究において，どのように使われるかを示そう．

13.1　はじめに

この章の目的は，正規直交ウェーブレット基底が，非線形問題の研究においてどのように使われるかを示す．この目論見がうまくいくかどうかは，実解析におけるいくつかの基本的な結果を知っているものにとっては，はっきりしている．事実，30 年代において，Littlewood と Paley は古典的な Fourier 解析が非線形量を扱うときには，効果的ではないということを示した．彼等の名前がついた分解はこの障害を避けるために構築されたものである．彼等の基本的な考えは，周波数領域で関数の一様性を崩さずに（例えば Fourier 級数がするように），周波数が 2^j から 2^{j+1} の間の成分を集めることである．これには，いくつかの利点がある．これは，非線形項の厳密な解析を可能にし，非線形偏微分方程式の研究において重要なことが分かっている（本質的に Bony とその後継者たちの成果に従う．例えば，[Bo] または [Me1] をみよ）．そして，高い周波数でのあまりよくない解像度は,（不確定性原理によって）Littlewood-Paley 分解が空間領域で局所化されることを可能にした．このことは，また古典的な Fourier 解析では不可能であるような場合の厳密な局所解析を産み出す．この最後の点は二つの利点がある．偏微分方程式に対しては，局所的なふるまいは，しばしば重大なものになる（例えば，特異性の伝播）．その一方で，特異点の幾何，それらのフラクタル次元などについての正確な結果を得るのを容易にする．この章の目的は，これら様々なトピックスについての，いくつかの洞察と正確な結果を与えることにある．

はじめにウェーブレットの正規直交基底のいくつかの基本的な特性を思い起こさなければならないが，詳細な記述のある [Ma],[Me2] そして [D2] を挙げておこう．非線形解析の研究に必要なもの，すなわちウェーブレット基底による微分作用素の解析といくつかの関数空間の特徴付け（これは，[Me2] により詳細に記述されている）についてより正確に述べよう．そして，こ

れらを次の問題に適用しよう．関数の特異点の Hausdorff 次元の決定，相殺コンパクト性，そして集中型の問題である．これらのことが密接に関連していることがわかるであろう．集中型の問題の証明は，特異点の次元を決めるのに使う証明とほとんど同じである．この理由は，関数のウェーブレット分解はこれらの特徴の鍵となる自然な分割を提供するからである．すなわち，数少ない大きな係数を集めて，よく局所化された滑らかではない関数にすれば，残りの部分は滑らかになる．

13.2　正規直交ウェーブレット基底

$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交ウェーブレット基底は $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ の形であり，ここで j と k は $\mathbb{Z}$ に属し，ψ は滑らかで，よく局所化された関数である．この最後の条件はより正確に決める必要がある．例えば，$\alpha \le N$ と正の γ に対して，次のように仮定することができる．

$$|\psi^{(\alpha)}(x)| \le C\exp(-\gamma|x|)$$

このとき，この基底による関数 f の分解は高い周波数で（つまり大きい jに対して）局所的なものである．なぜなら，

$$f(x) = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}(x), \quad \text{ここに } c_{j,k} = \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$$

そして関数 $\psi_{j,k}$ は本質的に大きさ 2^{-j} の台を持つので，大きな j でのウェーブレット係数は，$k2^{-j}$ まわりの局所情報を表している．この分解の最も重要な特徴はこれが相殺性を持つ関数上で行われるということである．現に，$l < N$に対して，

$$\int x^l \psi(x)dx = 0$$

であり，これはウェーブレット基底の正規直交性より示される簡単な結果である（[Me1] をみよ）．この特徴は，大きさ 2^j と -2^j のオーダーの周波数の近くで $\hat{\psi}_{j,k}$ がよく局所化されていることを意味している．

ウェーブレットが消失モーメントをもつということは，大きい jに対するウェーブレット係数の減少を評価することによって，関数 f の滑らかさを評価できる．正確な結果を与えよう．しかし，はじめに，C^α 級の滑らかさの定義を思い起こそう．

$0 < \alpha < 1$ とする．

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$$

であるならば，関数 f は一様 C^α級 である．このとき，

$$|c_{j,k}| \leq C2^{-(1/2+\alpha)j} \tag{13.1}$$

であることが fは一様 C^α級であることの必要十分条件である．こうであることを証明しよう．はじめに，f が一様 C^α級であると仮定しよう．そのとき，

$$\begin{aligned} |c_{j,k}| &= \left|\int f(x)\psi_{j,k}(x)dx\right| = \left|\int (f(x) - f(k2^{-j}))\psi_{j,k}(x)dx\right| \\ &\leq C\int |x-k2^{-j}|^\alpha \frac{2^{j/2}}{(1+|x-k2^{-j}|)^2}dx \leq C2^{-(\frac{1}{2}+\alpha)j} \end{aligned}$$

逆に，$|c_{j,k}| \leq C2^{-(1/2+\alpha)j}$ を仮定する．

$$\Delta_j(f) = \sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}$$

としよう．ウェーブレットとその微係数の局在性を使って，$|\Delta_j(f)| \leq C2^{-\alpha j}$ と $|\Delta_j'(f)| \leq C2^j2^{-\alpha j}$ を得る．J を $2^{-J} \leq |x-y| < 2\cdot 2^{-J}$ なるものとする．そのとき，

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{j\leq J} |\Delta_j(f)(x) - \Delta_j(f)(y)| + \sum_{j>J} |\Delta_j(f)(x)| + |\Delta_j(f)(y)|$$

である．平均値の定理を使って，第一の和は，次で押さえられる．

$$C\sum_{j\leq J} |x-y|2^j2^{-\alpha j} \leq C|x-y|^\alpha$$

第 2 の和は次で押さえられる．

$$C\sum_{j>J} 2^{-\alpha j} \leq C|x-y|^\alpha$$

ここに大域的な滑らかさについての結果を得る．事実，ウェーブレットの局在性を使って，13.3.1 節において，f の 1 点における滑らかさに関して同じような結果を証明するであろう ([J1], [J4] を参照)．この証明においては，ウェーブレットの相殺性とそれらの局在性だけを使い，ウェーブレットの正確な形を使わないことに注意しよう．普通はそれは必要ではない．

ここでの記号を述べるために，ウェーブレットの構成に関するいくつかの基本的な事実を思い起こそう．多重解像度解析 は，次のような L^2 の閉部分空間の増大列 $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ である．

(a) $\cap V_j = \{0\}$

(b) $\cup V_j$ は L^2 において稠密である．

(c) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

(d) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x+1) \in V_0$

(e) V_0 に 関数 g が存在し，$(g(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ が V_0 の基底をなす．

ここで，また関数 g が滑らかで，良く局所化されているということが必要とされる．関数 g とその m 階までの導関数がはやく減少するならば，多重解像度解析は m-正則であるということにする．以下では，しばしば「十分滑らかである」と仮定したウェーブレットに課される滑らかさを明確には表現しないことにする．しかしながら，実際に必要とされる滑らかさは証明のなかでは明確にされる．空間 V_j の列は次のように解釈されるであろう．すなわち $P_j(f)$ が V_j 上の f の射影であるならば， $P_j(f)$ 上でサイズが 2^{-j} より大きい f の細部を「見る」．

多重解像度解析の簡単な例は，スプライン関数を使って得られる．([L] または [Me2] をみよ.) V_0 を各区間 $[k,k+1]$ 上で m 次の区分的な多項式であり， C^{m-1} 級である関数で構成される L^2 の部分空間であるとしよう． g に対しては次のような B-スプライン σ が考えられる．

$$\hat{\sigma}(\xi)=\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{m+1}$$

多重解像度解析が与えられると， V_0 の正規直交基底を得るのは簡単である．例えば，

$$\hat{\varphi}(\xi)=\hat{g}(\xi)\left(\sum|\hat{g}(\xi+2k\pi)|^2\right)^{-1/2}$$

であるとしよう．このとき， V_0 の正規直交基底 は$\varphi(x-k)$ であり，伸張によって，

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$$

は， V_j の正規直交基底となる．

W_j を V_{j+1} での V_j の直交補空間であるとする． W_j は互いに直交し，それらの直和は， L^2 に等しい．このとき， $\psi(x-k)$ 型の W_0 の正規直交基底を得ることができる． W_j は伸張によって互いから得られるので，関数 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ は，$L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となる．

現在使われているウェーブレットにはいくつかの種類がある．ここで述べたスプラインウェーブレットは数値解析で使われている．コンパクト台のウェーブレット（信号解析に使われている，[D1] を見よ)，そしてまた次の C^∞ ウェーブレット（[LMe] を見よ)，これは，非常によく局在化されているわけではないが（それは「単に」速く減衰するだけである)，理論計算では非常に有用である． $\hat{\varphi}$ を C^∞ 級であるとし，関数は次のように $[-4\pi/3,4\pi/3]$ に台をもつものとする．

$$\begin{cases}0\le\hat{\varphi}\le 1\\ \hat{\varphi}(\xi)=1,\ \ |\xi|\le 2\pi/3 \quad \text{の場合}\\ \hat{\varphi}(\xi)^2+\hat{\varphi}(2\pi-\xi)^2=1,\ \ 0\le\xi\le 2\pi \quad \text{の場合}\end{cases}$$

関数 φ は，Schwartz クラスに属する．対応するウェーブレット ψ もまた，Schwartz クラスに属する．その Fourier 変換は C^∞ 級であり $[-8\pi/3,-2\pi/3]\cup[2\pi/3,8\pi/3]$ なる集合に台をもつ．[Me1] で，Yves Meyer はこれを次の理由により,「Littlewood-Paley」のウェーブレット と呼んでいる． $f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j(f)$ の分解は，Littlewood-Paley 分解 に似ており，それは 2 進区

間 $[-2^{j+1},-2^j]\cup[2^j,2^{j+1}]$ 上に Fourier 変換の台が本質的に位置する関数の和として f を分割することによって得られる．ウェーブレット分解の特性の多くは，Fourier 領域におけるこの2進局在性ということになろう．

ここで，多次元においていかにウェーブレットが得られるかを示そう．$\mathcal{V}_j$ を $\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$ で定義された $L^2(\mathbb{R}^2)$ 部分空間であるとしよう．明らかに，このようにして2次元での多重解像度解析が定義される（ここで，$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ での変換で $\mathcal{V}_0$ は不変である）．$\mathcal{V}_j$ の正規直交基底は次の関数によって与えられる．

$$\Phi_{j,(k_1,k_2)}(x,y) = \varphi_{j,k_1}(x)\varphi_{j,k_2}(y)$$

ここで，$\mathcal{W}_j$ を $\mathcal{V}_j$ の $\mathcal{V}_{j+1}$における直交補空間であるとする．$\mathcal{W}_j$ の基底は，関数 $\psi_{j,k}^{(i)} = 2^j\psi^{(i)}(2^jx-k)$ で与えられ，ここに，

$$\begin{cases} \psi^{(1)}(x,y) = \psi(x)\varphi(y) \\ \psi^{(2)}(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \\ \psi^{(3)}(x,y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases}$$

である．2次元においてこれを見ると，一つではなく三つのウェーブレットがある．これによって，n 次元の場合には 2^n-1 個のウェーブレットを得ることが分かる．

$L^2(\mathbb{R}^2)$ の他の可能な基底は，関数 $\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y)$ によって与えられるということに注意しよう．この基底はここでつくったものとは同じではなく，x 方向と y 方向で関係無く局在している．これらの方向は，大変特別な役割をしているので，関数の分解に対してはいくらか不自然なもののように見える．しかし，この欠点はこの解析関数が二つの方向に対して相殺性を持つという事実（すなわち，x 方向 と y 方向での積分が消失するということ．$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ の場合にはこうはいかない.）によって補償されている．それゆえ，滑らかな関数の係数は数少ない消失しない係数を使うことによって符号化されるであろう．この点については，[MPerR] と [JLa] で議論されている．

これから使う表記方法を定義することによってこの節を終わることにしよう．λ は2進キューブ $k2^{-j}+2^{-j}[0,1]^n$ であるとしよう．ウェーブレット $\psi_{j,k}^{(i)}$ は λ キューブ上に本質的に局在しているものである．しばしば，ウェーブレットとウェーブレット係数のことを，$\psi_{j,k}^{(i)}$ と $c_{j,k}^{(i)}$ の代わりにそれぞれ ψ_λ と c_λ 書くであろう．

13.3　特異性の Hausdorff 次元の決定

ウェーブレットの最も魅力的な性質の一つは解析される関数の完全な局所情報を与えるということである．この特性の応用を研究することにしよう．

s を真に正の実数であるとしよう．x_0における Hölder 性の普通の定義を思い起こそう．次の

ような s の整数部分に等しい次数の多項式 $P(x)$ が存在するとき，関数 f は $C^s_{x_0}$ に属するという．

$$f(x) = P(x - x_0) + O(|x - x_0|^s) \tag{13.2}$$

（しばしば，f は x_0において C^s 級であるという.）

関数の 1 点における滑らかさ（これは，与えられた点において，与えられた次数の Taylor 展開が存在するということである）を，考えている点の近傍で局在しているウェーブレットの係数の絶対値によって，述べることができるということを示そう．

関数が，$C^s_{x_0}$級 でそれ以上に滑らかでない点の集合を E_s と呼ぼう．f の大域的なエネルギー評価がわかっているとき，集合 E_s（物理学者の言葉で，f の特異性スペクトル ）の Hausdorff 次元 $\theta(s)$ がどのようにして与えられるかを示そう．最終的にはどのような関数 $\theta(s)$ が特異性スペクトルになるかを示すであろう．

13.3.1　1 点における滑らかさの解析

この節では [J2] に従い，1 点における滑らかさの通常の定義とウエーブレット係数の対応する条件を比較しよう．目的は後者の条件が 1 点における Hölder の滑らかさの条件に対して「良い代わり」を与えるということを示すことにある．これはウェーブレット係数から容易に確かめることができ， Hölder の条件と非常に精密に比較しうる．そしてこれはもっと機能的な特性を持っている．ここでは，これらの特性の応用も与えるつもりである．

定理 13.1　もし，f が $C^s_{x_0}$ に属するなら，

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-(\frac{n}{2}+s)j}(1 + |2^j x_0 - k|^s) \tag{13.3}$$

逆に，もし (13.3) が成り立ち，f が正数 β に対して一様に C^β 級であるなら，次のように s より小さい次数の（ x_0 に依存する）多項式 P が存在し，$|x - x_0| \leq 1$ なら，

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^s \log \frac{2}{|x - x_0|} \tag{13.4}$$

であり，この結果は最適なものある．

この定理では，滑らかでないところから滑らかな点を探していることになり，それは C^∞ かまたは解析的なところから滑らかでない点を見つけるという通常の方法（異なる特異台を探すということ）よりも難解なものなのである．この定理は Tauber 型定理として解釈される．関数 f（その Littlewood–Paley の分解である）の平均的ふるまいと，最小の大域的滑らかさの Tauber 型条件とから，1 点での結果を導くことができる．

証明　f が $C^s_{x_0}$ に属すると仮定しよう．このとき，

$$\begin{aligned}
|c_{j,k}| &= \left|\int f(x)\psi_{j,k}(x)dx\right| \\
&= \left|\int (f(x)-P(x-x_0))\psi_{j,k}(x)dx\right| \\
&\quad \text{(なぜなら Wavelets は消失モーメントをもつので)} \\
&\le C\int |x-x_0|^s|\psi_{j,k}(x)|dx \qquad \text{((13.2) を使って)} \\
&\le C\int |x-x_0|^s \frac{2^{nj/2}}{(1+2^j|x-k2^{-j}|)^N}dx \\
&\quad \text{(なぜなら } \psi(x) \text{ はすばやく減衰するので)} \\
&\le C2^{nj/2}\int \frac{|x-k2^{-j}|^s+|k2^{-j}-x_0|^s}{(1+2^j|x-k2^{-j}|)^N}dx \\
&\quad \text{(なぜなら } \forall s>0 \text{ に対して，} |x+y|^s \le C(s)(|x|^s+|y|^s) \text{ なので)} \\
&\le C2^{-(\frac{n}{2}+s)j}(1+|2^jx_0-k|^s)
\end{aligned}$$

∎

逆を証明しよう． j_0 と j_1 を， $2^{-j_0-1}\le|x-x_0|<2^{-j_0}$ と $j_1=s/\beta j_0$ によって定義する．(13.3) から，いかなる l に対しても，

$$|\Delta_j^{(l)}(f)(x)|\le C2^{(l-s)j}(1+2^j|x-x_0|)^s$$

であることがわかる． g を関数とし， $T(g)(x_0)$ を x_0 における次数 $[s]$ の関数 g の Taylor 展開であるとしよう．このとき，

$$\begin{aligned}
&|f(x)-T(f)(x_0)| \\
&\quad\le \sum_{j\le j_0}|\Delta_j(f)(x)-T(\Delta_j(f))(x_0)|+\sum_{j\ge j_0}|\Delta_j(f)(x)|+\sum_{j\ge j_0}|T(\Delta_j(f))(x_0)|
\end{aligned}$$

である． $l=[s]+1$ とする．最初の項は有界であり，

$$C|x-x_0|^l\sum_{j\le j_0}\sup_{[x,x_0]}|\Delta_j^{(l)}(f)(x_0)|\le C|x-x_0|^l\sum_{j\le j_0}2^{(l-s)j}\le C|x-x_0|^s$$

となる．2 番目の項は，

$$\sum_{j_0\le j<j_1}|\Delta_j(f)(x)|\le\sum_{j_0\le j<j_1}|x-x_0|^s\le C(j_1-j_0)|x-x_0|^s$$

そして

$$\sum_{j\ge j_1}|\Delta_j(f)(x)|\le\sum_{j\ge j_1}2^{-\beta j}\le C|x-x_0|^s$$

(関数 f は一様 C^β級であるので). 3番目の項は有界で,

$$\sum_{j\geq j_0}\sum_{|m|}|x-x_0|^m 2^{(m-s)j}\leq C|x-x_0|^s$$

そして, $j_1-j_0\leq C\log(2/|x-x_0|)$ であるので, これで逆が証明された. この定理の最適性を示す例は Yves Mayer によって発見され, [J2] の中で述べられており, これにはこの定理の証明も含まれている.

x_0 が与えられているとする. x_0 で成り立つ次の展開が得られる条件を得た.

$$f(x)=P(x-x_0)+O(|x-x_0|^s)$$

これは一般化された Taylor 展開であると解釈されるだろう. もし関数 f が x_0 で C^n 級であったなら, Taylor の公式によって $s=n$ に対してこの展開が成り立つということ, そして,

$$P(x-x_0)=\sum_{|\alpha|\leq n}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

であるということが証明される. $s>1$ の時にはのこの条件は関数 f が x_0 において微分可能であることを意味しており, (13.2) 式を次のように書き直すことによってそれがわかる.

$$\frac{|f(x)-P(x-x_0)|}{|x-x_0|}\leq C|x-x_0|^{s-1}$$

ここで P は1次の多項式である. しかし, 次数 s がいくら大きいときでも, x_0 における関数 f の微分可能性以上のことを意味しているわけではない. 関数 f が x_0 の近傍において微分可能ではない時, 関数 fが確かに x_0 で2回微分できないような場合がありうる.

$C^s_{x_0}$ 条件に対する「良い代わり」はすでに1961年に A.P.Calderón と A.Zygmund [CZy] によって次のように導入された. もし十分小さい ρ に対して,

$$\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f(x)-P(x-x_0)|^p dx\right)^{1/p}\leq C\rho^u \tag{13.5}$$

が成立するような, 次数が u より小さい多項式 P が存在するなら, 関数 f は $T^p_u(x_0)$ に属するという.

$p=\infty$ の場合が通常の Hölder 性に対応する. もし関数 f が $C^u(x_0)$ に属するば, いかなる p に対しても f は $T^p_u(x_0)$ に属する. この1点における滑らかさの弱い形式は, 非整数次積分と特異積分変換のもとで不変である. しかしながら, これは (13.3) 式の条件ほど 空間 $C^u_{x_0}$ と密接に関係しているわけではない. そして, 定理 13.1 のような結果がこの条件に対して成り立つわけではない.

条件 (13.3) 式は，2-超局所空間の特別な場合である．次は，Bony[Bo] と [J2] によるもので，

$$|c_{j,k}| \le C2^{-(\frac{n}{2}+s)j}(1+|2^j x_0 - k|)^{-s'}$$

であるなら，$f \in C^{s,s'}_{x_0}$ である．$s' > -s$ ならば，$f \in C^{s,s'}_{x_0}$ は $f \in C^s_{x_0}$ であることを意味する（この証明は定理 13.1 の証明と非常に似ている．[J2] を見よ）．さらに，Λ が，x_0 において滑らかな係数を持ち，楕円型である階数 m の偏微分作用素であるならば，

$$\Lambda f \in C^{s,s'}_{x_0} \Leftrightarrow f \in C^{s+m,s'}_{x_0}$$

である．これら最後の 2 つの結果を使って，楕円型作用素 の各点における滑らかさについての次の結果を得る．

系 13.2　Λ を x_0 において滑らかで，楕円型である階数 m の偏微分作用素とする．$\Lambda f = g$ であり，g は $C^s_{x_0}$ に属する関数であるとするなら，関数 f は $C^{s+m}_{x_0}$ に属する．

13.3.2　$W^{s,p}$ における関数の特異性

f を Sobolev 空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ に属する関数であるとしよう．$s > n/p$ であるなら，Sobolev の埋め込みは，f が指数 $s - n/p$ の一様 Hölder であるということを示してくれる．この結果は最適である．なぜなら，$t > s - n/p$ ならば C^t には属さないような $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ の関数が存在するからである．この滑らかさの欠如は，Housdorff 次元 がはっきりと押さえられるような点の集合に対してのみ起こりうるということがわかるであろう．([J3] を見よ)

Hausdorff 次元の定義をはじめに思い起こそう．A を $\mathbb{R}^n$ において有界な集合であるとする．

$$H^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum \mathrm{diam}(U_i)^s\right\}$$

であるとしよう．ここでは，直径がたかだか δ である集合 $\{U_i\}$ による A の可能なすべての被覆によって下限がとられる．すると $H^s(A) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(A)$，そして A の Hausdorff 次元は

$$d(A) = \inf\{s|H^s(A) = 0\} = \sup\{s|H^s(A) = \infty\}$$

である．これは球または 2 進キューブによる被覆に制限しても十分である．

定理 13.3　$s > 0$ かつ $1 \le p < \infty$ としよう．

i. もし $s - n/p > 0$ かつ $0 < \alpha < s$ であるなら，$W^{s,p}$ に属する関数が C^α 級ではない点の集合の Hausdorff 次元は $n - (s-\alpha)p$ で押さえられる．

ii. 逆に，もし A が Hausdorff 次元 $n - (s-\alpha)p$ の集合であるならば，$W^{s,p}$ の関数 f が存在して，いかなる $\alpha' > \alpha$ に対しても f が $C^{\alpha'}$ 級 でない点の集合が A を含む．

iii. もし $s-n/p<0$ ならば, 任意の $\forall\epsilon>0$ に対して，どの点においても C^ϵ 級でない $W^{s,p}$ の関数が存在する．

iv. もし $s-n/p\leq 0$ かつ $\beta>0$ であるなら， $W^{s,p}\cap C^\beta$ に属する関数が C^α 級ではない点の集合の Hausdorff 次元は $(\alpha/\beta)(n-(s-\beta)p)$ で押さえられる．

v. 逆に，もし A が Hausdorff 次元 $(\alpha/\beta)(n-(s-\beta)p)$ の集合であるならば，$W^{s,p}\cap C^\beta$ の関数 f が存在して，いかなる $\alpha'>\alpha$ に対しても f が $C^{\alpha'}$ 級ではない点の集合が A を含む．

$f\in W^{s,p}$ （s は整数）であるなら， f は Hausdorff 測度がたかだか $n-(s-\alpha)p$ の集合を除くところで C^α 級となるということが [Zi] で証明されている．さらに，Hausdorff 次元がたかだか $n-(s-\alpha)p$ の集合を除くすべての x_0 に対して f は $T^p_\alpha(x_0)$ に属する．それでもなお，これらの結果から f の Hölder 性に関する情報を引き出すことはできない．(これは直接に確認できるし，またこの定理の 3 番目のケースがこれらの結果を満足するような関数の例を与えるが，Hölder 性を持たないことに着目することによってより簡単に確認できる.)

証明　はじめに 3 番目を検証しよう． φ を，正であり C^∞ 級で， 0 の近傍で $\varphi(x)=1$ でありコンパクト台を持つものとする．このとき $f(x)=(\varphi(x)/|x|^\alpha)$ は， $\alpha<(n/p)-s$ であるなら $W^{s,p}$ に属する． (x_k) が $\mathbb{R}^n$ で稠密な数列であるとするならば， $\sum_k(1/k^2)f(x-x_k)$ は期待される反例である．なぜならこの級数は $W^{s,p}$ で収束し局所的に有界ではないからである．

定理の 1 番目と 4 番目の証明の仕方を考えてみよう． f のウェーブレット正規直交基底 $\psi_{j,k}$ による分解を考えよう． $f\in W^{s,p}$ あるなら，すべての jについて f は「少数の大きな」ウェーブレット係数 $c_{j,k}$ を持つということを示す．それらの「影響領域」の Housdorff 次元を推定し，この領域の外側においては f が滑らかであることを示す．Yves Meyer はこの手法が，[K] にあるブラウン運動におけるゆっくり動く点の証明に似ているということを指摘した．ブラウン運動は（ウェーブレット基底の一種である）Schauder 基底によって分解される．このときこれらの係数は独立なガウス分布になる．いくつかの「大きな係数」を分離し， x_0 がそれらからかなり離れているのであれば，ブラウン運動は x_0 において正確に $C^{1/2}$級 となるであろう．

ここでは，コンパクト台を持つウェーブレット基底を使う．初めに $p>1$ を仮定しよう．少しだけより一般的な結果，すなわち， f が $W^{s,p}$ に属するということを仮定する代わりに， f は Besov 空間 $B^{s,\infty}_p$ に属するということのみを仮定するならば，定理の 2 番目と 4 番目がすでに満たされるということを示そう．次の特徴付けを思い起こそう.(13.4.1 節で $p=2$ のときが証明される．すべての p に対する証明は，[Me2] を見よ.)

$$f\in W^{s,p}\Leftrightarrow\sum|c_\lambda|^2 2^{2js}2^{nj}\chi_\lambda(x)\in L^{p/2}$$

ここに $c_\lambda = \langle f \mid \psi_\lambda \rangle$ で，χ_λ はキューブ λ の特性関数である．そして，

$$f \in B_p^{s,\infty} \Leftrightarrow \forall j \text{に対し} \quad \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|^p 2^{(sp-(np/2)-n)j} \leq C \tag{13.6}$$

である．$N > 0$ を固定する．区間 $[\beta, \alpha]$ を等しい長さの区間 $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ によって N 個に分割しよう．このとき，$\alpha_i = \beta + i((\beta - \alpha)/N)$ である．f は一様に C^β 級であるので，f に定数をかけると,((13.1) 式を使って）$|c_\lambda| \leq 2^{-((n/2)+\beta)j}$ を得る．

$$S_j^i = \bigcup \{\lambda \in \Lambda_j \mid 2^{-((n/2)+\alpha_{i+1})j} \leq |c_\lambda| \leq 2^{-((n/2)+\alpha_i)j}\}$$

そして $f^i = \sum_j \sum_{\lambda \in S_j^i} c_\lambda \psi_\lambda$ とする．$f = \sum_{i=0}^{N-1} f^i + g$とすると，$g$ のウェーブレット係数が $|\langle g \mid \psi_\lambda \rangle| \leq 2^{-((n/2)+\alpha)j}$ であることを確かめることができる．よって g は一様に C^α 級である．

$$D_j^i = \bigcup \{\lambda \in \Lambda_j \mid \mathrm{dist}(\lambda, S_j^i) \leq 2^{-\epsilon_i j}\}$$

としよう．ここで $\epsilon_i < 1$ は後で決める．適当な ϵ_i を選べば，$\limsup D_j^i$ の外側で（これは，無限個の $\limsup D_j^i$ に属する点の集合の外側ということである.）で f^i が C^α 級であることを示そう．集合 D_j^i は S_j^i に局在化した「大きい」係数の周りの「安全領域」である．1 番目と 4 番目の定理を証明するために次の二つの補題が必要である．

補題 13.4　$x_0 \notin \limsup D_j^i$ であるなら，x_0 で f^i は C^{α_i/ϵ_i} である．

補題 13.5　$\limsup D_j^i$ の Hausdorff 次元は，$(n - (s - \alpha_{i+1})p/\epsilon_i)$　で押さえられる．

補題 13.4 の証明　$x_0 \notin \limsup D_j^i$ とする．ある J が存在して，任意の $j \geq J$ に対して，$x_0 \notin D_j^i$ である．関数 $\sum_{j \leq J} \sum_{\lambda \in S_j^i} c_\lambda \psi_\lambda$ は一様に C^s 級である．調べなくてはならないのは，$g^i = \sum_{j \geq J} \sum_{\lambda \in S_j^i} c_\lambda \psi_\lambda$ の x_0 における滑らかさだけである．

$$Dl(g^i)(x_0) = \sum_{|k|<\alpha} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \partial^k g^i(x_0)$$

を x_0 での g^i の Taylor 級数であるとしよう．このとき，

$$|g^i(x) - Dl(g^i)(x_0)| \leq \sum_{j \geq J} \sum_{\lambda \in S_j^i} |c_\lambda| |\psi_\lambda(x) - Dl(\psi_\lambda)(x_0)|$$

である．$x_0 \notin D_j^i$, $|\lambda - x_0| \geq C2^{-\epsilon_i j}$ そして $\epsilon_i < 1$ なので x_0 は ψ_λ の台の外側である．それゆえ $Dl(\psi_\lambda)(x_0) = 0$ である．同様に $|x - x_0| \leq C2^{-\epsilon_i j}$ であるなら $\psi_\lambda(x) = 0$ である．そこで，J' が

$$C2^{-\epsilon_i J'} \leq |x - x_0| < C2^{-\epsilon_i (J'-1)}$$

を満たすとしよう．このとき $J' > J$ ，そして $g^i = \sum_{j\geq J'} \sum_{\lambda\in S_j^i} c_\lambda \psi_\lambda$ なので

$$\begin{aligned}|g^i(x) - Dl(g^i)(x_0)| &\leq \sum_{j\geq J'} \sum_{\lambda\in S_j^i} |c_\lambda||\psi_\lambda(x)| \\ &\leq \sum_{j\geq J'} 2^{-((n/2)+\alpha_i)j} 2^{(n/2)j} \leq C2^{-\alpha_i J'} \leq C|x-x_0|^{\alpha_i/\epsilon_i}\end{aligned}$$

である． ∎

補題 13.5 の証明　$\lambda \in S_j^i$ であるなら， $|c_\lambda|^p \geq 2^{-((np/2)+\alpha_{i+1}p)j}$ である．そこで (13.6) より， S_j は単位キューブの中にせいぜい $2^{(n+\alpha_{i+1}p-sp)j}$ の項しか持っていないので， D_j^i は $2^{(n+\alpha_{i+1}p-sp)j}$個の 大きさ $2^{-\epsilon_i j}$ のキューブ $Q_k^{i,j}$ によって被覆される．それゆえ，

$$\sum (\operatorname{diam} Q_k^{i,j})^\delta \leq 2^{((\alpha_{i+1}-s)p+n)j} 2^{-\delta\epsilon_i j}$$

そして$\delta\epsilon_i > (\alpha_{i+1}-s)p+n$ よりただちに， $J\to\infty$ のとき， $\sum_{j\geq J}\sum_k \operatorname{diam}(Q_k^{i,j})^\delta \to 0$ である． ∎

ここで定理の証明に戻ろう． $f\in C^\beta \cap W^{s,p}$ とする． $\epsilon_i = \alpha_i/\alpha$ とせよ． $x_0 \notin \bigcup_{i=0}^{N-1} \limsup D_j^i$ であるならば， f は x_0 において C^α 級であり，そして， $\bigcup_{i=0}^{N-1} \limsup D_j^i$ の Hausdorff 次元が $\limsup D_j^i$ の次元の上限，したがって

$$d_N = \sup_{i=0,\dots,N-1} \alpha\left(\frac{n-(s-\alpha_{i+1})p}{\alpha_i}\right) \leq \sup_{x\in[\beta,\alpha]} \alpha\left(\frac{n-(s-x)p}{x}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

で押さえられることを示した． N はいくらでも大きくとれるので， $s\leq n/p$ であるならば f が C^α 級ではない点の Hausdorff 次元は，$\alpha((n-sp/\beta)+p)$ で押さえられ， $s\geq n/p$ であるならば $n-sp+p\alpha$ で押さえられる．従って 4 番目がいえる． $s-n/p>0$ であるなら，Solvev の埋め込みは， $W^{s,p} = W^{s,p}\cap C^{s-n/p}$ であることを意味し， $\alpha = s-n/p$ をとることによって 1 番目の定理が示される．

この定理は $p=1$ であってもまだ成り立つ． $f\in W^{s,1}$ならば， Sobolev の埋め込みを使って， $1/p' > 1-(s-s')/n$ であるならば $f\in W^{s',p'}$ となる．従って $p'>1$ そして s' と p' をそれぞれ s と 1 にいくらでも近くなるよう選ぶことができるということを利用する．そして極限をとるのである．

定理の 2 番目を証明する前に，はじめに 「悪魔の階段」（トライアッドな Cantor 集合上の自然な測度についての原始関数）が，許容される最大の次元が達成される例を表しているということを述べておく．この関数は $W^{1,1}\cap C^{\log 2/\log 3}$ に属する．この定理は， $\log 2/\log 3$ より大きな Hölder 指数を持たない点の集合が，せいぜい $\log 2/\log 3$ の Hausdorff 次元をもつということを示唆している．これはトライアッドな Cantor 集合の正確な次元で，(トライアッドな

Cantor 集合は）これらの特異点の台である．

A を Hausdorff 次元 $n-p(s-\alpha)=\delta$ の集合であるとしよう．いかなる $\delta'>\delta$ に対しても，$\mathrm{diam}(A_j^i)\le 2^{-i}$ ，そして $\sum_j \mathrm{diam}(A_j^i)^{\delta'}\le 1$ であるような 2 進キューブによる A の被覆の列 $R_i=\{A_j^i\}$ が存在する．$2^{-l_j^i}$ をキューブ A_j^i の大きさで，$f_i=\sum_j 2^{-((n/2)+\alpha)l_j^i}\psi_{A_j^i}$ であるとしよう．キューブ A_j^i は共通元を持たないので，

$$\begin{aligned}\|f_i\|_{W^{s,p}} &\le \int\left(\sum 2^{nl}4^{ls}|c_\lambda|^2\chi_\lambda(x)\right)^{p/2}\\ &= \sum 2^{npl/2}2^{pls}2^{-((n/2)+\alpha)lp}2^{-nl}\\ &= \sum_j 2^{-(n+p(\alpha-s))l_j^i}\end{aligned}$$

である．$\sum|A_j^i|^{\delta'}\le 1$ であるので$\sum 2^{-l_j^i\delta'}\le 1$ ，従って $n+p(\alpha-s)>\delta'$ のとき $\|f_i\|_{W^{s,p}}\le 1$ である．関数 $\sum(1/i^2)f_i(x)$ は $W^{s,p}\cap C^\alpha$ に属し，そして A を含む集合 $\limsup_i\bigcup_j A_j^i$ において，δ' より大きな次数の Hölder ではないということがただちに確認できる．これが定理の 2 番目の証明である．

定理の 5 番目の証明しなければならない．A を Hausdorff 次元 $(\alpha/\beta)(n-(s-\beta)p)=\delta$ の集合であるとしよう．いかなる $\delta'>\delta$ に対しても，上と同じように 被覆 R_iを選ぶ．キューブ A_j^i はすでに与えられているので，A_j^i に含まれる大きさ $2^{-m_j^i}$ の キューブ B_j^i を選ぶ．ここに m_j^i は $l_j^i\alpha/\beta$ より小さな最大の整数である．このとき $f_i=\sum_j 2^{-((n/2)+\beta)m_j^i}\psi_{B_j^i}$ とする．キューブ A_j^i は共通の元を持たないので，B_j^i もそうである．上と同じように，

$$\|f_i\|_{W^{s,p}}\equiv\sum_j 2^{-(n+p(\beta-s))m_j^i}$$

であること，そして $\sum_j 2^{-(n+p(\beta-s))(\alpha/\beta)l_j^i}\le C$ のときに $\|f_i\|_{W^{s,p}}\le C$ であることを確かめよう．

$f=\sum(1/i^2)f_i$ であるとしよう．明らかに $f\in W^{s,p}\cap C^\beta$ である．f が，$\limsup_i\bigcup_j D_j^i$ に属するような x_0 においては C^α 級より滑らかではないということを確かめなければならない．x_0 において f が C^α級であるなら，$|c_{j,k}|\le C2^{-((n/2)+\alpha)j}(1+2^{\alpha j}|x_0-k2^{-j}|^\alpha)$ である．しかしこの上界はキューブ A_j^i 上で正確に等しい． ∎

[Zi] で，s が整数のときに示されている次の結果を証明することで終えよう．

命題 13.6 $s\le n/p$ で $f\in W^{s,p}$ であるなら，f は，せいぜい $n-sp$ の Hausdorff 次元の集合を除いたところで有界である．

証明 $A_j=\{\lambda\mid |c_\lambda|\ge(1/j^2)2^{-nj/2}\}$ ，$B_j=\{\lambda/\,\mathrm{dist}(\lambda,A_j)\le L2^{-j}\}$ としよう．$\sum|c_\lambda|^p\le 2^{-(sp+(np/2)-n)j}$ なので，A_j にはせいぜい $j^{2p}2^{(n-sp)j}$ 個の要素しかなく，B_j にはせいぜい

$(2L)^n j^{2p} 2^{(n-sp)j}$ 個の要素しかない．上と同じように $\limsup B_j$ の Hausdorff 次元は $n-sp$ で押さえられる．

$x_0 \notin \limsup B_j$ であるなら， λ が A_j に属さないような係数 c_λ のみが,（コンパクト台のウェーブレットと L が十分大きいということを使うことによって） x_0 において寄与する．したがって， $|f(x_0)| = |\sum_{j \geq J_0} \sum_k (1/j^2) 2^{-nj/2} \psi_\lambda + \sum_{j \leq J_0} c_\lambda \psi_\lambda|$ であるような J_0 が存在する．第 2 の級数は滑らかな関数であり，第 1 のものは明らかに有界である． ▮

ここであらためて注意しておくと， $f \in B_p^{s,\infty}$ という仮定だけが必要とされる．

点の位置を考慮しない関数 f のウェーブレット係数に基づく基準によっては， f が C^α級でないような点の Hausdorf 次元を決めることができない．この点を確認するために，定理の 2 番目と 5 番目の反例を考えることができる．与えられた j に対して同じウェーブレット係数をとる．しかし，それらはできるだけ原点の近くに置こう．したがって，原点の外側では任意に滑らかな関数をつくることができ，それは，各 j に対して，反例と同じウェーブレット係数を持っている．値と周波数だけがこれらの次元の決定に重要であるということばかりではなく，大きい係数の位置も重要であるということがわかるであろう．

13.3.3 与えられた特異性スペクトルを持つマルチフラクタル関数の構成

$s > 0$ を非整数であるとする． $s > 0$ に対して，

$$f \in \bigcap_{\epsilon > 0} C^{s-\epsilon}(x_0) \quad \text{しかし } f \notin \bigcup_{\epsilon > 0} C^{s+\epsilon}(x_0) \tag{13.7}$$

であるならば， $f \in \Gamma^s(x_0)$ であると言うことにする．各 $s > 0$ に対して， $E^{(s)}$ を f が $\Gamma^s(x_0)$ に属するような実数 x_0 の集合であるとする．そして， $\theta_f(s)$ を $E^{(s)}$ の Haussdorff 次元であるとする．ここで，関数 $\theta_f :]0, +\infty[\to [0,1]$ について調べよう． θ_f が点ごとに定義されているものであるということに注意することが重要である．

マルチフラクタル測度については広く研究されており（例えば，[BrMipe] と [J4] を見よ），近年マルチフラクタル関数 の研究は，物理学のいくつかの領域において重要であるということがわかってきた．例としては，ランダムウォークのプロット，反応限界成長過程における境界面の発達，または慣性域における乱流速度の信号などがある（[ABMu2] を見よ）．測定されたスペクトル θ は，常に半楕円の形状を持っている．そして特異性スペクトルのグラフが本質的にどんな形状を持ち得るのかどうかというのは，もっともな疑問である．

$\mathcal{C}$ を次のような関数のクラスとして定義する．すなわち， $c1_{[a,b]}(x)$ （ここで $a = b$ とすることができる）という形の可算個の関数の上限として書くことができる関数である．そして，Riemann 可積分関数は $\mathcal{C}$ に属する．しかし，例えば，有理点でのみ 1 をとる関数も $\mathcal{C}$ に属す

る．(無理点でのみ1をとる関数は $\mathcal{C}$ に属さない．)

定理 13.7　$\theta:]0,+\infty[\to[0,1]$ を $\mathcal{C}$ の関数であるとすると，$\theta=\theta_f$ であるような連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する．

はじめに θ が

$$\theta(x)=cx1_{[a,b]}(x)\quad ここに\ 0<a\le b<\infty \quad そして \quad cb\le 1$$

であるときの関数 f をつくる．実際には α,β,γ 三つのパラメータを使用する．ここで，$a=\gamma$, $b=\beta\gamma$ ，そして $c=1/(\alpha\beta\gamma)$ である．さらに $\gamma>0$ ，$\beta\ge1$，そして $\alpha\ge1$ である．よって，$f=f^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ を定義する．一般的な場合は，$f^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ の簡単な「重ね合せ」を使って得られる．θ が $[0,n]$ の値をとるのであるならば，関数をつくることは容易であり，$\mathbb{R}^n$ で定義された関数 f を与える．パラメータ α ，β，γ は固定するので，f によって $f^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ を表すこととする．

Λ をすべての2進区間 $\lambda=[k2^{-j},(k+1)2^{-j}], j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$ の集合であるとする．$\Lambda(\alpha,\beta)\subset\Lambda$ の部分集合をつくり，「空隙」級数

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda(\alpha,\beta)}2^{-(\gamma+1/2)j}\psi_\lambda(x) \tag{13.8}$$

を考える．$\Lambda(\alpha,\beta)$ は次のようにつくられる．$\Lambda(\alpha,\beta)=\bigcup_{m\ge1}\Lambda_m^{(\alpha,\beta)}$ とする．ここに，$\Lambda_m^{(\alpha,\beta)}$ は λ の集合，または $j=[\alpha\beta m]$ かつ

$$2^{-j}k=\epsilon_1 l_1+\cdots+\epsilon_m l_m\in F_m$$

ここで，$\epsilon_1=\pm1,\ldots,\epsilon_m=\pm1\ l_j=2^{-[\alpha j]}$, であるような (j,k) の組の集合である．$[x]$ は x の整数部分であり，

$$k=2^{[\alpha\beta m]}(\pm l_1\pm\cdots\pm l_m)$$

は明らかに整数である．

命題 13.8　(13.8) によって定義される関数は Hölder 空間 $C^\gamma(\mathbb{R})$ に属するので，$s<\gamma$ であるならば，$E^{(s)}$ は空である．$\gamma\le s\le\beta\gamma$ であるならば，$f\in\Gamma^s(x)$ である x の Hausdorff 次元は $(s/\alpha\beta\gamma)$ である．$s>\beta\gamma$ であるならば，$E^{(s)}$ は空である．

(13.1) より，f が $C^\gamma(\mathbb{R})$ に属することがわかる．定理 13.1 を使って，任意の$\epsilon>0$ に対して

$$\limsup_{\lambda\in\Lambda(\alpha,\beta)}2^{-\gamma j}(2^{-j}+\mathrm{dist}(x,\lambda))^{-s-\epsilon}=+\infty \tag{13.9}$$

そして$\epsilon > 0$に対して

$$\limsup_{\lambda \in \Lambda(\alpha,\beta)} 2^{-\gamma j}(2^{-j} + \mathrm{dist}(x,\lambda))^{-s+\epsilon} < \infty \tag{13.10}$$

であることが， x が $E^{(s)}$ に属することの必要十分条件であることがわかる．

(13.8) によって定義される f に関しては，条件 (13.9) は $2^{-j} + \mathrm{dist}(x,\lambda) = \eta(\lambda)2^{-(\gamma/s+\epsilon)j}$, $\liminf \eta(\lambda) = 0.$ となる． $s \geq \gamma$ であると仮定すると， $2^{-j} = o(2^{-(\gamma/s+\epsilon)j})$ である．条件 $\mathrm{dist}(x,\lambda) = \eta(\lambda)2^{-(\gamma/s+\epsilon)j}$ はそのままである． $\lambda \in \Lambda_m^{(\lambda,\beta)}$， $j = [\alpha\beta m]$ ならば，

$$\mathrm{dist}(x, F_m) = \eta_m 2^{-(\alpha/\beta\gamma s)m}, \quad (F_m = \{\pm l_1 \pm l_2 \pm \cdots \pm l_m\}) \tag{13.11}$$

となり，このとき，いかなる$\epsilon > 0$に対しても

$$\liminf \eta_m 2^{-m\epsilon} = 0 \tag{13.12}$$

である．そして，(13.10) は，$\epsilon > 0$ に対して

$$\liminf \eta_m 2^{m\epsilon} = +\infty \tag{13.13}$$

となる．

ここで，コンパクト集合 K_α と集合 $E_{\alpha,\delta}$ を定義しよう． K_α を 和$\sum_1^\infty \epsilon_j l_j$ からなるコンパクト集合であるとする．ここに， $\epsilon_j = \pm 1$ である．他の同値な定義は

$$K = \bigcap_1^\infty (F_m + [-\lambda_m, \lambda_m])$$

であり，ここに， $\lambda_m = l_{m+1} + l_{m+2} + \cdots$ である．集合 $G_m = F_m + [-\lambda_m, \lambda_m]$ は，減少する区間列である．

$\beta \geq 1$ であるならば， $G_m^{(\beta)} \subset G_m$ を $G_m^{(\beta)} = F_m + [-\lambda_m^\beta, \lambda_m^\beta]$ で定義されるものとする．そして， $E_{\alpha,\beta}$ を 無限個の $G_m^{(\beta)}$ に属する点全体の集合とする．明らかに， $E_{\alpha,\beta} \subset K_\alpha$ である． $\beta = 1$ であるなら， $E_{\alpha,\beta} = K_\alpha$ である．

補題 13.9 $\gamma \leq s < \beta\gamma$ であるなら，(13.9) は $x \in \bigcap_{\delta<(\beta\gamma/s)} E_{\alpha,\delta}$ と同値である．一方で，$s \geq \beta\gamma$ であるなら，(13.9) は $x \in K_\alpha$ と同値である．

(13.9) と (13.11) が同値であるということは明白である．(13.11) が成り立ち， $\delta < (\beta\gamma/s)$ であるなら， $x \in E_{\alpha,\delta}$ ということを確認しよう．そのために， $\delta < (\beta\gamma/s) - \epsilon$ であるように $\epsilon > 0$ を選ぶ．このとき， 無限個の m に対して，

$$\mathrm{dist}(x, F_m) = \eta_m 2^{-(\alpha\beta\gamma/s)m} \leq 2^{-((\alpha\beta\gamma/s)-\epsilon)m} \leq l_m^\delta$$

である．よって $x \in E_{\alpha,\delta}$ である．逆に $x \in E_{\alpha,\delta}$ であるならば，$\mathrm{dist}(x, F_m) \le l_m^\delta$ を得るので，$\mathrm{dist}(x, F_m) \le 2^{-\alpha\delta m}$ である．$\delta > (\beta\gamma/s) - \epsilon$ であるならば，(13.11) を得る．$s \ge \beta\gamma$ のとき，$\eta_m > 0$ が $\liminf \eta_m = 0$ であるような任意の列であり，

$$x \in \bigcap_{m \ge 1} F_m + [-\eta_m, \eta_m]$$

であるならば，$x \in K_\alpha$ であることがわかるであろう．これは，K_α がコンパクト集合であるからで，$x \notin K_\alpha$ であるならば $\mathrm{dist}(x, K_\alpha) = \eta > 0$ であり，従って $\mathrm{dist}(x, F_m) \ge \eta$ である．これは矛盾である．そして，条件 (13.11) は，$s \ge \beta\gamma$ であれば $\mathrm{dist}(x, F_m) \ge \eta$に同値である．同じように，次が証明される．

補題 13.10　$\gamma \le s \le \beta\gamma$ であるなら，条件 (13.10) は $x \notin \bigcup_{\delta > (\beta\gamma/s)} E_{\alpha,\delta}$ に同値である．一方で，$s > \beta\gamma$ であるならば，(13.10) は $x \notin K_\alpha$ に同値である．

補題 13.11　$E_{\alpha,\beta}$ の Hausdorff 次元は $(1/\alpha\beta)$ である．

補題 13.12　$\gamma \le s \le \beta\gamma$ ならば，$E^{(s)}$ の Hausdorff 次元は $(s/\alpha\beta\gamma)$ である．$s > \beta\gamma$ ならば，集合 $E^{(s)}$ は空である．

補題 13.11 と 13.12 を証明するために，コンパクト集合 $K_{\alpha,\beta} \in E_{\alpha,\beta}$ において台をもつ確率測度 $\mu = \mu_{(\alpha,\beta)}$で次のようなものをつくろう．すなわち，長さ $|I| \le 1/2$ であるいかなる区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対しても，

$$\mu(I) \le C|I|^{1/\alpha\beta} \log\left(\frac{1}{|I|}\right) \tag{13.14}$$

であるようなものである．μ の構成は，初等的であるので，後で説明する．$\mu_{(\alpha,\beta)}$ がつくられると，補題 13.11 の証明は次のようになる．

$$E_{\alpha,\beta} = \bigcap_{m \ge 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)} \quad \text{ここに } E_{\alpha,\beta}^{(m)} = G_m^{(\beta)} \cup G_{m+1}^{(\beta)} \cup \cdots \quad \text{そして} \quad G_m^{(\beta)} = F_m + [-\lambda_m^\beta, \lambda_m^\beta]$$

いかなる $\epsilon > 0$ に対しても，$G_n^{(\beta)}$ $n \ge m$ にあらわれる区間 I_q によって $E_{\alpha,\beta}$を被覆することができる．$d > (1/\alpha\beta)$ であるなら，ϵ に依存しない C が存在して $\sum_0^\infty |I_q|^d \le C$ であるということをただちに確認できる．

逆に，$|I_q| \le \epsilon$ かつ $\sum_q |I_q|^d \le C$ （C は ϵ に依存しない）ような区間 I_q によって $E_{\alpha,\beta}$ が被覆されるならば，このとき一方で，

$$\sum_q \mu(I_q) \ge \mu(E_{\alpha,\beta}) = 1$$

であり，そして他方で，

$$\mu(I_q) \le C|I_q|^{1/\alpha\beta} \log \frac{1}{|I_q|}$$

である． $0 < d < (1/\alpha\beta)$ ならば，

$$|I_q|^{1/\alpha\beta} \log \frac{1}{|I_q|} \le |I_q|^d \epsilon^{(\alpha/\beta - d)} \log \frac{1}{\epsilon}$$

を得る． そして， $1 \le C\epsilon^{(\alpha/\beta-d)} \log(1/\epsilon)$ は不合理であるので，補題 13.11 の証明ができた．

さて，補題 13.12 の証明をしよう．はじめに $\gamma \le s \le \beta\gamma$ であることを仮定する．このとき，もし$\gamma \le s < \beta\gamma$であるなら

$$E^{(s)} = \left(\bigcap_{\delta<(\beta\gamma/s)} E_{\alpha,\delta} \right) \Big\backslash \left(\bigcup_{\delta>(\beta\gamma/s)} E_{\alpha,\delta} \right)$$

であり，一方で $s = \beta\gamma$ であるなら，

$$E^{(s)} = K_\alpha \Big\backslash \left(\bigcup_{\delta>1} E_{\alpha,\delta} \right)$$

である．どちらの場合もこの検証は同じであるので， $\gamma \le s < \beta\gamma$ を仮定しよう．すると，すべての $\delta < (\beta\gamma/s)$ に対して $E^{(s)} \subset E_{\alpha,\delta}$であるので $\dim(E^{(s)}) \le (s/\alpha\beta\gamma)$ である． $\dim(E^{(s)}) < (s/\alpha\beta\gamma)$ が成り立たないということを背理法によって示そう．本質的に補題 13.9 の証明にしたがう． μ を確率測度 $\mu_{(\alpha,\beta\gamma/s)}$ とする．

$$E^{(s)} \supset E_{\alpha,\beta\gamma/s} \Big\backslash \left(\bigcup_{\delta>\beta\gamma/s} E_{\alpha,\delta} \right) \tag{13.15}$$

であり，いかなる$\delta > \beta\gamma/s$ に対しても

$$\mu(E_{\alpha,\delta}) = 0 \tag{13.16}$$

であることが確認できる．(13.16) の性質は $G_m^{(\delta)}$ に現われる区間による $E_{\alpha,\delta}$ の被覆を使って確かめられる． $(I_q)_{q\ge0}$ が， $|I_q| \le \epsilon$ かつ $d < (s/\alpha\beta\gamma)$ に対して$\sum_0^\infty |I_q|^d \le C$ であるような $E^{(s)}$ の被覆であるならば，これらの区間は

$$A = E_{\alpha,\beta\gamma/s} \backslash (\bigcup_{\delta>\beta\gamma/s} E_{\alpha,\delta})$$

の被覆をなし， $\mu(A) = 1$ であるので，補題 13.9 を再び利用することができる． $s > \beta\gamma$ であるなら， $E^{(s)}$ は空である．なぜなら， $E^{(s)} = K_\alpha \backslash K_\alpha = \emptyset$ であるからである．

ここで， $E_{\alpha,\beta}$ に関する測度 μ をつくろう． ∞ に十分にはやく発散する，いかなる $n \ge 1$ に対しても $m_{n+1} \ge 2^{(\beta-1/\alpha)(m_1+\cdots+m_n)}$であるような，整数の増加列 $m_1 < m_2 < \cdots$ をとる．

そして，

$$K_{(\alpha,\beta)} = \bigcap_{m\geq 1} G_{m_n}^{(\beta)} \tag{13.17}$$

とし，ここに，

$$G_m^{(\beta)} = F_m + [-2^{-[\alpha\beta m]}, 2^{-[\alpha\beta m]}] \tag{13.18}$$

である．これは，$G_m^{(\beta)}$ が2進区間の有限な和集合であるということを意味する．そして，$G_{m+1}^{(\beta)}$ における2進区間は先の2進区間とは交わらないものであるか，またはそれに含まれるものであるかのどちらかである．$[\alpha\beta m] \geq \beta[\alpha m]$ であり，そして集合 $G_m^{(\beta)}$ は，$E_{\alpha,\beta}$ を定義するために（そして被覆するために）使われるものに含まれる．N_n を $H_n = G_{m_1}^{(\beta)} \cap \cdots \cap G_{m_n}^{(\beta)}$ における長さ $2.2^{-[\alpha\beta m_n]}$ の区間の数であるとしよう．そして，μ_n をこれら N_n 個の区間での確率測度 が $2.2^{-[\alpha\beta m_n]}/N_n dx$ であるものとする．$n \to \infty$ のときに $\mu_n \rightharpoonup \mu$ であることは容易に確かめられるであろう．ここに，$\mu = \mu_{(\alpha,\beta)}$ は $K_{(\alpha,\beta)}$ に台をもつ．明らかに $K_{(\alpha,\beta)} \subset E_{\alpha,\beta}$ であり，次のことが確かめられるであろう．

補題 13.13　長さ $|I| \leq 1/2$ のすべての I に対して

$$\mu(I) \leq C|I|^{1/\alpha\beta} \log \frac{1}{|I|} \tag{13.19}$$

であるような C が存在する．

補題13.13を証明するために，

$$2^{m_n/\alpha} 2^{(1/\alpha-\beta)(m_{n-1}+\cdots+m_1)} \leq N_n \leq \quad 2^{Cn} 2^{m_n/\alpha} 2^{(1/\alpha-\beta)(m_{n-1}+\cdots+m_1)}$$

であるような $C > 1$ が存在するということに注意することからはじめよう．このとき，二つの場合 $2^{-\beta m_n} \leq |I| < 2^{-m_n/\alpha}$ と $2^{-m_n/\alpha} \leq |I| < 2^{-\beta m_{n-1}}$ を考えよう．はじめの場合には，I は H_n を構成するたかだか二つの区間と交差し，$m_n \geq 2^{(\beta-1/\alpha)(m_{n-1}+\cdots+m_1)}$ であるので，

$$\mu(I) \leq CN_n^{-1} \leq C' 2^{-m_n/\alpha} m_n$$

である．そして，

$$\mu(I) \leq C|I|^{1/\alpha\beta} \log(1/|I|)$$

である．

2番目の場合には，H_n のいくつの区間が I と交わるかを調べると，$\mu(I) \leq (2^{m_n/\alpha}/N_n)|I|$

である．そして，$m_{n-1} \geq 2^{(\beta-1/\alpha)(m_{n-2}+\cdots+m_1)}$ であるので，

$$\begin{aligned}\frac{2^{m_n/\alpha}}{N_n}|I| &\leq |I|2^{(\beta-1/\alpha)(m_1+\cdots+m_{n-1})}\\ &\leq |I|^{1/\alpha\beta}\log(1/|I|)\frac{|I|^{(1-1/\alpha\beta)}}{\log(1/|I|)}2^{(\beta-1/\alpha)(m_1+\cdots+m_{n-1})}\\ &\leq |I|^{1/\alpha\beta}\log(1/|I|)\frac{2^{-(\beta-1/\alpha)m_{n-1}}}{\beta m_{n-1}}2^{(\beta-1/\alpha)(m_1+\cdots+m_{n-1})}\\ &\leq C|I|^{1/\alpha\beta}\log(1/|I|),\ \ (\ m_{n-1} \geq 2^{(\beta-1/\alpha)(m_{n-2}+\cdots+m_1)}\text{を使う})\end{aligned}$$

である．これによって補題 13.13 の証明を終了する．

ここで，定理 13.7 の一般的な場合を証明する．$E_1, E_2, \ldots$ を $\mathbb{R}$ の部分集合と互いに素なものとし，$E_k \subset [a_k, b_k]$ を仮定する．ここに $[a_k, b_k]$ は互いに素である．d_k を E_k の Hausdorff 次元であるとする．このとき，$\bigcup_{k\geq 1} E_k$ の Hausdorff 次元は $\sup(d_k)$ である．

関数 $f_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ にもどろう．この関数に $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をかけた後（これは K_α の近傍で 1 に等しくなるが），$f_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ はコンパクト台をもつことを仮定することができる．$f(x)$ を $f(px+q)$ によって置き換えると，θ_f を変化させずに，fの台は与えられた区間 $[a,b]$ のすべてに含まれると仮定することができる．$f_k(x) = f_{(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}(x)$ を命題 13.8 にあるような関数の列であるとし，対応する関数 $\theta_k(s)$ を考えよう．$f_k(x)$ の台が $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$ に含まれるということを仮定することができる．また，f_k を $\epsilon_k f_k$ によって置き換えることができる．ここに，$\epsilon_k > 0$ は，0 に収束する数列である．このとき，$f = \sum_0^\infty \epsilon_k f_k$ とし，$\theta(s)$ を $\theta_k(s)$ の上限であるとしよう．その結果 $\theta = \theta_f$ となり，これより定理 13.7 の証明が終了する．

偏微分方程式に関連した問題を調べるためにウェーブレットを使いたい．しかし，はじめにある特定の作用素の解析とウェーブレット基底による関数空間に関したいくつかの準備が必要である．

13.4 線形作用素の解析と関数空間

13.4.1 例：R^n でのラプラシアンの解析

$(H, \langle . \mid . \rangle)$ を Hilbert 空間，(ϵ_λ) を H の正規直交基底であるとする．このとき H での線形作用素 A を考えよう．H の x に対して，$A(x)$ は

$$\begin{aligned}A(x) &= \sum_\lambda \langle x \mid \epsilon_\lambda\rangle A(\epsilon_\lambda)\\ &= \sum_\lambda\sum_{\lambda'}\langle A\epsilon_\lambda \mid \epsilon_{\lambda'}\rangle\langle x \mid \epsilon_\lambda\rangle\epsilon_{\lambda'}\end{aligned}$$

によって計算されるので，A は係数

$$(\langle A(\epsilon_\lambda) \mid \epsilon_{\lambda'}\rangle)$$

の「 無限行列 」によって表現される．

選ばれた基底に依存して，この係数を調べることで A のある程度の性質を容易に明らかにすることができる．はじめに，ウェーブレット基底によるラプラシアンについて調べてみよう．必須なこととして，はじめにこれからたびたび使う行列のクラスを決めなければならない．以下の 三つの性質があるので，このクラスが役に立つ．

(a) 代数である．

(b) 十分大く，ここで考えようとする作用素（例えば微分作用素やそれらの逆作用素）からなる大きいクラスは，この空間の行列に対角行列をかけたものとなる．

(c) この展開の性質（ある関数空間での有界性やグリーン関数の評価といったようなもの）は，係数の絶対値の大きさを使って確認することが容易である．

もし，

$$|T(\lambda, \lambda')| \le C\omega_\gamma(\lambda, \lambda')$$

であるならば,「無限行列」 $T(\lambda, \lambda')$ が $\mathcal{M}^\gamma$ に属すると呼ぶことにする．ここに，

$$\omega_\gamma(\lambda, \lambda') = \frac{2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)}}{1+(j-j')^2}\left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|\lambda-\lambda'|}\right)^{n+\gamma} \tag{13.20}$$

である．作用素 U の行列が $\mathrm{Op}(\mathcal{M}^\gamma)$ に属するとはウェーブレット基底に関する行列表示が $\mathcal{M}^\gamma$ に属すること，すなわち

$$|\langle U(\psi_\lambda) \mid \psi_{\lambda'}\rangle| \le C\omega_\gamma(\lambda, \lambda')$$

であることとする．空間 $\mathcal{M}^\gamma$ は代数である，すなわち $T \in \mathcal{M}^\gamma$ であるならば $T' \in \mathcal{M}^\gamma \Longrightarrow TT' \in \mathcal{M}^\gamma$ である．この性質を確認することは簡単な計算であるのであとは読者にまかせよう（[Me2] を見よ）．ここで，

$$\|T\|_\gamma = \frac{1}{\alpha}\sup_{\lambda,\lambda'}\frac{|T(\lambda, \lambda')|}{\omega_\gamma(\lambda, \lambda')}$$

を定義する．ここに α は定数で，すべての $T, T' \in \mathcal{M}^\gamma$ に対して，

$$\|TT'\|_\gamma \le \|T\|_\gamma \|T'\|_\gamma \tag{13.21}$$

であるような性質によって定義される．$\mathcal{M}^\gamma$ における作用素は l^2 上で連続で，これは Schur の

補題（[Me1] を見よ）の結果である．

はじめの例として，Littlewood-Paley のウェーブレット基底で，ラプラシアン の分数ベキの解析をしてみよう． $s \in \mathbb{R}$ であるならば， Δ^s は

$$\widehat{\Delta^s(f)}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{f}(\xi)$$

のように Fourier 変換で定義される作用素であることを思い起こそう． G をウェーブレット基底によるこの作用素の行列表示であるとしよう．

命題 13.14 次の分解が成り立つ． $G = DAD$ ここに D は $D(j,k,j,k) = 2^{sj}$ であるようなウェーブレット基底での対角行列であり， A と A^{-1} はいかなる $\gamma > 0$ に対しても $\mathcal{M}^\gamma$ に属する．

もっと一般的に，この結果は [J5] の中で一般的な楕円型作用素 に対して証明されている．これは次のように解釈される．対角化前処理は $Af = g$ （ A は楕円型）の分解能の条件数を離散化とは関係なく有界なものとする．

証明 $|j - j'| > 1$ であるならば， $G(j,k,j',k') = 0$ である．なぜならば Fourier 変換 $\widehat{\psi_{j,k}}$ と $\widehat{\psi_{j',k'}}$ は互いに素な台を持つからである．

$j = j'$ であるなら，

$$\begin{aligned} G(j,k,j,k') &= 2^{-nj} \int e^{i(k-k')\xi/2^j} |\xi|^{2s} |\hat{\psi}|^2 (\xi/2^j) d\xi \\ &= 2^{2sj} \int e^{i(k-k')\xi} |\xi|^{2s} |\hat{\psi}|^2 (\xi) d\xi \end{aligned}$$

である．なぜなら， $|\hat{\psi}|^2$ は Schwartz クラスで，その Fourier 変換は，はやく減衰するからである．それゆえ，いかなる γ に対しても

$$|G(j,k;j',k')| \le \frac{C_\gamma}{(1 + |k - k'|)^\gamma}$$

である． $|j - j'| = 1$ のときの証明も同様である．それゆえ $A \in \mathcal{M}^\gamma$ である． A^{-1} に対する評価は s を $-s$ に変えると A の評価になるということに注意すれば得られるであろう． ∎

結果として，Sobolev 空間 の特徴付けを証明したことになる（[Me1] を見よ）．

命題 13.15 f が $H^s(\mathbb{R}^n)$ の元とする．このとき，次式が成り立つ．

$$\|f\|^2_{H^s} \equiv \sum |c_{j,k}|^2 (1 + 2^{2j})^s$$

証明 $s \ge 0$ であるとする．このとき， $\|f\|^2_{H^s} = \|f\|^2_{L^2} + \|\Delta^{s/2} f\|^2_{H^s}$ である． C を f のウェー

ブレット係数のベクトルであるとしよう．計算すると，

$$\|\Delta^{s/2}f\|^2_{H^s} \equiv \langle A(DC) \mid DC\rangle \equiv \|(DC)\|^2 = \sum |c_{j,k}|^2 2^{2js}$$

となる．これで $s \geq 0$ のときを証明したことになる． $s < 0$ の場合には双対性によって証明できる． ∎

ここで,「ベイグレット」(この定義は，[Me1] で述べられているものとは少し異なる.) の概念を導入しよう．関数 $(f_{j,k})$ は,(滑らかさが γ より大きな) ウェーブレット基底による行列表示が $\mathcal{M}^\gamma$ に属するならば，オーダー γ のベイグレットであるという．この場合 $|l| \leq \gamma$ であるようなすべての $l = (l_1, \ldots, l_n)$ に対して，

$$\int (x - k2^{-j})^l f_{j,k}(x)dx = 0$$

であり，

$$|\partial^l f_{j,k}(x)| \leq \frac{c(p)2^{(n/2+|l|)j}}{(1+|2^j x - k|)^\gamma}$$

である．

二つの関数の積のような，いくつかの非線形量のウェーブレット分解について研究しよう．そして，非線形の偏微分方程式の分解の結果のいくつかを示そう．これらの結果はコンパクト性に関連するものである．この方法のキーポイントは実 Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ の性質に結び付くものである．そして，次に示すように [Me1] に従ってこの空間を定義し，調べてみよう．

13.4.2　一般化された Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$

列 (e_n) は，いかなる $x \in B$ に対しても，一意に

$$x = \alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_k e_k + \cdots$$

と書けるならば，Banach 空間 B の Schauder 基底である．ここで，この級数は B での収束である．さらに， $|\epsilon_k| \leq 1$ であるような任意の数列 ϵ_k と，任意の数列 β_k に対して，空間 B にのみ依存する C が存在して

$$\left\| \sum_0^n \epsilon_k \beta_k e_k \right\| \leq C \left\| \sum_0^n \beta_k e_k \right\|$$

であるならば，この基底は無条件基底 であるという．例えば，Hilbert 空間の正規直交基底は無条件基底である．

$\mathcal{H}^1$ を，無条件に収束するウェーブレット級数をもつような関数で構成される L^1 の部分集合

で最大のものであるとしよう．$f \in \mathcal{H}^1$ であるならば，± 1 の値をとるいかなる数列 $\epsilon(\lambda)$ に対しても，

$$\left\| \sum_\lambda \epsilon(\lambda) \langle f \mid \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda \right\|_1 \leq C \tag{13.22}$$

を得る．すべての数列$\epsilon(\lambda)$ に対する左側の項の上限を $\|f\|_{\mathcal{H}^1}^{(1)}$ としよう．(13.22) を評価するために，Khintchine の不等式（[Zy] をみよ）と呼ばれる次の命題を使おう．$A(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \sum c_i \epsilon_i$ とする．また，

$$\|A\|_p = \left[\frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n} A(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \right]^{1/p}$$

とする．ここで，この総和は ± 1 の値をとるすべての n 個の $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ についての和とする．

命題 13.16　$p > 0$ であるとしよう．いかなる数列 (c_i) に対しても

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i \epsilon_i \right\|_p \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2} \tag{13.23}$$

であるような A_p と B_p が存在する．

証明　はじめに $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ のときの右の不等式を証明する．

$$S_n = \sum_{i=1}^n c_i \epsilon_i$$

とする．Eを ± 1 のすべての n 個の $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ での平均値を表すものとする（数学的な期待値である）．

$$E(S_n^{2k}) = \sum_{\sum \alpha_i = 2k} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_j)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_j!} E(\epsilon_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \epsilon_{i_j}^{\alpha_j}) C_{i_1}^{\alpha_1} \ldots C_{i_j}^{\alpha_j};$$

すべての α_i が偶数であるならば，$E(\epsilon_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \epsilon_{i_j}^{\alpha_j}) = 1$ である．そうではないときには $E(\epsilon_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \epsilon_{i_j}^{\alpha_j}) = 0$ である．

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_j)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_j!}$$

としよう．このとき，

$$\begin{aligned} E(S_n^{2k}) &= \sum_{\sum \beta_i = k} A_{2\beta_1 \ldots 2\beta_j} C_{i_1}^{2\beta_1} \ldots C_{i_j}^{2\beta_j} \\ &= \sum \frac{A_{2\beta_1 \ldots 2\beta_j}}{A_{\beta_1 \ldots \beta_j}} A_{\beta_1 \ldots \beta_j} C_{i_1}^{2\beta_1} \ldots C_{i_j}^{2\beta_j} \end{aligned}$$

$$\leq \sup\left(\frac{A_{2\beta_1\ldots 2\beta_j}}{A_{\beta_1\ldots\beta_j}}\right) s_n^{2k}$$

であり，ここに $s_n^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$ である．

$$\begin{aligned}\frac{A_{2\beta_1\ldots 2\beta_j}}{A_{\beta_1\ldots\beta_j}} &= \frac{(2k)!}{(2\beta_1)!\ldots(2\beta_j)!}\cdot\frac{\beta_1!\ldots\beta_j!}{k!} \leq \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{\prod_i 2\beta_i(2\beta_i-1)\ldots(\beta_i+1)}\\ &\leq \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{2^{\beta_1+\ldots\beta_j}} \leq \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{2^k} \leq k^k\end{aligned}$$

なので $E(S_n^{2k}) \leq k^k s_n^{2k}$ を得るので， $B_p = \sqrt{p/2}$ のときの不等式を証明したことになる．$\|S_n\|_p$ が p の増加関数であるので，すべての p に対して不等式が成立する．

$$\|S_n\|_p \geq \|S_n\|_2 = s_n$$

であるので，$0<p<2$ に対する左の不等式も成立する．

平均 $\|S_n\|_p$ の対数的な凸性を用い，$r_1+r_2=1$ そして $pr_1+4r_2=2$ であるように $r_1, r_2>0$ を選択することによって，

$$s_n^2 = \|S_n\|_2^2 \leq \|S_n\|_p^{pr_1}\|S_n\|_4^{4r_2} \leq \|S_n\|_p^{pr_1}(2^{1/2}s_n)^{4r_2}$$

を得る．よって，

$$\|S_n\|_p^{pr_1} \geq 4^{-r_2}s_n^{2-4r_2} = 4^{-r_2}s_n^{pr_1}$$

である．それゆえ，

$$\|S_n\|_p \geq 4^{-r_2/pr_1}s_n$$

となり命題 13.16 がいえる．

(13.23) の左側で $p=1$ のときには，

$$\int\left(\sum|\langle f\mid\psi_\lambda\rangle|^2|\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}dx \leq C$$

となる．

$$\|f\|^{(2)} = \int\left(\sum|\langle f\mid\psi_\lambda\rangle|^2|\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}dx;$$

とするならば，

$$\|f\|^{(2)} \leq \|f\|^{(1)}$$

となる．　■

ここで他の三つのノルムを決めよう．λ に，$x\in R(\lambda)$ であるなら $|\psi_\lambda(x)| \geq C > 0$ である

ような 2 進キューブ $R(\lambda)$ が存在する．よって，

$$\int\left(\sum|c_\lambda|^2|\psi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}dx \geq C\int\left(\sum|c_\lambda|^2|2^{nj}\chi_{R(\lambda)}(x)|^2\right)^{1/2}dx$$

となり，右辺によって $\|f\|^{(3)}$ が定義される．

$$\|f\|^{(4)}=\int\left(\sum|c_\lambda|^2|2^{nj}\chi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}dx$$

としよう．$\|f\|^{(3)}\leq\|f\|^{(2)}$ と $\|f\|^{(3)}\leq\|f\|^{(4)}$ を得る．

ここで用いようとする最後のノルムはアトム分解によって定義されるものである．ある球 B が存在して，アトムとは関数 $a(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ で，次を満たすものである．すなわち

$$\begin{cases}\operatorname{Supp} a\subset B\\ \|a\|_2\leq|B|^{-1/2}\\ \int_B a(x)dx=0\end{cases}$$

Cauchy-Schwartz の不等式より $\int|a(x)|dx\leq 1$ である．$f=\sum\lambda_j a_j(x)$，ここで $\sum|\lambda_j|<\infty$ で a_j がアトムであるならば，関数 f は $\mathcal{H}^1_{at}$ に属する．$\|f\|^{(5)}$ を，すべての可能な f のアトム分解でとられる $\sum|\lambda_j|$ の下限として定義する．

定理 13.17　上で定義された五つのノルムは同値である．

証明　$\|f\|_1<\infty$ は $\|f\|_2<\infty$ を意味し，これはまた $\|f\|_3<\infty$ を意味する．$\|f\|_4<\infty$ は $\|f\|_3<\infty$ を意味する．$\|f\|_3<\infty$ が $\|f\|_5<\infty$ を意味していることを証明しよう．

ウェーブレット分解が，必ずしも要求されるアトム分解を表していないというところが難しいところである．ウェーブレットをうまく集めなければならない．はじめに，アトムであることを保証するような関数のウェーブレット係数に対する条件を引き出そう．

ウェーブレットがコンパクト台をもつであるとき，$\cup\{\lambda/c_\lambda\neq 0\}\subset Q$ そして $\sum|c_\lambda|^2\leq(1/|Q|)$ であるような 2 進キューブ Q が存在するのであるならば，係数列はアトムと呼ばれる．このとき $\sum c_\lambda\psi_\lambda$ がアトムであるということは容易に確認できる．

ここで $\|f\|_3<\infty$ が $\|f\|_5<\infty$ を意味するということを証明しよう．$\gamma\in(0,1]$ が存在して，いかなる 2 進キューブ λ に対しても $|R|\geq\gamma|Q|$，そして，

$$\sigma(x)=\left(\sum|c_\lambda|^2|\lambda|^{-1}\chi_{R(\lambda)}(x)\right)^{1/2}\in L^1$$

であるような $R(\lambda)\subset\lambda$ が存在すると仮定する．$|E|$ が有限となるように $E\subset\mathbb{R}^n$ としよう．はじめに次のように E を含むより大きな集合 E^* を定義しよう．$\beta>0$ を $\beta<\gamma$ となるとする．ϕ を $|\lambda\cap E|\geq\beta|\lambda|$ であるようなすべての 2 進キューブ λ の集合であるとする．そして E^* を，これらのキューブの合併であるとする．$|E|$ は有限であるので，ϕ に属するキューブの大きさは有界である．したがって，ϕ の中のいかなるキューブも極大キューブ $\tilde{Q}$に含まれる．

これらの極大キューブは，E^* の分割である．このため，

$$|E^*|\sum|\tilde{Q}|\le\frac{1}{\beta}\sum|\tilde{Q}\cap E|\le\frac{|E|}{\beta}$$

である．(測度 0 の集合を除いて) $E\subset E^*$ であることを得る．これは，Lebesgue の微分定理

$$\lim_{x\in Q,|Q|\to 0}\frac{|Q\cap E|}{|Q|}=1 \qquad \text{a.e.}$$

による．$E_k=\{x\mid\sigma(x)>2^k\}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\int\sigma(x)dx &= \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{x\in E_k\setminus E_{k+1}}\sigma(x)dx\\ &\ge \sum 2^k(|E_k|-|E_{k+1}|)\\ &= \sum 2^k|E_k|-\frac{1}{2}\sum 2^k|E_k|\end{aligned}$$

であるので，

$$\sum 2^k|E_k|\le 2\int\sigma(x)dx$$

である．ϕ_k を $|\lambda\cap E_k|\ge\beta|\lambda|$ であるような 2 進キューブ λ の集合であるとしよう．E_k^* を上のように $|E_k^*|\le(1/\beta)|E_k|$ であるように定義する．したがって，

$$\sum 2^k|E_k*|\le\frac{2}{\beta}\int\sigma(x)dx \tag{13.24}$$

である．$Q(k,l)$ を ϕ_k の極大 2 進キューブであるとし，$\Delta_k=\phi_k\backslash\phi_{k+1}$ であるとする．$\lambda\in\Delta_k$ かつ $\lambda\subset Q(k,l)$ であるとするならば，$\lambda\in\Delta(k,l)$ と書くことにする．はじめに次を証明しよう．

$$\sum_{\lambda\in\Delta(k,l)}|c_\lambda|\le\frac{\gamma^2}{\gamma-\beta}\int_{Q(k,l)\setminus E_{k+1}}\sigma^2(x)dx\le\frac{\gamma^2}{\gamma-\beta}4^{k+1}|q(k,l)| \tag{13.25}$$

$\lambda\in\Delta(k,l)$ であるならば，このとき $\lambda\subset Q(k,l)$ かつ $\lambda\notin\phi_{k+1}$ であるので $|\lambda\cap E_{k+1}|<\beta|\lambda|$ である．$R(\lambda)\subset\lambda$ かつ $|R(\lambda)|\ge\gamma|\lambda|$ であるので，

$$|R(\lambda)\cap E_{k+1}|\le\beta|\lambda|\le\frac{\beta}{\gamma}|R(\lambda)|$$

を得る．従って $|R(\lambda)/E_{k+1}|\ge(1-(\beta/\gamma))|R(\lambda)|\ge(\gamma-\beta/\gamma^2)|\lambda|$ である．

σ の定義から，

$$\sigma^2(x)\ge\sum_{\lambda\in\Delta(k,l)}|c_\lambda|^2|\lambda|^{-1}\chi_{R(\lambda)}(x)$$

を得る．従って，

$$\int_{Q(k,l)\setminus E_{k+1}} \sigma^2(x) \geq \sum_{\lambda\in\Delta(k,l)} |c_\lambda|^2|\lambda|^{-1}|R(\lambda)\setminus E_{k+1}| \geq \frac{\gamma-\beta}{\gamma^2}\sum_{\lambda\in\Delta(k,l)}|c_\lambda|^2$$

である．

これによって (13.25) のはじめの不等式が証明された．

2 番目の不等式は $x \notin E_{k+1}$ であるならば，$\sigma(x) \leq 2^{k+1}$ の結果として導かれる．それゆえ (13.25) となる．$\lambda(k,l) = |Q(k,l)|^{1/2}(\sum_{\lambda\in\Delta(k,l)}|c_\lambda|^2)^{1/2}$ とする．アトム $\alpha_{k,l}(\lambda)$ を

$$\begin{aligned}\alpha_{k,l}(\lambda) &= \frac{c_\lambda}{\lambda(k,l)} \qquad \lambda\in\Delta(k,l) \text{ のとき}\\ &= 0 \qquad \text{その他の場合}\end{aligned}$$

によって定義する．

$\sum\sum\lambda(k,l) \leq C\|\sigma\|_{L^1}$ であることを確認しなければならない．

$$\begin{aligned}\sum\sum\lambda(k,l) &\leq \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma-\beta}}\sum\sum 2^k|Q(k,l)|\\ &= \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma-\beta}}\sum 2^k|E_k^*| \qquad (\,Q(k,l) \text{ は，} E_k^* \text{の分割であるので})\\ &\leq \frac{4\gamma}{\beta\sqrt{\gamma-\beta}}\|\sigma\|_{L^1} \qquad ((13.24) \text{ 式を使って})\end{aligned}$$

したがって，ウェーブレット係数により，f のアトム分解を実現した．

より正確には，

$$\left\|\sum c_\lambda\psi_\lambda\right\|_{L^1} \leq C\left\|\left(\sum|c_\lambda|^2|\lambda|^{-1}\chi_{R(\lambda)}\right)^{1/2}\right\|_{L^1}$$

であることを示した．右側は単に $|c_\lambda|$ の関数であるので，

$$\left\|\sum c_\lambda\epsilon_\lambda\psi_\lambda\right\|_{L^1} \leq C\left\|\left(\sum|c_\lambda|^2|\lambda|^{-1}\chi_{R(\lambda)}\right)^{1/2}\right\|_{L^1}$$

を得る．したがって，$\|f\|_3 < \infty$ は $\|f\|_1 < \infty$ を意味する．$\|f\|_5 < \infty$ が $\|f\|_4 < \infty$ を意味することを確認しよう．f が中心が x_0 で半径が $R > 0$ である球 B に付随するアトムであると仮定する．$\tilde{B} = B(x_0, CR)$ かつ $R_k = \{x/2^kCR \leq |x-x_0| < 2^{k+1}CR\}$ とする．ここで $C > 1$ は後で求められる．

$S(f)(x) = (\sum|c_\lambda|^2|\psi_\lambda|(x)^2)^{1/2}$ とする．

$$\int_{\tilde{B}} S(f) \leq |\tilde{B}|^{1/2}\|S(f)\|_{L^2} \leq C|B|^{1/2}\|f\|_{L^2} \leq C$$

を得る．R_k 上での積分を評価するために，$m\lambda$ が B と交わらないとき $c_\lambda = 0$ で，そして，$m\lambda$ が R_k と交わらないならば，R_k 上での $S(f)$ の積分の計算をするときにキューブ λ を考える必要はないことに注意する．しかし，$m\lambda$が B と R_k と交わるのならば，このとき

$2^{-j} \geq CR2^k$ である．それゆえ，

$$\begin{aligned} |c_\lambda| &= \left|\int_B f\psi_\lambda\right| = \left|\int_b f\left(\psi_\lambda(\lambda) + \int_{x_0}^{x} \nabla\psi'_\lambda(\theta)d\theta\right)dx\right| \\ &= \left|\int_b f\left(\int_{x_0}^{x} \nabla\psi'_\lambda(\theta)d\theta\right)dx\right| \leq \|f\|_{L^1} \sup_{x\in B}\left|\int_{x_0}^{x} \nabla\psi'_\lambda(\theta)d\theta\right| \leq CR2^{nj/2}2^j \end{aligned}$$

である．よって，もし $x \in R_k$ ならば，$S(f)(x) \leq C2^{-k(n+1)}r^{-n}$ であり，足し合わせて $\int S(f)(x)dx \leq C$ を得る．最後の不等式はアトムに対して確認されたものなので，これは $\mathcal{H}^1$ の中でのいかなる関数に対しても成り立つものである．これにより，定理の証明を終える．∎

いくつかの注釈を付け加えて終わることとしよう．アトムがコンパクト台であることを仮定することはしばしば問題となる．そこで次のような定義がある．関数 f が消失する積分をもち，$s > n$ に対して，

$$\int |f(x)|^2 \left(1 + \frac{|x - x_0|}{d}\right)^s dx \leq d^{-n}$$

であるならば，関数 f は幅 d の分子 と呼ばれる．これは多くの場合有効なものである．例えば，$\mathcal{H}^1$ 上で作用素が連続であるということを証明するような場合，アトムを分子に写すことを証明すれば良い．

$\mathcal{H}^1$ の双対は，BMO(bounded mean oscillations : 有界平均振動) と呼ばれる．これは次の条件によって特徴づけることができる．いかなる球 B に対しても，

$$\int_B |f - \bar{f}|^2 \leq C|B|$$

であり，ここに $\bar{f}$ は B 上での f の平均である．BMO はまたウェーブレット係数による次の条件によっても特徴づけられる（[Me2] を見よ）．いかなる 2 進キューブ Q に対しても，

$$\sum_{\lambda\subset Q} |c_\lambda|^2 \leq |Q|$$

である．

13.5　ウェーブレットと偏微分方程式

13.5.1　積のくりこみ

ここでは，ある（2 次の）非線形量において弱極限をとることができることを示すために，関数の積のウェーブレット分解を利用しよう．相殺されたコンパクト性によって先に得られた結果を得るため，そしてそれを改良するために，調和解析とウェーブレットによる方法を利用す

るという考えは [Cetal] と [Do] の中ですでに示されている．そしてここでは，[Do] で与えられている方法に従う（[Me2] および [Me3] を参照のこと）．

次のコンパクト台のウェーブレットを利用する．P_j を V_j への直交射影，Q_j を W_jへの直交射影であるとしよう．$f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする．そして，$j \to +\infty$ のとき $P_j f \to f$ そして $j \to -\infty$ のとき $P_j f \to 0$ なので，L^2において

$$fg = \sum_j (P_{j+1} f P_{j+1} g) - (P_j f P_j g) = \sum_j P_j f P_j g + \sum_j Q_j f P_j g + \sum_j Q_j f Q_j g$$

であり，これは，L^1 において収束する．$P_1(f,g)$ を 1 番目の和とする．$P_2(f,g)$ を 2 番目の和とする．3 番目の和は，

$$P_3(f,g) = \sum_j \sum_k \sum_{l \neq k} \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle \langle g \mid \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,k} \psi_{j,l}$$

と

$$R(f,g) = \sum_j \sum_k \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle \langle g \mid \psi_{j,k} \rangle |\psi_{j,k}|^2$$

に分けられる．ここで，

$$P_1(f,g) = \sum_j \sum_k \sum_l \langle f \mid \phi_{j,k} \rangle \langle g \mid \psi_{j,l} \rangle \phi_{j,k} \psi_{j,l}$$

と

$$P_2(f,g) = \sum_j \sum_k \sum_l \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle \langle g \mid \phi_{j,l} \rangle \psi_{j,k} \phi_{j,l}$$

を得る．このとき，$P^{\#}(f,g) = fg - R(f,g)$（これは消失する積分をもたないすべての項を積から差し引いたもの）とする．$P^{\#}(f,g)$ は f と g のくりこみ積 と呼ばれる．この定義は，量子力学のくりこみの概念からの借用である（[F] を見よ）．

例えば，

$$\phi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(x) = 2^{nj/2} \omega^l_{j,k}(x)$$

であることに注意しよう．ここに，$(\omega^l_{j,k})$ はベイグレットであり，$|k-l| \geq M$ であるならば $\omega^l_{j,k} = 0$ である．そこで l 上での総和はたかだか $(2M)^n$ の項しか持たない．

作用素 P_1, P_2 と P_3 は明らかに $L^2 \times L^2$ から L^1 への連続写像である．ここで次を証明する．

命題 13.18　作用素 P_1, P_2 と P_3 は $L^2 \times L^2$ から $\mathcal{H}^1$ への，連続写像である．

証明　P_3に対する結果に対してはそれほど困難ではない．なぜなら

$$\sum_{j,k,l} |\langle f \mid \psi_{j,k}\rangle||\langle g \mid \psi_{j,l}\rangle| \leq (2M)^n \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

であるので，P_3はすでにアトム分解として書かれるからである．

P_1の連続性を証明するために，はじめに $\omega_{j,k}^l$はくりこまれた分子であるということを利用する．したがって，作用素$\psi_{j,k} \to \omega_{j,k}^l$は $\mathcal{H}^1$上で連続であるのでただ単に次を証明するだけでよい．

$$\sum \langle f \mid \phi_{j,k}\rangle\langle g \mid \psi_{j,k+l}\rangle 2^{nj/2}\psi_{j,k} \in \mathcal{H}^1$$

であり，これは

$$(|\langle f \mid \phi_{j,k}\rangle|^2|\langle g \mid \psi_{j,k+l}\rangle|^2)2^{2nj}(\chi_{j,k})^{1/2} \in L^1$$

と同値である．

$f^*(x)$ を

$$f^*(x) = \sup_{\{Q|x\in Q\}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy$$

によって定義される Hardy-Littlewood 最大関数であるとしよう．このとき（[St] を見よ），$1 \leq p < \infty$ であるなら，

$$\|f^*\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

である．よって

$$\sup_{\{j,k|/x\in Q_{j,k}\}} \langle f \mid 2^{nj/2}\phi_{j,k}\rangle \left(\sum_{j,k} |\langle g \mid \psi_{j,k+m}\rangle|^2 2^{nj}\chi_{j,k}(x)\right)^{1/2} \in L^1$$

を証明するだけで十分である．しかし，

$$\sup_{\{j,k|x\in Q_{j,k}\}} |\langle f \mid 2^{nj/2}\phi_{j,k}\rangle| \leq Cf^*(x)$$

そして

$$\left(\sum_{j,k} |\langle g \mid \psi_{j,k+m}\rangle|^2 2^{nj}\chi_{j,k}(x)\right)^{1/2} \in L^2$$

である．なぜなら，

$$\int \sum_{j,k} |\langle g \mid \psi_{j,k+m}\rangle|^2 2^{nj}\chi_{j,k}(x)dx = \sum\sum |\langle g \mid \psi_{j,k+m}\rangle|^2 \leq \|g\|_2^2$$

であるからである．それゆえ P_1 は連続である．P_2 の連続性は f と g の役割を入れ変えることによって得られる． ∎

ここで，くりこみは弱収束と「両立する」ということを示そう．VMO を BMO における $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ の閉包として定義する．ウェーブレットはあきらかに VMO において全体 (total) である．

命題 13.19 L^2 において $f_q \rightharpoonup f$ ，L_2 において $g_q \rightharpoonup f$ であるならば，このとき 弱 $(\mathcal{H}^1, VMO)$ 位相のもとで $P^{\#}(f_q, g_q) \rightharpoonup P^{\#}(f,g)$ である．

証明 はじめに，L^2 において $f_q \rightharpoonup f$ であり L_2 において $g_q \rightharpoonup f$ であるならば，列 $P_1(f_q, g_q)$ は $\mathcal{H}^1$ において有界である（なぜなら，f_q と g_q は L^2 において有界なので）ことに注意しよう．同じことは P_2 と P_3 に対しても成立する．そこで，各 m について

$$\sum \langle f_q \mid \phi_{j,k}\rangle\langle g_q \mid \psi_{j,k+l}\rangle 2^{nj/2}\psi_{j,k} \rightharpoonup \sum \langle f \mid \phi_{j,k}\rangle\langle g \mid \psi_{j,k+l}\rangle 2^{nj/2}\psi_{j,k}$$

であることを確認するだけでよい．この結果は成立する．なぜなら，h_q が $\mathcal{H}^1$ において有界であるなら，$\langle h_q \mid \psi_{j,k}\rangle \to \langle h \mid \psi_{j,k}\rangle$ であることと，弱 $(\mathcal{H}^1, VMO)$ 位相 に対して $h_q \rightharpoonup h$ であることは同値だからである．したがって，命題 13.19 は証明された． ∎

ここで，いわゆる Jacobian の定理の証明の準備ができたわけである．

定理 13.20 f と g が Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^2)$ に属するならば，このとき Jacobian

$$J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

は，$\mathcal{H}^1$ に属する．f_q と g_q が $H^1(\mathbb{R}^2)$ で有界であり，L^2 において ∇f_q と ∇g_q が ∇f と/∇g に弱収束するならば，このとき $J(f_q, g_q)$ は $(\mathcal{H}^1, VMO)$ の位相のもとで $J(f,g)$ に弱収束する．

証明 積 $(\partial f/\partial x)(\partial g/\partial y)$ と $(\partial f/\partial y)(\partial g/\partial x)$ をくりこむことからはじめよう．くりこまれた積は $\mathcal{H}^1$ に属し，弱収束と両立する．そこで，残った部分

$$J_B(f,g) = \sum\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle\left\langle \frac{\partial g}{\partial x} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle\left\langle \frac{\partial g}{\partial y} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle\right)|\psi_\lambda(x)|^2$$

についてのみ考えればよい．

$f = \sum \alpha_\lambda \psi_\lambda$ かつ $g = \sum \beta_\lambda \psi_\lambda$ とする．f と g は，Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^2)$ に属するので，$(2^j\alpha_\lambda) \in l^2$ ，$(2^j\beta_\lambda) \in l^2$である．

$$\begin{aligned}\mu_x(\lambda', \lambda) &= \left\langle \frac{\partial \psi_{\lambda'}}{\partial x} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle \\ \mu_y(\lambda', \lambda) &= \left\langle \frac{\partial \psi_{\lambda'}}{\partial y} \,\middle|\, \psi_\lambda\right\rangle\end{aligned}$$

かつ

$$J_B(f,g)(x) = \sum_{\lambda}\left(\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda''}\alpha_{\lambda'}\beta_{\lambda''}\mu_y(\lambda',\lambda)\mu_x(\lambda'',\lambda) - \mu_x(\lambda',\lambda)\mu_y(\lambda'',\lambda)\right)|\psi_\lambda(x)|^2$$

としよう．$2^{-j}(\partial\psi_\lambda/\partial x)$ と $2^{-j}(\partial\psi_{\lambda'}/\partial y)$ はベイグレットなので，任意のγ対し $2^{-j'}\mu_x(\lambda',\lambda) \in \mathcal{M}^\gamma$と $2^{-j'}\mu_y(\lambda',\lambda) \in \mathcal{M}^\gamma$ を得る．

$$m_{\lambda',\lambda''}(x) = \frac{2^{-j'}2^{-j''}}{\omega_\gamma(\lambda,\lambda'')}\sum_{\lambda}(\mu_y(\lambda',\lambda)\mu_x(\lambda'',\lambda) - \mu_x(\lambda',\lambda)\mu_y(\lambda'',\lambda))|\psi_\lambda(x)|^2$$

としよう．

$$J_B(f,g)(x) = \sum_{\lambda'}\sum_{\lambda''}2^{j'}\alpha_{\lambda'}2^{j''}\beta_{\lambda''}\omega_\gamma(\lambda',\lambda'')m_{\lambda',\lambda''}(x)$$

を得る．

J_B のアトム分解を得ることを見よう．$m_{\lambda',\lambda''}(x)$ が L^1 に属すること，そして消失積分を得ることを証明しよう．

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda}\int|\mu_y(\lambda',\lambda)\mu_x(\lambda'',\lambda) - \mu_x(\lambda',\lambda)\mu_y(\lambda'',\lambda)||\psi_\lambda(x)|^2 \\ \le C2^{j'+j''}\sum_{\lambda}\omega_\gamma(\lambda',\lambda)\omega_\gamma(\lambda'',\lambda) \le C2^{j'+j''}\omega_\gamma(\lambda',\lambda'')\end{aligned}$$

よって，関数 $m_{\lambda',\lambda''}$ は L^1 において一様である．$m_{\lambda',\lambda''}$ を定義する級数を各項ごとに積分し，

$$\begin{aligned}\int\omega_\gamma(\lambda',\lambda'')m_{\lambda',\lambda''} &= \sum_{\lambda}\mu_y(\lambda',\lambda)\mu_x(\lambda'',\lambda) - \mu_x(\lambda',\lambda)\mu_y(\lambda'',\lambda) \\ &= \sum\left(\left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda'}}{\partial y}\,\middle|\,\psi_\lambda\right\rangle\left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda''}}{\partial x}\,\middle|\,\psi_\lambda\right\rangle\right. \\ &= \sum\left.\left(-\left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda'}}{\partial x}\,\middle|\,\psi_\lambda\right\rangle\left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda''}}{\partial y}\,\middle|\,\psi_\lambda\right\rangle\right)\right) \\ &= \left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda'}}{\partial y}\,\middle|\,\frac{\partial\psi_{\lambda''}}{\partial x}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial\psi_{\lambda'}}{\partial x}\,\middle|\,\frac{\partial\psi_{\lambda''}}{\partial y}\right\rangle \\ &= \int J(\psi_{\lambda'},\psi_{\lambda''}) = 0\end{aligned}$$

を得る（Jacobian の積分は消える）．$(m_{\lambda',\lambda''})_{\lambda'}$ がベイグレットであり，

$$\sum 2^{j'+j''}|\alpha_{\lambda'}||\beta_{\lambda''}|\omega_\gamma(\lambda',\lambda'') < \infty$$

であることが確認できる．$\mathcal{H}^1$ に属することの条件が正しいものである（なぜならベイグレットは L^2正規化された分子であるので）ということを注意して，証明を終える． ∎

ここで，定理 13.20 のいくつかの応用を与え，それらが偏微分方程式で有用であるということを示そう（[Cetal] を見よ）．

命題 13.21 $u \in (H^1(\mathbb{R}^2))^2$ であるならば，$\det(\nabla u) \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ である．

証明 はじめに，Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^2)$ が VMO に含まれることを確かめる．$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ は $H^1(\mathbb{R}^2)$ において稠密であるので，BMO に $H^1(\mathbb{R}^2)$ が含まれることを確かめるだけでよい．ここでは，これらの空間のウェーブレットによる特徴付けを利用する．$f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ であるなら，$\sum |c_\lambda|^2(1+2^{2j}) \le \|f\|^2_{H^1}$ である．それゆえ，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda \subset Q} |c_\lambda|^2 &\le \frac{\|f\|^2}{1+2^{2j_0}} \quad (\,Q \text{ のサイズが } 2^{-j_0} \text{のとき}) \\
&\le |Q|\|f\|^2
\end{aligned}
$$

である．

双対性によって，$\mathcal{H}^1 \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ を得るので（$\mathcal{H}^1$ は VMO の双対であるということを利用する，[Cetal] を見よ），命題 13.21 を証明した． ∎

命題 13.22 ϕ を

$$\Delta\phi = \det(\nabla u), \quad u \in (H^1(\mathbb{R}^2))^2$$

の解であるとしよう．このとき $\hat{\phi} \in L^1$ である．

これを証明するために，はじめに $(\partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j) \in \mathcal{H}^1$ であることに注意する．なぜなら，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = R_i R_j(\det \nabla u)$$

であり，ここに R_i は Riesz 変換 であり，$\widehat{R_i f} = (\xi_i/\xi)\hat{f}$ によって定義される．すべての γ に対して $R_i, R_j \in \mathcal{M}^\gamma$ であることを確認できる．よって，R_i と R_j は $\mathcal{H}^1$ 上で連続であり，結果は成り立つ．なぜなら，$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ であるならば，$(1/|\xi|^2)\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であるからである（[Cetal] を見よ）．

命題 13.23 $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ かつ殆ど至るところ $\det(\nabla u) \ge 0$ であるなら，このとき，

$$\det(\nabla u)\log(\det(\nabla u)) \in L^1_{loc}$$

である．

ϕ が局所的に $\mathcal{H}^1$ に属し，正であるならば，$\phi \log \phi \in L^1_{loc}$ であるので，この結果は成立する．([Cetal] を参照のこと)

13.5.2　ウェーブレットと集中

非線形偏微分方程式のいくつかのタイプ（例えば，Boltzmann[DL]，Euler[DM]，[PnMaj]，[PLi]，または Klein-Gordon[Z] など）において，解の存在を証明しようとするときに，

$$\|f_n\|_{W^{s,p}} \leq C$$

のように，エネルギーの評価が成り立つような最小化列からはじめる．目標は，Sobolev の埋め込み（すなわち $((1/p)-(s/n))^{-1}$ ）によって与えられるものより大きな q に対して，f_n が L^q において有界であるという結論を導くことである．これが「小さい」集合の外側では可能であるということがわかるであろう．証明は 13.3.2 節で与えられたものと非常に似ている．

定理 13.24　f_n を $W^{s,p}$ において有界な列であるとする．r と q を $r<s$ と $q>p$ なるものとする．η_1 と $\eta_2>0$ を固定し，$d>n-(pq(s-r)/q-p)$ であるとする．f_n の部分列 f_{θ_n} で，次のようなものが存在する．$f_{\theta_n}=g_{\theta_n}+h_{\theta_n}$ と書け，g_{θ_n} は $W^{r,q}$ において有界であり，半径 1 のいかなる球 B に対しても，$(\cup_n \operatorname{Supp} h_{\theta_n})\cap B$ は，$\operatorname{diam} Q_k \leq \eta_1$ かつ

$$\sum (\operatorname{diam} Q_k)^d \leq \eta_2$$

であるような 2 進キューブ Q_k によって被覆される．

この定理を 2 段階で証明しよう．1 番目は，ウェーブレット分解を利用して，関数 f をいかに二つの部分に分けるかということを示すことである．2 番目は，この分解を関数列に対して，どのように行うかを示すことである．ここでは，コンパクト台のウェーブレットを使う．

13.3.2 節で与えられた $W^{s,p}$ のウェーブレットによる特徴付けにもどって，

$$f \in W^{s,p} \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^p 2^{(sp+(np/2)-n)j} \leq C \tag{13.26}$$

を得る．$\sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^q 2^{(rq+(nq/2)-n)j} 2^{\epsilon j} \leq C$ であるような $\epsilon>0$ が存在すると仮定する．このとき，

$$\left\| \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^2 2^{(n+2r)j} \chi_\lambda(x) \right\|_{L^{q/2}}^{q/2} \leq C 2^{-\epsilon j}$$

であるので，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda|^2 2^{(n+2r)j} \chi_\lambda \in L^{q/2}$$

である．したがって，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^q 2^{(rq+(nq/2)-n)j} 2^{\epsilon j} \le C \Rightarrow f \in W^{r,q} \tag{13.27}$$

である．

ここで，一つの関数に対する分割を証明しよう．$\epsilon > 0$ であるとする．Λ を，次のように Λ' と Λ'' に分割する．$|c_\lambda| \le 2^{((ps-rq-\epsilon/q-p)-(n/2))j}$ であるならば，$\lambda \in \Lambda'$ で，その他の場合に $\lambda \in \Lambda''$ である．このとき

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda'\cap\Lambda_j} |c_\lambda|^q 2^{(rq+(nq/2)-n)j} 2^{\epsilon j} &\le \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^p 2^{(q-p)((ps-rq-\epsilon/q-p)-(n/2))j} 2^{(rq+(nq/2)-n)j} 2^{\epsilon j} \\ &\le \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^p 2^{(ps+(np/2)-n)j} \le C\|f\|_W^{s,p}\end{aligned}$$

であるので，$\sum_{\lambda\in\Lambda'} c_\lambda\psi_\lambda \in W^{r,q}$ である．J を $2^{-J} \le \eta_1$ そして $\theta = \sum_{\lambda\in\Lambda'',j\le J} c_\lambda\psi_\lambda$ であるとする．このとき θ は任意の滑らかさをもつ．$h = \sum_{\lambda\in\Lambda'' j\ge J} c_\lambda\psi_\lambda$ が残っている．N を $\{\lambda \in \Lambda'' \cap \Lambda_j\}$ の濃度であるとする．

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_j} |c_\lambda|^q 2^{(ps+(np/2)-n)j} \le C$$

であるので，

$$N 2^{p(((ps-rq-\epsilon)/(q-p))-(n/2))j} 2^{(ps+(np/2)-n)j} \le C$$

を得る．そして，

$$N \le C 2^{n-(((pq(s-r)-p\epsilon)/(q-p))j}$$

である．ウェーブレットが，原点に中心を持ち，大きさが A のキューブ内に台をもつならば，$\tilde\lambda = A\lambda$ なるキューブによって h の台が被覆される．従って，

$$\sum (\operatorname{diam}\tilde\lambda)^d \le \sum_{j\ge J} C A^d 2^{n-(((pq(s-r)-p\epsilon)/(q-p))j} 2^{-dj}$$

である．J を十分大きくすれば，$d > n - (pq(s-r) - p\epsilon/q - p)$ であるならば，この和は任意に小さくできる．ϵ はいくらでも小さくできるので，この条件は

$$d > n - \frac{pq(s-r)}{q-p}$$

となる．これは，一つの関数に対しての定理を証明したことになる．$(1/q) = (1/p) - ((s-r)/n)$ であるなら，$d = 0$ を得ることに注意しよう．これは $W^{s,p} \subset W^{r,q}$ の場合である．

ここで，定理の証明をしよう．はじめに，f_n が与えられた球の中で台をもつと仮定することができる．なぜなら，もしそうでないなら，単位の分解を使って局所化することができるからである．この結果は，各局所化された列に対して成り立つ．それゆえ，部分列をとれば f_nに対しても成り立つ． η_1 と η_2 を固定する．そして J を

$$2^{-J} \leq \eta_1 < 2.2^{-J}$$

であるとする．ここで， f_n を先に述べたように三つの関数に分解する．

$$f_n = g_n + h_n + \theta_n$$

ここに $\theta_n = \sum_{j \leq J} c_\lambda \psi_\lambda$ である．したがって，Bernstein の不等式を使って，任意に大きな s' に対して，

$$\|\theta_n\|_{W^{s',p}} \leq C(s, s', p, J)\|f_n\|_{W^{s,p}}$$

を得る． $\epsilon = (1/2)(d - n + (pq(s-r)/q - p))$ かつ $d' = d - \epsilon$ としよう． Λ'_n と Λ''_n を先に述べたように定義する．すると，

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda'_n, j \geq J} c_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^{r,q}} = \|g_n\|_{W^{r,q}} \leq \|f_n\|_{W^{s,p}}$$

である． h_n の台は

$$\sum_{\lambda \in \Lambda''_n} (\mathrm{diam}\,\lambda)^d \leq \eta_2$$

なるたかだか η_1 の大きさのキューブ $\lambda \in \Lambda''_n$ によって被覆される．

ここで， f_n からの部分列の抽出の手順について述べよう．各 $j \geq J$ に対して，「指数 j の」抽出を定義しよう．そして，それから対角化法を適用しよう．この抽出が，指数 $j-1$ までは成り立つものと仮定する．このとき， $\cup_n \Lambda''_n$ に属する大きさ 2^{-j} の有限個のキューブが存在する．続いて，これら各キューブについて考えよう． λ が有限個の Λ''_n に属するならば， 対応する n を破棄する．そして， λ が無限の Λ''_n に属するならば，その n はとっておく．ひとたび，この抽出作業が大きさ 2^{-j} のすべてのキューブに対して実行されると， $(f_{\theta_j(n)})$ の部分列を得る． $\omega(n) = \theta_{j+n}(n)$ とする． $h_{\omega(n)}$ の台は $\cup_{\lambda \in \Lambda''_{\omega(n)}} \lambda$ に含まれる．そして，

$$\sum_{\lambda \in \Lambda''_{\omega(n)}} (\mathrm{diam}\,\lambda)^{d'} \leq \eta_2$$

である．その上， $n \leq p$ であるならば，大きさが 2^{-n} より小さいキューブ $\lambda \in \Lambda''_{\omega(n)}$ は， $\Lambda''_{\omega(p)}$ 中のキューブと同じである．大きさ 2^{-j} の λ が $\Lambda''_{\omega(j)}$ に属するならば， Λ'' に属すると

言うことにする．

$A(n)=\sum_{\lambda\in\Lambda''_{\omega(n)}}(\operatorname{diam}\lambda)^{d'}$ かつ $A=\sum_{\lambda\in\Lambda''}(\operatorname{diam}\lambda)^{d'}$ であるとしよう． $A(n)\leq\eta_2$ を得る． $J_0>J$ としよう．このとき，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda'',j\leq J_0}(\operatorname{diam}\lambda)^{d'}\leq\sum_{\lambda\in\Lambda''_{\omega(j)}}(\operatorname{diam}\lambda)^{d'}\leq A(j)$$

であるので，

$$A\leq\liminf A(j)\leq\eta_2$$

である． $B(n)=\sum_{\lambda\in\Lambda''_{\omega(n)}}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}$ かつ $B=\sum_{\lambda\in\Lambda''}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}$ としよう．このとき，

$$B(n)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda''_{\omega(n)},j\leq n}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}+\sum_{\lambda\in\Lambda''_{\omega(n)},j>n}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}$$

である．1番目の和の値は $\sum_{\lambda\in\Lambda'',j\leq n}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}\leq B$ であり，2番目の和は，$2^{-n\epsilon}\sum_{\lambda\in\Lambda'',j>n}(\operatorname{diam}$ $\leq\eta_2 2^{-n\epsilon}$ で有界である． E_n の和集合は

$$\Lambda'''=\Lambda''\cup(\cup_{n=J}^{\infty}\{\lambda\in\Lambda''_{\omega(n)}\mid\operatorname{diam}\lambda\leq 2^{-n}\})$$

によって被覆される．そして，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda'''}(\operatorname{diam}\lambda)^{d}\leq\eta_2+\sum_{n=J}^{\infty}\eta_2 2^{-n\epsilon}\leq\eta_2\left(1+\frac{2^{-\epsilon J}}{1-2^{-\epsilon J}}\right)$$

である．これが定理 13.24 の証明である．

参考文献

[ABMu1]　A. Arnéodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. 1991. "Direct determination of the singularity spectrum of fully developed turbulence data," preprint.

[ABMu2]　A. Arnéodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. 1993. "Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results," *J. Stat Phys.* **70**: 635.

[BMaPa]　E. Bacry, S. Mallat, and G. Papanicolaou. 1991. "Time and space wavelet adaptive scheme for partial differential equations," paper presented at *Wavelets and Turbulence*, Princeton, June.

[Bo]　J.M. Bony. 1984. "Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations," in *Tanaguchi Symp. HERT*, Katata, pp. 11–49.

[BrMiPe]　G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière. 1991. "On the multifractal analysis of measures," preprint.

[CZy]　A.P. Calderón and A. Zygmund. 1957. "Singular integral operators and differential equations," *Amer. J. Math.* **79**: 901–921.

[Cetal] R.R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes. 1993. "Compensated compactness and Hardy spaces," *J. Math. Pures Appl.*, to appear.

[D1] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[D2] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[Do] S. Dobyinski. 1992. Thèse, Université Paris Dauphine, CEREMADE.

[F] P. Federbush. 1987. "Quantum field theory in ninety minutes," *Bull. Amer. Math. Soc.* **107**: 319.

[J1] S. Jaffard. 1989. "Exposants de Holder en des points donnés et coefficients d'ondelettes," *C. R. Acad. Sci.*, Sér. 1 **308**: 79–81.

[J2] S. Jaffard. 1991. "Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients, " *Publ. Mat.* **35**: 155–168.

[J3] S. Jaffard. 1991. "Sur la dimension de Hausdorff des points singuliers d'une fonction," *C. R. Acad. Sci.*, Sér. 1 **314**: 31–36.

[J4] S. Jaffard. 1992. "Construction de fonctions multifractales ayant un spectre de singularités prescrit," *C. R. Acad. Sci.*, Sér. 1 **315**: 19–24.

[J5] S. Jaffard. 1992. "Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems," *SIAM J. Numer. Anal.* **29**(4): 965–986.

[JLa] S. Jaffard and Ph. Laurençot. 1992. "Orthonormal wavelets, analysis of operators, and applications to numerical analysis," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 543–601.

[K] J.P. Kahane. 1968. *Some Random Series of Functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[L] P.G. Lemarié. 1988. "Ondelettes à localisation exponentielle," *J. Math. Pures Appl.* **67**: 227–236.

[LMe] P.G. Lemarié and Y. Meyer. 1986. "Ondelettes et bases hilbertiennes," *Rev. Mat. Iberoamericana* **2**: 1–18.

[MPerR] Y. Maday, V. Perrier, and J.C. Ravel. 1991. "Adaptativité dynamique sur bases d'ondelettes pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles," *C. R. Acad. Sci.*, sér. 1 **312**: 405–410.

[Ma] Mallat S. 1989. "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**: 69–88.

[Me1] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Opérateurs*, Paris: Hermann.

[Me2] Y. Meyer. 1981. "Remarques sur un théorème de J.M. Bony," *Suppl. Rendiconti Circ. Mat. Palermo* **1**: 1–20.

[Me3] Y. Meyer. 1990. "Wavelets and applications," in *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Kyoto.

[PLi] R.J. di Perna and P.L. Lions. 1989. "On the Cauchy problem for Boltzmann equation. Global existence and weak stability," *Ann. Math.* **130**: 321–366.

[PnMaj] R.J. di Perna and A. Majda. 1988. "Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flows," *J. Amer. Math. Soc.* **1**: 59–98.

[St] E. Stein. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton: Princeton Univ. Press.

[Z] Y. Zheng. 1991. "Concentration in sequences of solutions to the nonlinear Klein–Gordon equation," *Ind. Univ. Math. J.* **40**(1): 86–147.

[Zi] W.P. Ziemer. 1989. *Weakly Differentiable Functions*, Berlin: Springer-Verlag.

[Zy] A. Zygmund. 1959. *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge Univ. Press.

第 14 章 Burgers 方程式における スケール分解

Frédéric Heurtaux, Fabrice Planchon, and Mladen Victor Wickerhauser*

【概要】 時間的に変化する信号のウェーブレットによる表現は，異なるスケール間のエネルギーの伝播を調べるために用いることができる.(1 次元及び 2 次元の) Burgers の発展作用素はそれ自身，このスケールの観点から記述することができる．ウェーブレットに基づくアルゴリズムを使うことによって，スケール間のエネルギーの輸送を描写することができる．ウェーブレット基底によってある瞬間の発展作用素を書き表すことができるが，このとき，大きな非対角成分は異なるスケール間のエネルギーの輸送に対応する．各スケールのウェーブレット部分空間に解を射影し，そのエネルギーを計算できる．このとき，スケールごとのエネルギーの変化率によってカスケードを検出し，定量化できる．これらの方法は波数がスケールに等しいとみなす古典的 Fourier 変換に基づくスケール分解の改良になっている．スケール分解において，Fourier 基底関数の位置の不確定性は形式的には無限大となるが，ウェーブレット基底関数は，はっきりとした有限の位置の不確定性（すなわち，スケール）を持っている．

14.1 はじめに

流体における乱流の難しい問題は，多くの様々な考えと測定の概念を提出してきた．流体の流れは非常に多くの自由度を含んでいるが，少ないパラメータでも少なくとも近似的に，ある程度固有な特徴は記述される．例えば，粘性流体において高い渦度の広い領域はコヒーレントに発達する．このような領域の数には必然的に限度があり，それらの大きさと形はゆっくりと変化する．これらは，点渦近似 (point vortices) と粒子力学 (particle mechanics)[BeL]，2，3 の余分なモーメントをもつ点渦近似 [Beetal]，形状力学法によってうまくモデル化され，これらすべては格子点近似をより低階の近似に置き換えて，運動方程式を新しいパラメータによって書き直す．また，さまざまな平均値を計算して，第一原理から，それらが保存すること，あるいは単調に変化すること，微分方程式で特別な項があるときに際立ったふるまいをすること，などを示すこともできる．このような量として，Newton の運動方程式や他の保存則を用いて計算できる全エネルギー，全エントロピー，そして平均速度がある．

1941 年の Kolmogorov の有名な論文 [K] は，十分に発達した乱流の速度場のエネルギー・ス

*Heurtaux と Planchon は Internship Office of the École Polytechnique の援助を一部受けており，Wickerhauser は Air Force Office of Scientific Research の援助を一部受けている．

ペクトル が，$k^{-5/3}$乗則（kは波数である）によってモデル化できることを予言している．この関係が直感的に正しいと思われる一つの説明は，大きいスケールでのコヒーレントな速度場から小さいスケールの散逸要素へエネルギーが流れるということである．しかしながら，このことを定量的に評価するのは困難であった．その原因の一つは，満足のいくかたちでスケールを定義することが難しかったことにある．普通は，スケールは速度場の Fourier 変換での波数 k に等しいものとする．そこで，与えられたスケールでのエネルギーは，波数のある範囲での Fourier 係数の平方の和であると定義される．しかし，波数の範囲をこうして制限してしまうことは，L^2 以外のいかなるノルムにおいても良い結果をもたらさない．これは，スケールがうまく定義されない基底関数への射影と同じことであり，数学的に悪いふるまいのため先に述べた直感を簡単に誤りに導いてしまう．この章での目的は，Fourier 波数「スケール」による射影の代わりに数学的に良い性質をもつウェーブレットで置き換えることである．この新しいウェーブレットスケール射影によって，簡単な流体流れの方程式である Burgers 方程式におけるスケール間のエネルギーの移動を調べることができる．

Kolmogorov,Kraichnan[K] そして Batchelor[B] は，乱流におけるエネルギーの再配分は，流れの中に現れる構造のスケールに依存するということを予言している．ウェーブレットはスケールを含んだ問題に対して特に適した道具である．なぜなら，それぞれのウェーブレットは，それ自身が良く定義されたスケールを持っているからである．ここで，関数に対して，スケール σ のすべてのウェーブレットの振幅の平方和をとることによって，簡単に **スケール σ での関数のエネルギー** を定義することができる．そして，発達した乱流の中で，スケール間をどのようにエネルギーが移動するかを考えよう．まず，いくつかの初期条件に対して厳密な解析解の知られている 1 次元の Burgers 方程式について考えてみよう．はじめに，時間発展と共に，発散時刻に近付くにつれて，小さいスケールのウェーブレットがいかに多くのエネルギーを集めるかをみる．また，既知の発展に対応した時間変化する Burgers の発展作用素について述べる．これをスケールが明確なウェーブレット基底に関する行列で表現する．これらの行列の係数は，異なるスケールを結び付け，それらの間でのエネルギーの移動をもたらす．また，速い波動や「衝撃波」のような小さいスケールの現象の生成と消滅をみることができる．より複雑な状況で，ここでの推測が正しいかどうかを確認するために，2 次元の Burgers 方程式に対して同じ解析を部分的に行う．

これに関連して [Fetal]，最大ウェーブレットパケット係数のみへの射影による初期パラメータの低減が，低い波数への射影によるパラメータの低減と比較された．これは大きな波長から小さい波長へのエネルギーカスケードの概念のもう一つの試験を提供する．しかしながら，この章の主たる目的は，射影によって低減された流れが，いかに良くもとの流れを予測できるかを調べることにある．ここでは，大きいウェーブレットパケットへの射影を示す．決定論的にも，統計論的にも，小さい波数への射影よりも実質的に優れているということを示す．他に [LT] に

関連して，Burgers 方程式の数値積分を行うのにウェーブレットを使った適応アルゴリズムがある．小さいスケールのある範囲でエネルギーがあるいき値を越えたときには，解はその領域でより細かく再度抽出される．この章で議論する方法は，適応的で直感的な概念をいかに定量化するかという示唆を与えるものであるが，これらは似たような適応アルゴリズムによって流体力学の問題の数値解の改良を目指すものでもある．

14.2　Burgers 発展方程式

次の初期値問題の方程式が Burgers 方程式である．

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}F^2(x,t) + \nu\Delta F(x,t); \qquad F(x,0) = F_0(x) \tag{14.1}$$

定数 ν は流体の粘性であり，関数 $F_0 = F_0(x)$ は時刻 $t = 0$ における初期状態である．

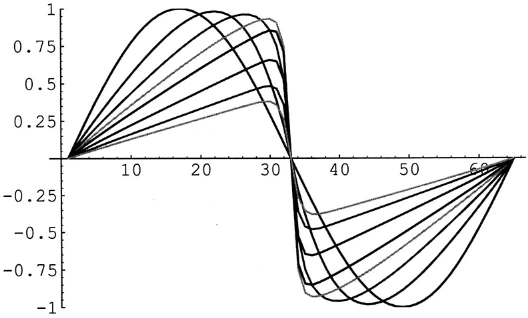


図 **14.1**　区間 $[0,1]$ での $\sin(2\pi x)$ の時間発展

例として $F_0(x) = \sin(2\pi x)$ を考えてみよう．図 14.1 のグラフはこの関数に対する時刻 0,0.08,0.16,0.32,0.5,0.75 及び 1.00 のときの解を示したものである．sin の二つの弧，一つは正で一つは負，は反対方向に伝播し，$x = 32/64$ で急勾配をつくる．散逸項である ΔF は消散の効果をもち，解の全体のエネルギーは，時間の増加とともに 0 に近付く．もし散逸項がなければ，$x = 32/64$ での勾配は無限大となり，不連続性が現れる．粘性項は，解が散逸効果が働く以前にどのくらい特異値に近付くかを制御する．ほとんど不連続な状態の発生は解のなかの小さいスケールの振幅が大きくなっていくということを意味している．なぜなら，それらは大きな微分係数に寄与するからである．このような現象は図 14.2 と図 14.3 で見ることができる．時間は 0 から 100 の間で徐々に変化しており，もう一つはウェーブレット係数のインデックスである．最初のウェーブレット係数のインデックスは，信号の平均（実際は 0），第 2 のも

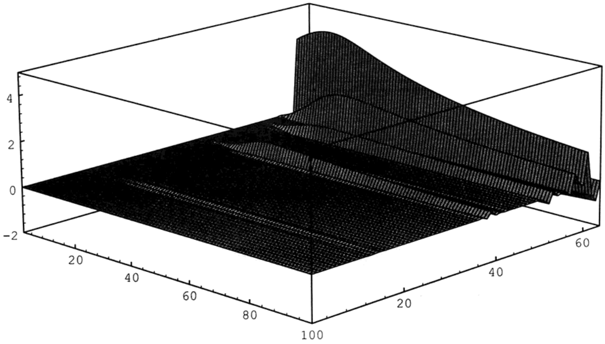


図 **14.2** ウェーブレット係数の時間発展

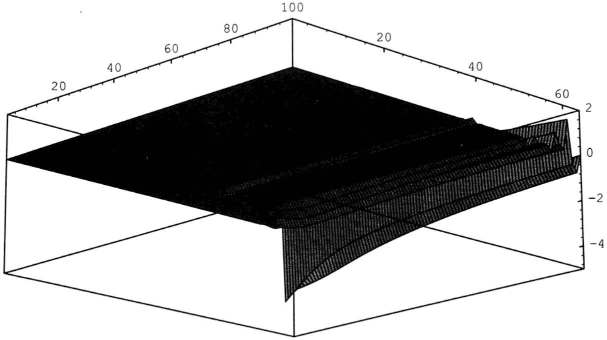


図 **14.3** 同じ 3 次元的表現だが下から見たもの

のは最大スケールの変動数，などにそれぞれ対応している．最後の 32 番めのものは，最小スケールの変動である．なぜなら，信号から 64 個のサンプルを取ったからである．30 タップス (taps) のクワドラチュアミラーフィルタ (quadrature mirror filter (QMF)) では [D] に基づく「 Coiflet 」のウェーブレットを使う．なぜなら，それらは多くのモーメントがゼロになり，ほとんど対称だからである．

1/64 の空間ステップ 1/64 と 1/100 の時間ステップを使い，1 周期の信号に Godounov スキームを適用して，発展方程式を計算する．図 14.2 と 14.3 は，ウェーブレット係数の進展を示している．それらは最小スケールでのウェーブレットにおけるエネルギーが増加している間に，最大スケールでのウェーブレットにおけるエネルギーが減少しているということを示している．図 14.3 を下から見ると，大きいスケールの振幅のうちの一つが，時刻 0 において，すでに減

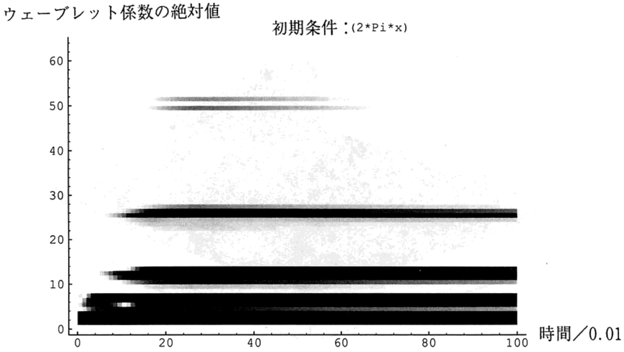


図 **14.4**　グレイスケールでのウェーブレット係数の推移

少しはじめていることがわかる．図 14.2 は，より小さいスケールほど振幅の最大は，少しずつ遅れて現れる，ということを示している．このことは，図 14.4 上でより明確に見られる．これは，ウェーブレット係数の絶対値をグレイスケールで示している．白は 0 であり，黒は最大値である．

結局，すべてのウェーブレット係数は 0 まで減少する．なぜなら，散逸効果によって，信号のエネルギーは 0 まで減少するからである．

14.3　Burgers 発展作用素

ここでは，Burgers 方程式の発展作用素から，相互スケール間でのエネルギーのやり取りに関する情報を引き出すことを試みる．このために，方程式 14.1 の右辺のヤコビアンである発展方程式の無限小生成作用素を用いる．

G を実空間での Godounov スキームを使ったこの変換の行列とし，Wをウェーブレット変換の行列としよう． $u(x,t)$ （簡単に $u(t)$ ，実際には $u(i\Delta x, n\Delta t)$ である）を信号， $U(t)$ をそのウェーブレット係数であるとすると，

$$u(t+\Delta t) = Gu(t), \qquad U(t+\Delta t) = (WGW^{-1})U(t) \tag{14.2}$$

図 14.5 の左図は，時刻 $t = 0.00$ での $K = WGW^{-1}$ の係数を示し，右図は $t = 0.33$ でのものを示している．密度のプロットにおいては，黒は最小を，白は最大を意味している．ウェーブレット基底における簡単な作用素の古典的な型，いわゆる G.Belkin,R.Coifman そして V.Rokhlin の標準型（M.Ruskai,G.Beylkin,R.Coifman,I.Daubechies,S.Mallat,Y.Meyer,L.Raphael [BeyCR] を見よ）を用いている．行列の濃淡図を横切っている「指」(のように見える部分）は，ウェー

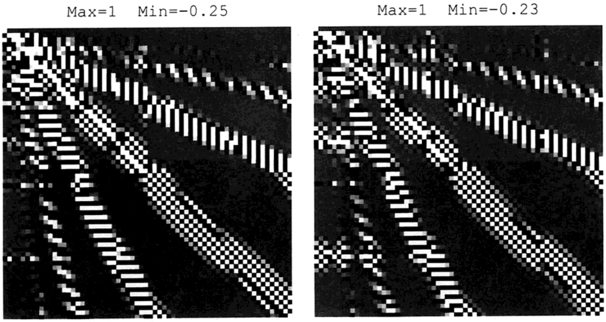


図 14.5 ウェーブレット成分により Burgers 発展作用素を表したもの

ブレットスケール間に強い結合が依存している．主対角は，ウェーブレットと等しいスケールと結合している部分であり，上三角部は，大きいスケールから小さいスケールへ結合している部分であり，下三角部は，小さいスケールから大きいスケールへ結合している部分である．

各行列の最後の列と最後の行における孤立した黒い部分は周期化の結果ではなく，行列の各ブロックそれ自身の周期性によるものであり，またその点での微分に Godounov スキームを適用したための不連続性によるものである．

あいにく，図 14.5 を読むことは簡単なことではない．右図において，スケールの相互作用が主に「中点」の近傍の信号の大きな勾配の部分で発生していることがわかる．この K での大きな振幅が指のように現われるのである．近接したスケール間で強い相互作用が発生していることが分かる．なぜなら，グレイからの変化が中心の指の部分で強くなっており，主対角から離れるにしたがって減少しているからである．また，解の進展とともに最大と最小スケール間の相互作用が強くなってきていることがわかる．なぜなら，外側の指の部分が時間 t の増加とともに太くなっていくからである．しかしながら，係数は交互に正になったり負になったりするため，これらの相互作用の種類がどのようなものであるのかを述べることは不可能である．

ここで，どこにエネルギーが集中しているかをみるために，Burgers の発展作用素がウェーブレット係数の絶対値に及ぼす効果を研究する．絶対値の合計をここでは「エネルギー」と呼ぶことにする．$|U|$ によってこれら係数の絶対値を表すことにしよう．そして，S をこれら係数の符号からなる対角「符号行列」，I を単位行列とすると，次式を得る．

$$\frac{\partial |U|(t)}{\partial t} \approx \frac{|U|(t+\Delta t) - |U|(t)}{\Delta t} \tag{14.3}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}(|WGu| - |Wu|)(t) \tag{14.4}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}(|WGW^{-1}Wu| - SWu)(t) \tag{14.5}$$

$$= \frac{1}{\Delta t}(|WGW^{-1}SSWu| - SWu)(t) \tag{14.6}$$

$$\approx \frac{1}{\Delta t}(SWGW^{-1}S - I)|U|(t) \tag{14.7}$$

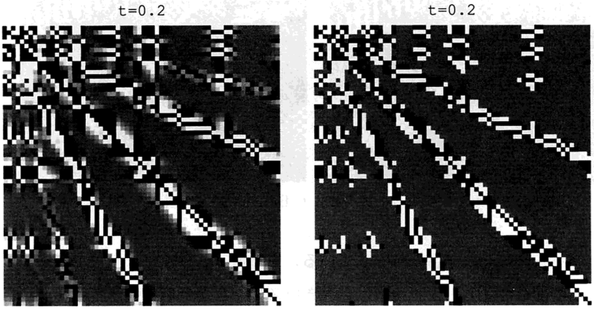


図 **14.6**　$|U|$ の発展行列

最後の近似は，$WU(t+\Delta t)$ と $WU(t)$ が同じ符号行列を持つと仮定している．ウェーブレット係数は時間の連続関数で時間と共にゆっくりと変化するので，この仮定が破れるのは，0 に近く従って誤差への寄与も小さい係数だけである．図 14.6 の右図にみられるように，最大の係数の 0.5% より大きいような重要な係数の符号をそのままに保ったとしても，新しい行列 $R = SWGW^{-1}S - I$ を理解することは簡単ではない．図に示されているような行列は次のようなブロック構造を持つ：

−1/−1	0/−1	1/−1	2/−1	···	5/−1
−1/0	0/0	1/0	···	···	5/0
−1/1	0/1	1/1	···	···	5/1
·	·	···	···	⋱	···
−1/5	0/5	1/5	2/5	···	5/5

各ブロック i/j はスケール i の，次の時間のスケール j への影響に対応する行列の部分を表している．スケール -1 は信号の平均であり，値は 1 である．スケール 5 は最小のスケールで 32 の成分を含んでいる．

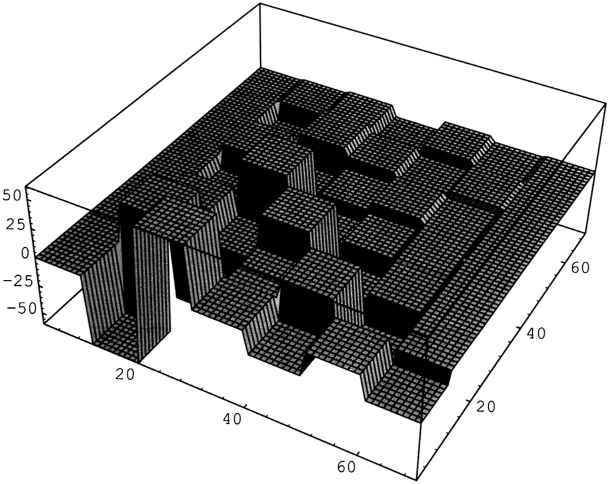


図 **14.7** 時刻 0.2 でのスケール間の相互作用の行列

より分かりやすい結果を得るために，信号の空間局在化を無視し，異なるスケールがどのように作用するかのみに注目しよう．発展作用素の各ブロックの振幅の和を考えよう．この量はあるスケール i でのすべてのウェーブレットの，もう一つのスケール j におけるウェーブレット係数の絶対値の和への寄与を表す．この量を求めるため，はじめに発展行列でのブロック (i/j) の外側のすべての係数を 0 にして，これに $|U|$ をかけて，結果のすべての係数の和をとる．この結果「スケール間のエネルギー伝達の行列」を得る．予想されるように，この量は，最大のスケールから，最小のスケールに向かってエネルギーが流れることを示している．図 14.7 はある特定の時間での行列の例である．この行列を各時間ステップで計算し，結果のアニメーションを作ることも可能である．実際これはすでに行われており，データは anonymous ftp によって利用できる [W]．

様々のスケールの寄与は，図 14.7 のヒストグラムの符号によって決定される．図の上のほうの係数は負であり，下のほうは正となっている．対角線の上側の成分が負であること，小さいスケールの成分が大きいスケールからエネルギーを引き出していることを示している．同様に対角線の下側の成分が正であることは大きいスケールの成分がエネルギーを小さいスケールの

成分に与えることを示している．このエネルギー変換行列の構造は $t = 0.00$ と $t = 0.15$ の間で急速に変化し，上で示したような状態に落ち着く．

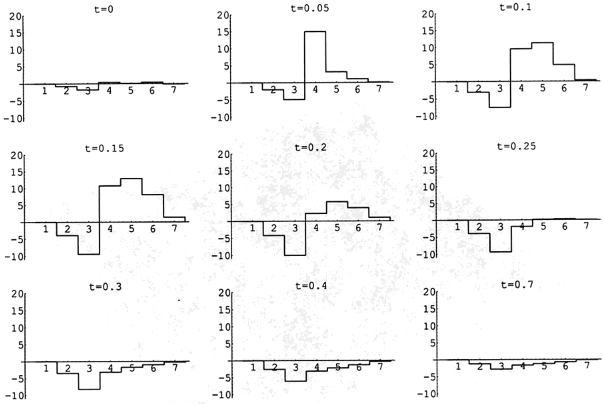


図 14.8　各スケールに含まれる「エネルギー」の時間導関数

もしここで，あるスケールでどのようにエネルギーが集中しているのかを知りたければ，ベクトル $(1, 1, \ldots, 1, 1)$ をこの行列にかけてすべての寄与の和をとればよい．結果を図 14.8 に示す．さまざまな時間で描かれた図から，各スケールでのウェーブレット係数の和の時間微分の変化を見ることができる．エネルギーが最も速く増加するスケールは時間とともに，時刻 $t = 0.00$ でのスケール 3（ここには四つの係数がある）から時刻 $t = 0.70$ でのスケール 5（ここには 16 の係数がある）に変化する．スケールの目盛は 1 ずつ変わっていることを注意しておく．エネルギーは最大のスケールからくるものの，そこでは常に減少している．さいごの三つの図は時間発展の最後のフェーズであり，信号はここで終了する．このように，Burgers の発展作用素はエネルギーを最大のスケールから最小のスケールに伝播させるかのようにみえるのである．

14.4　他の例

ここで，少し特別な例について考えよう．一つは，小さいスケールが発達する領域が移動する場合である．この例は sin 関数から定数 $1/\sqrt{2}$ を引くことによって簡単に得られる．

図 14.9 はこうして得られる信号の伝播を表している．グラフは，時刻 0.00，0.08，0.16，0.24，0.32，0.50，0.75 そして 0.99 でのものである．信号の二つの屈曲部はここで**伝播速度** と呼ばれるゆっくりと変化する速度で移動する．この移動のため，信号とウェーブレットの中心との相対的な運動が生じて，2 進的な変化が見られる．例えば，関数 $\sin(2\pi x)$ の x 方向の移動量が，

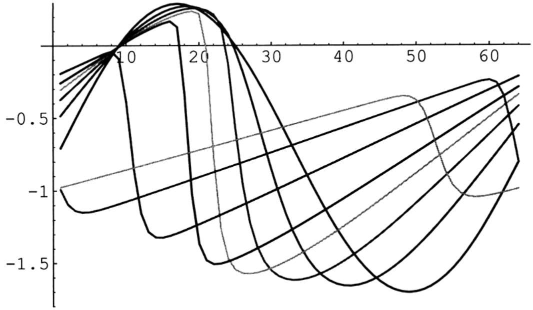


図 **14.9**　$x \in [0,1]$ のときの $\sin(2\pi x) - 0.707$ の推移

最小のウェーブレットの台の大きさより小さいときにも，区間 $[0,1]$ での周期ウェーブレット変換は各移動ステップごとに劇的に変化を示す．このような移動は，ウェーブレット係数について，Fourier 係数の場合のような位相の平行移動だけではなく，もっと複雑な振幅変化を生み出す．各ウェーブレットスケールでの振幅は，スケール長さを伝播速度で割ったものにだいたい等しい平均周期で，何回か振動する．

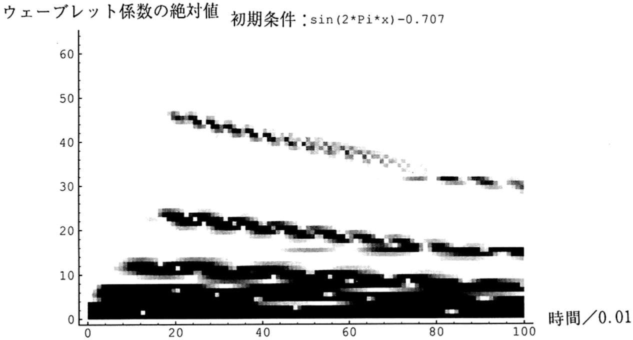


図 **14.10**　先の図におけるウェーブレット係数の絶対値の時間発展のグレイスケール表示

図 14.10 は，グレイスケール図 14.9 の信号のウェーブレット係数の時間発展をグレイスケールで示している．微分が大きくなる信号領域のまわりに小さいスケールのウェーブレットが集まり，伝播するということに注意しよう．小さい方のスケールのウェーブレットは，伝播のかなり後になって大きな振幅を持つということにも注意すべきである．図 14.4 とこの図から，解の非対称性の欠如が小さいスケールのウェーブレットの出現を抑止するわけではないことが分かる．

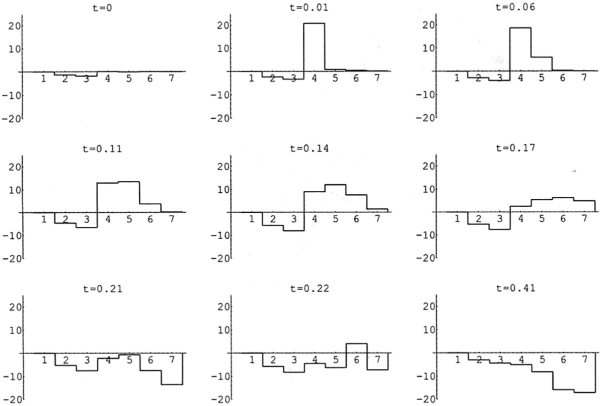


図 **14.11**　平行移動の平均をとった各スケールに含まれる「エネルギー」の時間導関数

ウェーブレットの空間的局在性は，スケールを数学的に認めうる概念として定義することにのみ使われる．ここでは，エネルギー成分のスケールのみに興味があり，それらの空間的位置に関心はない．そこで，与えられたスケールで，すべての平行移動についてウェーブレットの振幅の絶対値を平均し，そのスケールにおいて平行移動不変な測度を得る．これはすなわち，スケール i におけるエネルギーを，スケール i のすべてのウェーブレット振幅の絶対値の和のこれらの和を，1ずつのすべての平行移動についての平均として定義するということである．これらの和は単純に信号のすべて可能な平行移動で平均をとることによって計算することができる．事実，最小のスケールに対しては2だけの平行移動での平均，次に大きなスケールに対しては4だけの平行移動の平均，のように計算することは可能である．最大のスケールについてのみすべての平行移動が必要で，スケール s（$s = 1$ を最小のスケールとする）での和は平行移動の 2^s 周期の関数である．このような平均化はすべてではないがほとんどの振動を滑らかにする．そこでもまだ，ここで使った2進グリッドの最も細かい間隔よりもさらに小さいスケールでの伝播によって引き起こされるいくつかの振動が残るであろう．この振動現象の避け難い部分は，図14.11で見ることができる．図14.8と同じものを，平行移動された sin の伝播について示した．

振動があるとエネルギーを調べることが困難になる．図14.8と同様の解析を行うためには，不規則な振動にも関わらず，その振動振幅を決定しなければならない．平行移動について平均した後，残っている振動の平均周期を得る．この平均の結果は図14.11に示されている．はじめの六つの図は $\sin(2\pi x)$ に対するものと同じように解釈されるが，最後の三つの図は，この解釈が時間とともに正しいものとは言えなくなることを示している．例えば，$t = 0.20$ と $t = 0.21$

の間で，各スケール上のエネルギーの微係数に重要な変化がみられる．図 14.12 から 14.15 までの相互作用行列もまた極めて興味深い．それらは，各スケールでのエネルギーが十分大きくなるとすぐに，となりあったより小さいスケールのエネルギーを増加させることを示している．また，はじめは，いくつかの大きいスケールのエネルギーは，ほとんどすべての細かいスケールへ輸送されることも分かる．ある程度の時間がたつと，最小のスケールがより大きなスケールのエネルギーを減少させることもみることができる．

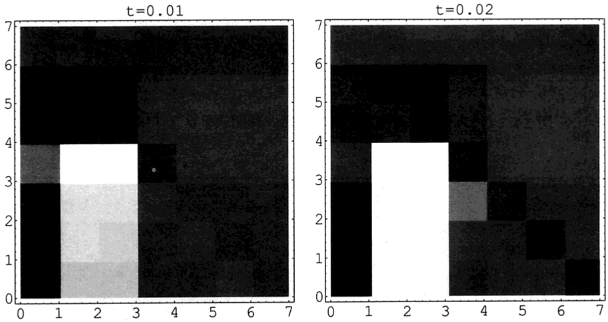


図 **14.12**　スケール間相互作用の行列：時間ステップ 1,2 のとき

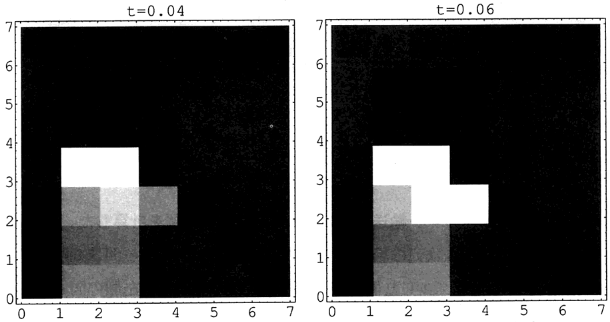


図 **14.13**　スケール間相互作用の行列：時間ステップ 4,6 のとき

ここでは，実験については触れなかったけれども，sin 関数または平行移動した sin 関数の代りに Gauss 関数でも同様のエネルギー輸送がおこることを注意しておく．

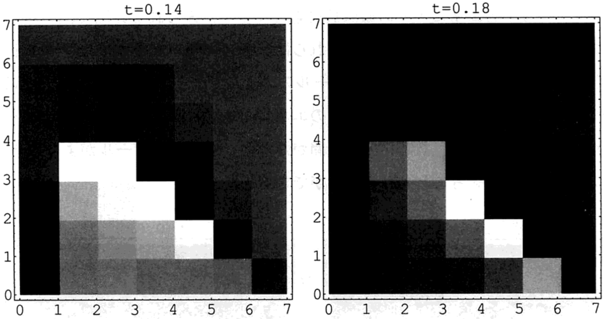


図 **14.14**　スケール間相互作用の行列：時間ステップ 14,18 のとき

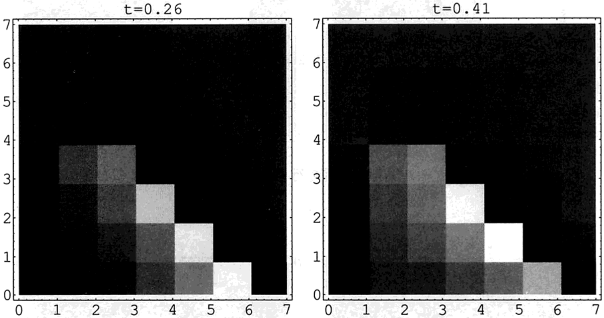


図 **14.15**　スケール間相互作用の行列：時間ステップ 26,41 のとき

14.5　2 次元の場合

2 次元の場合も同様にエネルギー輸送現象のウェーブレット分解を計算した．一つは負，もう一方は正である二つの山を，1 次元の場合のように，互いにぶつける． 64×64 の格子上で 100 時間ステップにわたってサンプルした信号が，図 14.16 から 14.19 の左側の図に示されている．

時間発展に伴う 4096×4096 の瞬間的な発展作用素は，細かく解析するにはあまりに複雑なので，六つの（等方の）の間の全エネルギーの輸送のみを扱うことにする．これによって，ずっと単純な 6×6 のエネルギー輸送行列が得られる．図 14.16,14.17,14.18 そして 14.19 の右側の図はこの行列を示している．2 次元の信号もウェーブレット振幅の絶対値の和について，1 次元の場合と同様の変化が見られる．

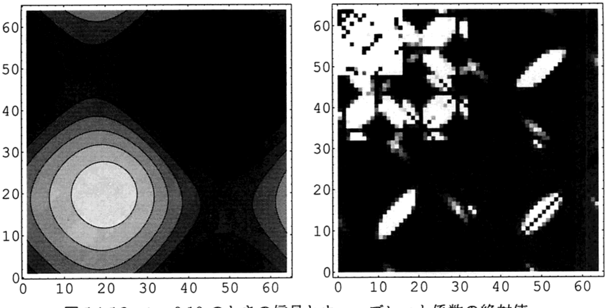


図 14.16　$t = 0.10$ のときの信号とウェーブレット係数の絶対値

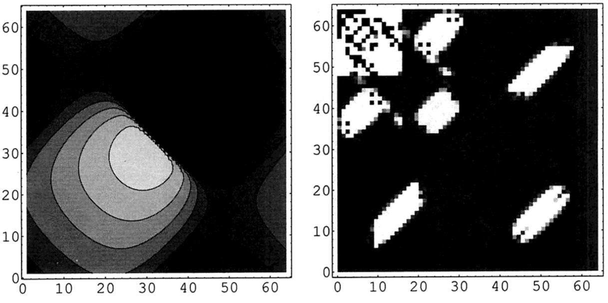


図 14.17　$t = 0.50$ のときの信号とウェーブレット係数の絶対値

14.6　今後の展開

以上の計算は，1 次元 Burgers 方程式の解について，スケール間のエネルギー輸送の概念を厳格に表現する．この方向にさらに進めば，各空間位置においてさまざまなスケール間でエネルギーがどのように輸送されるかを求めることができるであろう．このような解析では，前に伝播する解の場合に見たように，何らかの 2 進格子的な都合の悪い現象が生じるかもしれない．それゆえ，ある時刻における瞬間的な発展作用素について述べることは難しい．

スケール間相互作用行列でさえも，正確に示すことのできるのは，一つのスケールの他スケールへの寄与の平均，すなわち，与えられたスケールでのすべてのウェーブレットの和のみにすぎない．

ここではいくつかの道具を構築し，簡単な解析を行い，モデル方程式から取り出された解のスケール間のエネルギーの輸送を測るためにウェーブレットをどのように使うことができるか

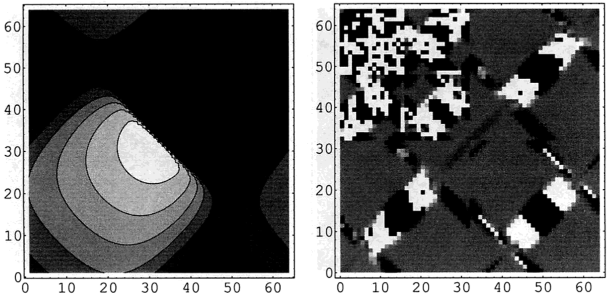


図 **14.18** $t = 0.60$ のときの信号とウェーブレット係数の絶対値

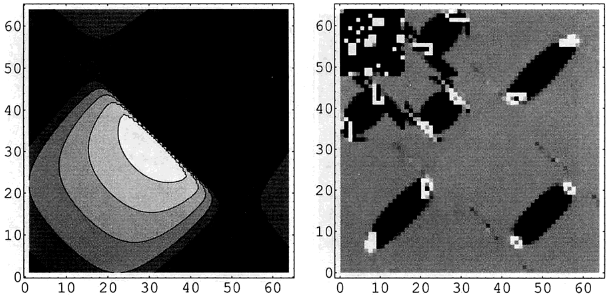


図 **14.19** $t = 1.00$ のときの信号とウェーブレット係数の絶対値

を示した．この大変単純な例でさえも明確な解析をするためには平行移動に伴う激しい変動のような障害がある．とはいえ，これら結果は，最初のものとしてはおおいに期待できるものである．また，この結果が予備的なものにすぎないことを思えば，伝播現象のウェーブレットによる記述が 2 次元の場合においても有効であるように思われる．

謝辞　すべての計算は，**Mathmatica** [Woetal] と C 関数の **Adapted Waveform Analysis** ライブラリ [A] を組み合わせて，アンロードされた NeXT ワークステーション上で行われた．

参考文献

[A] *Adapted Waveform Analysis Library, Version 2.0*. 1992. Software Documentation. Hamden, Connecticut: Fast Mathematical Algorithms and Hardware Corporation.

[B] C.K. Batchelor. 1946. *Nature*, **158**: 883. (Contribution to the Turbulence Symposium at the Sixth International Congress for Applied Mathematics, Paris, September, 1946.)

[Beetal] R. Benzi, M. Briscolini, M. Colella, and P. Santangelo. 1991. "A simple point vortex model for two- dimensional decaying turbulence," preprint, Universitá di Roma.

[BeL] R. Benzi and B. Legras. 1987. "Wave-vortex dynamics," *J. Phys. A* **20**(15): 5125–5144.

[BeyCR] G. Beylkin, R.R. Coifman, and V. Rokhlin. 1991. "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I," *Commun. Pure Appl. Math.* **44**: 141–183.

[Bu] J. M. Burgers. 1923. *Proc. R. Acad. Sci., Amsterdam*, **26**: 582.

[D] I. Daubechies. 1988. "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.* **41**: 909–996.

[Fetal] M. Farge, E. Goirand, Y. Meyer, F. Pascal, and M.V. Wickerhauser. 1992. "Improved predictability of two-dimensional turbulent flows using wavelet packet compression," *Fluid Dyn. Res.*, **10**: 229–250.

[K] A. N. Kolmogorov. 1941. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large Reynolds numbers," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**: 301–305. In Russian.

[Kr] R.H. Kraichnan. 1975. "Statistical dynamics of two- dimensional flow," *J. Fluid Mech.*, **67**(part 1): 155–175.

[LT] J. Liandrat and Ph. Tchamitchian. 1990. "Resolution of the 1-D regularized Burgers equation using a spatial wavelet approximation—algorithm and numerical results," *ICASE report.* (Was also published with V. Perrier in a shorter form in [Retal].)

[Retal] M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, eds. 1992. *Wavelets and Their Applications*, Boston: Jones and Bartlett.

[W] Washington University in St. Louis. 1991–present. wuarchive. InterNet Anonymous File Transfer (ftp) Site wuarchive.wustl.edu [128.252.135.4].

[Woetal] T.W. Gray, D. Stein, and S. Wolfram. 1992. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer* (Version 2.0 for NeXT computers), Champaign, IL: Wolfram Research Incorporated.

[Z] N.J. Zabusky. 1984. "Contour dynamics: a method for inviscid and nearly inviscid two-dimensional flows," in *Proceedings of the IUTAM Symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena*, T. Tatsumi, ed., Amsterdam: North-Holland, pp. 251–257.

第 15 章 Cauchy 特異積分作用素と Clifford ウェーブレット

Lars Andersson, Björn Jawerth, and Marius Mitrea

【概要】 Lipschitz 曲面上での Cauchy 特異積分作用素の L^2 有界性に関して，実関数論的な基礎的で完結した証明を実施する．第 15 章は Clifford 代数値ウェーブレット が Lipschitz 曲面の幾何に適用される際の役割について，これまでにない新しい考え方を提唱したものである．

15.1 はじめに

Cauchy 特異積分作用素（略して CSIO）は調和解析や偏微分方程式の解析において広く使用されており，重要な役割を果たしている．例えば Lipschitz 曲面 に対応する特異二重層ポテンシャル の有界性は，その曲面上での CSIO の有界性を示すことによって証明されるのである．実際のところ，回転法を使用すると一般の Lipschitz 曲面上における有界性に関する問題は Lipschitz 曲線上での特別な問題に置き換えられる．Lipschitz 曲線上での CSIO の有界性については，Calderon[C] が Lipschitz 定数が小さい場合，Coifman-McIntosh-Meyer [CoMMe] が一般的な場合についてそれぞれ示している．[CoJS] では，Coifman-Jones-Semme が複素関数論及びウェーブレットを使用した 2 種類の基本的な証明が示されている．

回転法を使用することなしに，CSIO を直接 Lipschitz 曲面上に適用しようとするのは自然な発想である．この作用素の連続性に関して最初に論じたのは Iftimie である（[LMS] を参照のこと）． Iftimie [I] は 1965 年に Lyapunov 曲面上の CSIO は Hölder 連続関数有界作用素であることを証明した． Coifman, Murray および McIntosh [Mu]，[M] は CSIO の L^2有界性が Lipschitz 曲面で成立することを Clifford 代数 を使用して直接証明している．最新の動向として， Li, McIntosh および Semmes [LMS] は [CoJS] に示された複素関数論的な手法に従って，この結果を更に拡張し新しい証明を与えている．
本論文では [CoJS]（及び [T]）に提唱されている第二の手法によって，CSIO の Lipschitz 曲面 Σ上での L^2有界性を証明する．基本的な考え方は以下の通りである：(1) Clifford 代数ウェーヴレットの集合を Lipschitz 曲面Σに $L^2(\mathbb{R}^n)$ の標準の内積と Haar 系 を適用することにより求め

る．(2) 有界性を Littlewood-Paley の理論 と既知の原理を使用して Schur の補題 から導く

本章の最後の部分では開発された手法を使用して Clifford の $T(b)$ 定理を証明する方法について簡単に示されている（[DJoS] および [MMe] を見よ）．

15.2 Clifford 代数の基礎

本節では第 15 章で必要となる Clifford 代数の一般的な理論を説明する（更に詳細な説明については文献 [BDeSo]，[GMu] 等を参照されたい）

まず $\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）における Clifford 代数を定義する．n を自然数，$e_0, e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$（または $\mathbb{C}^{n+1}$）における標準基底とする．

定義 15.1 2^n-次元 Clifford 代数 $\mathbb{R}_{(n)}$（または $\mathbb{C}_{(n)}$）は $\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）上に $e_0, e_1, \ldots, e_n$ によって自由生成された次の関係式を満たす代数である．

1. e_0は乗法の単位元である．
2. $1 \le j, k \le n,$ に対して $e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{jk} e_0 = \begin{cases} 0, j \neq k \\ -2e_0, j = k \end{cases}$

特に，Clifford 代数 $\mathbb{R}_{(0)}$, $\mathbb{R}_{(1)}$, $\mathbb{R}_{(2)}$ はそれぞれ実数，複素数，四元数 となる．

$\mathbb{R}^{n+1}$ は $\mathbb{R}_{(n)}$ (または $\mathbb{C}_{(n)}$) に

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=0}^{n} x_j e_j \in \mathbb{R}_{(n)} \subset \mathbb{C}_{(n)}$$

によって埋め込まれる．この埋め込みによる $\mathbb{R}^{n+1}$ の写像は $\mathbb{R}_{(n)}$ (または $\mathbb{C}_{(n)}$) における「Clifford 数の集合」と呼ばれる．

$A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $A = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$, に対して $e_A := e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$とおく．また $e_\emptyset = e_0 = 1$ と表記する．明らかに $\{e_A\}_{A \subseteq \{1,2,\ldots,n\}}$は $\mathbb{R}_{(n)}$ と $\mathbb{C}_{(n)}$における基底であり，x の各要素はそれぞれに一意に $x = \sum_A x_A e_A$によって表される．今後しばしば $x_\emptyset e_\emptyset$ を $x_0 e_0$ または x_0と表記する．また x_0を x のスカラー成分と呼ぶ．すなわち，$x_0 =: \mathbb{R}x$ と書く．二つの要素 $x = \sum_A x_A e_A$ と $y = \sum_B y_B e_B$の積は $xy = \sum_{A,B} x_A y_B e_A e_B$である．

上記の $\mathbb{R}_{(n)}$ (または $\mathbb{C}_{(n)}$) における基底を正規直交としたい場合は，内積

$$\langle x,y\rangle := \sum_A x_A \overline{y_A}$$

とユークリッドノルム $|x| := (\sum_A |x_A|^2)^{1/2}$を導入する．例えば全ての $x,y \in \mathbb{R}_{(n)}$に対して $|xy| \le 2^{n-1}|x||y|$ なので，このノルムによって $\mathbb{R}_{(n)}$ と $\mathbb{C}_{(n)}$はノルム付き代数となる．

共役写像: は　下式によって定義される $\mathbb{R}_{(n)}$ (or $\mathbb{C}_{(n)}$) の対合写像である．

$$\bar{x} := \sum_A \overline{x_A}\,\overline{e_a}$$

ここで，$\overline{e_a} := \pm e_A$ であり，符号は $e_A\overline{e_a} = \overline{e_a}e_A = 1$ とすることにより一意に決定される．より正確には $A \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ に対して $|A|$ をその濃度とおくと$\overline{e_a} = (-1)^{|A|(|A|+1)/2}e_A$である．

$\overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x}$ かつ $(x,y) = \mathbb{R}\bar{y}x$ が成立する．また $x \in \mathbb{R}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}_{(n)}$に対し $x\bar{x} = |x|^2$であり，結果として$\mathbb{R}^{n+1}$における任意の 0 でない成分 x は $x^{-1} = |x|^{-2}\bar{x}$で与えられる乗法の逆元を持つ（一般にこれは $\mathbb{C}^{n+1}$では成立しない．例えば $(e_0 + ie_1)(e_0 - ie_1) = 0$ となる）．$\mathbb{R}^n$における 0 でない Clifford 数のみによって構成される乗法群は **Clifford** 群と呼ばれる．x が Clifford 群の要素であり， yが $\mathbb{C}_{(n)}$に含まれる場合，$|xy| = |x|\,|y|$ が成立する．

次に$\mathbb{R}^{n+1}$ における開集合Ωと $\mathbb{C}^1_{(n)}$級の Clifford 値関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}_{(n)}$ (or $\mathbb{C}_{(n)}$), $f = \sum_A f_A e_A$ を考える．一階微分作用素を以下のように定義する．

$$D := \sum_{j=0}^{n} \partial_j e_j$$

これの f に対する左側からの作用は，

$$Df := \sum_{j,A} \partial_j f_A e_j e_A$$

とし，右側からの作用は，

$$fD := \sum_{j,A} \partial_j f_A e_A e_j$$

と定める．

$Df = 0$（あるいは $fD = 0$）の場合 fは左方単成的 **(left monogenic)**（あるいは右方単成的

(right monogenic) ）であるという．$n=2$ の場合 $\mathbb{R}_{(1)} \equiv \mathbb{C}$ となり，Dは Cauchy–Riemann 作用素$\partial_0 + i\partial_1$となる．換言すれば fは fが正則である場合，また正則である場合のみ左方単成的（あるいは右方単成的）となる．

続いて Cauchy の定理 ， 及び Cauchy の積分公式 の Clifford 代数の場合への自然な拡張について考察する．$\mathbb{R}^{n+1}$における Lipschitz 領域Ωを考える（すなわちこの領域の境界は適当な座標の回転によって局所的に Lipschitz 関数のグラフで表される）．$n(X)$ を外向きの単位法線とする，これは，面素 dSに関して $X \in \partial\Omega$に対してほとんど至るところで定義される．

命題 15.2 上記の表記法により，Ωを有界 Lipschitz 領域とすると $\overline{\Omega}$ の近傍の全ての左方単成的関数 fは以下のような再生性を持つ：

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{\partial\Omega}\frac{\overline{Y-X}}{|Y-X|^{n+1}}n(Y)f(Y)dS(Y) = \begin{cases} f(X), X \in \Omega \\ 0, X \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

更に以下に示すような消滅性を持つ：*

$$\int_{\partial\Omega} n(X)f(X)\,dS(X) = 0$$

証明 なめらかな領域 Ω の場合の議論は古典的である（例えば [BDeSo] を見よ）．一般の場合は [N] または [V] に示される議論から従う． ▮

15.3 高次 Cauchy 積分

Σを Lipschitz 関数 $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のグラフとする．$\mathbb{R}^{n+1}$を 2^n 次元 Clifford 代数 $\mathbb{R}_{(n)}$に (あるいは $\mathbb{C}_{(n)}$にも) に標準的な方法で埋め込む．特に$\Sigma \ni X = (g(x), x) \mapsto g(x)e_0 + \sum_i x_i e_i \in \mathbb{R}_{(n)}$ なる同一視によって，

$$\Sigma := \{X = z(x); x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$$

となる．ここで $z(x) := (g(x), x)$, $x \in \mathbb{R}^n$は gのグラフマップである．$z:\mathbb{R}^n \to \Sigma$は双 Lipschitz 同相写像である．

*被積分関数は複素 Clifford 代数 $\mathbb{C}_{(n)}$における乗法として解釈されなければならない．さらに右方単成的な関数に対する定理も存在する．

外向きの単位法線 $n(X) := N(z^{-1}(X))/|N(z^{-1}(X))|$ （$N(x) := (1, -\nabla g(x))$）はほとんど全ての $X \in \Sigma$に対して定義可能な Clifford 数である．

Σ に対応する高次 Cauchy 特異積分作用素（CSIO）は主値として以下のように定義される．

$$\mathbb{C}_{(n)} f(X) := \text{p.v.} \frac{2}{\sigma_n} \int_{\Sigma} f(Y) n(Y) \frac{\overline{Y - X}}{|Y - X|^{n+1}} \, dS(Y), \quad X \in \Sigma$$

ここで fはΣ上での Clifford 代数値関数である．またσ_n は $\mathbb{R}^{n+1}$における単位球の表面積，dSはΣにおける標準面素である．この被積分関数は複素 Clifford 代数 $\mathbb{C}_{(n)}$における乗法と解釈することができる．

さらに局所座標系において作用素は以下のようになる：

$$\mathbb{C}_{(n)} f(x) := \text{p.v.} \frac{2}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) N(y) \frac{\overline{z(y) - z(x)}}{|z(y) - z(x)|^{n+1}} \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ここで f は $\mathbb{R}^n$上における $\mathbb{C}_{(n)}$値関数である．

本節の目的は $\mathbb{C}_{(n)}$が $L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)} := L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}_{(n)}$ （すなわち $L^2(\mathbb{R}^n)$ の Clifford 代数版）上で有界であることを示すことにある．

Σ 上の複素関数 f に対して $\mathbb{R}\mathbb{C}_{(n)} f = \mathcal{D} f$が存在する．ここで，

$$\mathcal{D} f(X) := \text{p.v.} \frac{2}{\sigma_n} \int_{\Sigma} \frac{\langle n(Y), Y - X \rangle}{|Y - X|^{n+1}} f(Y) \, dS(Y), \quad X \in \Sigma$$

は Σ上における（特異）二重層ポテンシャル作用素である．　従って $\mathbb{C}_{(n)}$の有界性により $\mathcal{D}$も同様に有界であると言える．このことは例えば Lipschitz 領域上における Dirichlet 境界値問題 を層ポテンシャル法によって解く場合に重要である．これについては余談になるが理由を説明する．

$\mathbb{R}^{n+1}$上に非有界 Lipschitz 領域 Ωに対し，Ωにおける　$n+1$ 次元座標系に対するラプラシアン Δ）に関する以下の Dirichlet 境界値問題を考える．

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega\text{上} \\ u^* \in L^2(\partial\Omega, dS) \\ u|_{\partial\Omega} = f \in L^2(\partial\Omega, dS) \end{cases}$$

ここで*は通常の非接最大作用素である（例えば [V] を見よ）．層ポテンシャル法の背後にある基本的な考え方は境界上で定義された特定の関数の層ポテンシャルとして表される解を探す手法である．より正確に言うと，目的は解が次式によって得られることを示すことである．

$$u(X) := \frac{2}{\sigma_n}\int_\Sigma \frac{\langle X - Yn(Y)}{|X-Y|^{n+1}}[(I+\mathcal{D})^{-1}f](Y)dS(Y), \quad X \in \Omega$$

本手法を使用するには二つの事実が必要である．すなわち，$\mathcal{D}$ は L^2上で有界であり，$I+\mathcal{D}$ は可逆であるということである．第 15 章では前者について簡単な考察を行い，後者に関しては Verchota [V] によっている．Lipschitz 領域における Dirichlet 問題の解法として，二重層ポテンシャル法は唯一の手法ではない．歴史的に見ると最初に適用された手法は別のものである．Dirichlet 問題の可解性は Dahlgerg）が，1977 年に Green 関数に対する非常に正確な評価を使用するまで長い間議論されてきた．続いて，Dahlgerg，Kenig，Fabes，Jerison，Verochta 等によって急速にさまざまな理論が発展した．歴史的な経緯に関しては [V] を参照されたい．

ここで本題にもどって，続いて表記法について説明する．正値関数 $F(s)$ と $G(s)$, $s \in S$, に関して，n 及び $\|\nabla g\|_\infty$のみに依存する正の定数 $c > 0$ が存在して，全ての $s \in S$に関して $F(s) \leq cG(s)$ を満たす場合 $F \ll G$ とする． 同様に $F \sim G$ は $F \ll G$ かつ $G \ll F$である場合である．

$\boldsymbol{F}$ を $\mathbb{R}^n$における全ての二進キューブの集合とし，$k \subset n\mathbb{Z}$ 及び $v \in \mathbb{Z}^n$ に関して

$$Q = Q_{k,v} = \{x \in \mathbb{R}^n \ 2^{-k}v_i \leq x_i \leq 2^{-k}(v_i+1), \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

とする．それぞれの二進キューブ Q は 2^nの子供を持つ：

$$\{Q^j\}_{j=1}^{2^n} := \{Q' \in \boldsymbol{F} \ l(Q') = \frac{1}{2}l(Q), \ Q' \subset Q\}$$

ここで $l(Q)$ は Q の辺の長さである．また $\boldsymbol{F}_k := \{Q \in \boldsymbol{F};\ l(Q) = 2^{-k}\}$ とする．

続いて $|Q|$ を Q の体積として $m(Q) := |Q|^{-1}\int_Q N(x)\,dx$ とする．$N(x)$ は $\mathbb{R}N(x) = 1$ かつ $|N(x)| \sim 1$ であるような Clifford 数であるため，$m(Q)$ も同様に $\mathbb{R}m(Q) = 1$ かつ $|m(Q)| \sim 1$ であるような Clifford 数となる．$\langle\cdot,\cdot\rangle_\Sigma$ を $\mathbb{C}_{(n)}$値関数 f_1 と f_2に関して定義される双一次形式とする：

$$\langle f_1, f_2\rangle_\Sigma := \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)N(x)f_2(x)\,dx \tag{15.1}$$

15.4　自乗関数の推定

まず最初に変形 Haar 系 を構築する．これは　(15.1) のような形式で表現される（双）直交関数の集合のような挙動を示す（この構成は [Mi1] のような一般的な手法によっても可能であるがここでは独自の手法によって実施する）．　$Q \in \boldsymbol{F}$ と $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ に対して $\mathbb{C}_{(n)}$ 値関数 $\{\beta^L_{Q,i}\}_{Q,i}$および $\{\beta^R_{Q,i}\}_{Q,i}$が　次式によって定義される．

$$\beta^L_{Q,i} := 2^{n/2}|Q|^{-1/2} M(Q,i) \left\{ i^{-1} m \left(\bigcup_{\nu=1}^{i} Q^\nu \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{i} \chi_{Q^\nu} \right) - m(Q^{i+1})^{-1} \chi_{Q^{i+1}} \right\}$$

かつ

$$\beta^R_{Q,i} := 2^{n/2}|Q|^{-1/2} \left\{ i^{-1} m \left(\bigcup_{\nu=1}^{i} Q^\nu \right)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{i} \chi_{Q^\nu} \right) - m(Q^{i+1})^{-1} \chi_{Q^{i+1}} \right\} M(Q,i)$$

ここで $M(Q,i) := (\{i^{-1} m(\bigcup_{\nu=1}^{i} Q^\nu)^{-1} + m(Q^{i+1})^{-1}\}^{-1})^{1/2}$．平方根の存在は $N(x)$ の積分平均及び以下の補題の性質によって導かれる．

補題 15.3　任意の Clifford 数 λ に対して $\mu^2 = \lambda$となるような Clifford 数 μ が存在する．

より正確な証明については [Mi1] を参照されたい．今の場合は単にμ が Clifford 数であればその自乗 μ^2 もまた Clifford 数であることをを見れば簡単にわかる．

関数 $\{\beta^L_{Q,i}\}_{Q,i}$ 及び $\{\beta^R_{Q,i}\}_{Q,j}$ の特性は以下の命題に示される．

命題 15.4　2 種類の $\mathbb{C}_{(n)}$値関数の族 $\{\beta^L_{Q,i}\}_{Q,i}$, $\{\beta^R_{Q,i}\}_{Q,j}$, $Q \in \boldsymbol{F}$ 及び $i, j = 1, \ldots, 2^n - 1$ は以下の項目を満たす：

1. $\operatorname{supp} \beta^L_{Q,i}$, $\operatorname{supp} \beta^R_{Q,i} \subseteq Q$ 及び $\beta^L_{Q,i}$, $\beta^R_{Q,i}$ は Q のそれぞれの「子供」キューブ上の定数である．
2. $|\beta^L_{Q,i}|$, $|\beta^R_{Q,i}| \ll |Q|^{-1/2}$.
3. $\langle \beta^L_{Q,i}, 1 \rangle = 0$ and $\langle 1, \beta^R_{Q,i} \rangle = 0$.
4. $\langle \beta^L_{Q,i}, \beta^R_{Q',j} \rangle = \delta_{QQ'} \delta_{ij} e_0$.
5. $\| \sum_{i=1}^{2^n-1} \alpha_i \beta^L_{Q,i} \|_2^2 \sim \sum_{i=1}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 \sim \| \sum_{j=1}^{2^n-1} \beta^R_{Q,i} \alpha_j \|_2^2$, $\alpha_i \in \mathbb{C}_{(n)}$, $1 \le i \le 2^n - 1$.
6. $f = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i \chi_{Q^i}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}_{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$と仮定すると，$\langle f, 1 \rangle = 0$ の場合は

$$f = \sum_{i=1}^{2^n-1} \langle f, \beta^R_{Q,i} \rangle_\Sigma \beta^L_{Q,i}$$

そして $\langle 1, f\rangle = 0$ の場合は

$$f = \sum_{j=1}^{2^n-1} \beta^R_{Q,i}\langle \beta^L_{Q,j}, f\rangle_\Sigma$$

となる．

証明 (1)-(3) の性質はβ_sの定義によって直接導かれる．もし $\beta^L_{Q,i}$ または $\beta^R_{Q,i}$ が，同じ添字の組であるならば一方は他方の台上の定数である．従って，(4) は (3) における消失モーメントの性質に従う．

(5) に関しては，$\|\beta^L_{Q,i}\|_2, \|\beta^R_{Q,i}\|_2 \ll 1$ であることから，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\sum_j |\alpha_j| &= \sum_j \left|\left\langle \sum_i \alpha_i\beta^L, \beta^R_{(Q,i)}\right\rangle_\Sigma\right| \ll \left\|\sum_i \alpha_i\beta^L\right\|_2 \sum_j \|\beta^R_{(Q,i)}\|_2\\ &\ll \left\|\sum_i \alpha_i\beta^L\right\|_2 \ll \sum_i |\alpha_i|\|\beta^L\|_2 \ll \sum_i |\alpha_i|\end{aligned}$$

α_iは有限個しか存在しないため，ℓ^2和 は ℓ^1和 と比較可能である．従って (5) が証明される．

β^Lの陽的な表現を用いると，χ_{Q^2}は，左 Clifford 加群としての特徴を持った $\mathbb{R}^n$上で定義される $\mathbb{C}_{(n)}$値関数の集合においてχ_{Q^1}と$\beta^L_{Q,1}$ によって張られることがわかる．これより帰納的に，いかなる特性関数 χ_{Q^i}もχ_{Q^1}と $\beta^L_{Q,1}, \ldots, \beta^L_{Q,2^n-1}$によって張られることがわかる．従って $\langle f, 1\rangle_\Sigma = 0$ であれば　より $\lambda_1 = 0$となる．従って，(3) より次式が得られる．

$$\gamma_j = \langle f, \beta^R_{Q,1}\rangle_\Sigma, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

以上で証明は終わりである． ∎

「条件付き期待値」作用素$\boldsymbol{E}^L_k$ 及び$\boldsymbol{E}^R_k$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\boldsymbol{E}^L_k f(x) := |Q|^{-1}\left(\int_Q f(y)N(y)\,dy\right) m(Q)^{-1}, x \in Q \in \boldsymbol{F}_k$$

かつ

$$\boldsymbol{E}^R_k f(x) := |Q|^{-1} m(Q)^{-1}\left(\int_Q N(y)f(y)\,dy\right), x \in Q \in \boldsymbol{F}_k$$

通常は，もし $f \in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$であれば

$$k \to +\infty \text{ のとき} \boldsymbol{E}_k^L f \to f, \text{ そして } k \to -\infty \text{ のとき} \boldsymbol{E}_k^L f \to 0k \to -\infty$$

である． $\boldsymbol{E}_k^R$ に関しても同様の結果が成立する．更に

$$\boldsymbol{\Delta}_k^L f := \sum_{Q \in F_k} \sum_{i=1}^{2^n-1} \langle f, \beta_{Q,i}^R \rangle_\Sigma \beta_{Q,i}^L$$

かつ

$$\boldsymbol{\Delta}_k^R f := \sum_{Q \in F_k} \sum_{i=1}^{2^n-1} \beta_{Q,i}^R \langle \beta_{Q,i}^R, f \rangle_\Sigma$$

とすると，作用素$\boldsymbol{E}_k^L$ と $\boldsymbol{E}_k^R$ の関係は以下の通りである：

命題 15.5　$\boldsymbol{\Delta}_k^L = E_{k+1}^L - \boldsymbol{E}_k^L$ かつ $\boldsymbol{\Delta}_k^R = E_{k+1}^R - \boldsymbol{E}_k^R$ である．

証明　特定の二進キューブ $Q \in \boldsymbol{F}_k$ に注目すると，$\langle E_{k+1}^L f - \boldsymbol{E}_k^L f, 1 \rangle_\Sigma = 0$ が容易に得られる．かつ $E_{k+1}^L f - \boldsymbol{E}_k^L f$ は Q のそれぞれの部分二進キューブ上での定数であり，$\boldsymbol{E}_k^L f$ は二進キューブ Q 上で定数である．従って命題 1 5.4(6)(3) により $\langle E_{k+1}^L f, \beta_{Q,i}^R \rangle_\Sigma = \langle f, \beta_{Q,i}^R \rangle_\Sigma$であることを証明する必要がある．

$f_{Q^i} := |Q^i|^{-1} \int_{Q^i} fN$とおいて $\beta_{(Q,i)}^R = \sum_i \lambda_i^j \chi_{Q^i}$ かつ $E_{k+1}^L f = \sum_i f_{Q^i} m(Q^i)^{-1} \chi_{Q^i}$であれば，

$$\langle E_{k+1}^L f, \beta_{(Q,i)}^R \rangle = \sum_i |Q^i| f_{Q^i} \lambda_i^j = \sum_i \int_{Q^i} fN \lambda_i^j \, dx = \langle f, \beta_{(Q,i)}^R \rangle_\Sigma$$ ∎

となる。

ただちに以下に示す系が得られる．

系 15.6　それぞれの $f \in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$に対して次式が成立する：

$$f = \sum_k \boldsymbol{\Delta}_k^L f = \sum_{Q \in F} \sum_{i=1}^{2^n-1} \langle f, \beta_{Q,i}^R \rangle_\Sigma \beta_{(Q,i)}^L$$

かつ

$$f = \sum_k \boldsymbol{\Delta}_k^R f = \sum_{Q \in F} \sum_{i=1}^{2^n-1} \beta_{Q,i}^R \langle f, \beta_{(Q,i)}^L \rangle_\Sigma$$

次に示す結果はβが $L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$上の正規直交基底と類似していることを示す.

定理 15.7 もし $f \in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$であれば

$$\|f\|_2^2 \sim \sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1} |\langle f, \beta^R_{(Q,i)}\rangle|^2 \sim \sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1} |\langle \beta^L_{(Q,i)}, f\rangle_\Sigma|^2$$

である.

これを証明する前に，まず$\Sigma \equiv \mathbb{R}^n$すなわち $g(x) = 0$ の場合を考慮し，結果として $N(x) = (1, 0, \ldots, 0)$ の場合を考慮する．まず，

$$h^i_Q := 2^{n/2}|Q|^{-1/2}\left(\frac{i}{i+1}\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{i}\sum_{\nu=1}^{i}\chi_{Q^\nu} - \chi_{Q^{i+1}}\right\}, \quad i = 1, \ldots, 2^n - 1,\ Q \in \boldsymbol{F}$$

とする． 各点 $\{h^i_Q\}_{Q,i}$ では標準内積をとることにより $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底であることを容易に検証できる．今回のような特別の場合， $\boldsymbol{\Delta}^L_k$ (または$\boldsymbol{\Delta}^R_k$) および$\boldsymbol{E}^L_k$ (または$\boldsymbol{E}^R_k$) はそれぞれ Δ_k 及び $\boldsymbol{E}_k$によって表示される．一般には $\Delta_k = \boldsymbol{E}_{k+1} - \boldsymbol{E}_k$である.

$$\Delta_k f = \sum_{Q\in F_k}\sum_{i=1}^{2^n-1}(f, h^i_Q)h^i_Q$$

より

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_k f|^2\,dx = \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)} \tag{15.2}$$

が得られる.

定理 15.7 の証明 $\boldsymbol{E}^L_k f = \boldsymbol{E}_k(fN)\boldsymbol{E}_k(N)^{-1}$に注意する．$|\boldsymbol{E}_k(N)| \sim 1$ であるため，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Delta}^L_k f| = |E^L_{k+1}f - \boldsymbol{E}^L_k f| &= |\boldsymbol{E}_{k+1}(fN)\boldsymbol{E}_{k+1}(N)^{-1} - \boldsymbol{E}_k(fN)\boldsymbol{E}_k(N)^{-1}| \\ &\leq |\boldsymbol{E}_{k+1}(fN)\boldsymbol{E}_{k+1}(N)^{-1} - \boldsymbol{E}_k(fN)\boldsymbol{E}_{k+1}(N)^{-1}| \\ &+ |\boldsymbol{E}_k(fN)\boldsymbol{E}_{k+1}(N)^{-1} - \boldsymbol{E}_k(fN)\boldsymbol{E}_k(N)^{-1}| \qquad (15.3) \\ &\ll |\Delta_k(fN)| + |\boldsymbol{E}_k(fN)||\boldsymbol{E}_{k+1}(N)^{-1} - \boldsymbol{E}_k(N)^{-1}| \\ &\ll |\Delta_k(fN)| + |\boldsymbol{E}_k(fN)||\Delta_k(N)| \end{aligned}$$

である．定義により，

$$\boldsymbol{\Delta}_k^L f = \sum_{Q\in F_k} \sum_{i=1}^{2^n-1} \langle f, \beta_{(Q,i)}^R \rangle_\Sigma \beta_{(Q,i)}^L$$

である．固定された大きさの二進キューブは互いに素であり $\operatorname{supp} \beta_{(Q,i)}^L \subset Q$ を満たすことにより，命題 15.4 の (5) から

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\Delta}_k^L f(x)|^2\, dx = \sum_{Q\in F_k} \| \sum_{i=1}^{2^n-1} \langle f, \beta_{(Q,i)}^R \rangle_\Sigma \beta_{(Q,i)}^L \|_2^2 \sim \sum_{Q\in F_k} \sum_{i=1}^{2^n-1} |\langle f, \beta_{(Q,i)}^R \rangle_\Sigma|^2 \tag{15.4}$$

を得る．

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\Delta}_k^L f|^2\, dx \ll \|f\|_2^2$$

であることを証明するためには式（15.2）（15.3）及び（15.4）により以下に示す（15.5）が証明されれば充分である．

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{E}_k(fN)|^2 |\Delta_k(N)|^2\, dx \ll \|f\|_2^2 \tag{15.5}$$

この証明は一般的なものである．ここでは Christ[Ch] の手法に若干の変更を加えたものを使用する．まず以下のように定義する．

定義 15.8　$\mathbb{R}^n$ 上の正値可測な関数列 $\omega = \{\omega_k\}_k$ が次式を満たすとき Carleson 列と呼ぶ．

$$\|\omega\|_C := \sup_{Q\in F} |Q|^{-1} \int_Q \left\{ \sum_{\{k\in\mathbb{Z};2^{-k}\le l(Q)\}} \omega_k(x)\, dx \right\} < +\infty$$

定理 15.7 を証明するためには，以下のよく知られた二つの補題が必要である．

補題 15.9　それぞれの $b \in BMO(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ に対して $\{|\Delta_k(b)|^2\}_k$ はノルムが $\|b\|_{\mathrm{BMO}}^2$ よりかなり小さい Carleson 列である．

補題 15.10　$\omega = \{\omega_k\}_k$ が Carleson 列であるとすると，$p \in (1, +\infty)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_k |\boldsymbol{E}_k f(x)|^p \omega_k(x)\, dx \ll \|\omega\|_C \|f\|_p^p$$

が成立する．とりあえずこれらの補題が成立すると仮定し，$N \in L^\infty(\mathbb{R}^n)_{(n)} \subset BMO(\mathbb{R}^n)_{(n)}$

であることを使用すると（15.5）の不等式が自動的に成立する．従って，

$$\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle f,\beta^R_{(Q,i)}\rangle_\Sigma|^2 \ll \|f\|_2^2 \tag{15.6}$$

が成立する．また同様にして

$$\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle \beta^L_{(Q,i)},f\rangle_\Sigma|^2 \ll \|f\|_2^2 \tag{15.7}$$

が得られる．

(15.6) (15.7) が成立するとすると全く逆の不等式が成立することも証明される．$f\in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$，$\|f\|_2=1$ とする．もし $\{f_A\}_A$が $\mathbb{C}_{(n)}$ における基底 $\{e_A\}_{A\subseteq\{1,\dots,n\}}$ に関する fの成分であるとするとそれぞれの $A\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ に対して $g_A:=N^{-1}\overline{f_A}e_A$ とすると，それぞれの A に対して $\|g_A\|_2\ll 1$ を得る．更に

$$\begin{aligned}
1=\|f\|_2^2 &= \sum_A\int|f_A|^2=\sum_A|\mathbb{R}\langle f,N^{-1}\overline{f_A}e_A\rangle_\Sigma|\ll\sum_A|\langle f,g_A\rangle_\Sigma| \\
&\ll \sum_A\Big|\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}\langle f,\beta^R_{(Q,i)}\rangle_\Sigma\langle\beta^L_{(Q,i)},g_A\rangle_\Sigma\Big| \\
&\ll \left(\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle f,\beta^R_{(Q,i)}\rangle_\Sigma|^2\right)^{1/2}\sum_A\left(\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle\beta^L_{(Q,i)},g_A\rangle_\Sigma|^2\right)^{1/2} \\
&\ll \left(\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle f,\beta^R_{Q,i}\rangle_\Sigma|^2\right)^{1/2}\left(\sum_A\|g_A\|_2\right) \\
&\ll \left(\sum_{Q\in F}\sum_{i=1}^{2^n-1}|\langle f,\beta^R_{Q,i}\rangle_\Sigma|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

である．残りの不等式の証明も同様であり定理 15.7 が証明された． ∎

読者の便宜のため，補題 15.9 及び 15.10 の証明を以下に示す．

補題 15.9 の証明 任意の二進キューブ Q に対して

$$|Q|^{-1}\int_Q\left(\sum_{\{k\in\mathbb{Z};2^{-k}\le l(Q)\}}|\Delta_k(b)|^2\,dx\right)$$

を評価する必要がある．Δ_k によって定数はゼロになるので，b_Q（b の Q 上での積分平均）はゼロになると仮定してよい．$b \in BMO(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ を $b = b_0 + b_\infty$ 但し $b_0 := \chi_Q b$，$b_\infty := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus Q} b$ のように記するものとする．すると，式（15.2）と John-Nirenberg の不等式 により，

$$|Q|^{-1} \int_Q \sum_{2^{-k} \leq l(Q)} |\Delta_k(b_0)(x)|^2 \, dx \leq |Q|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Delta_k(b_0)(x)|^2 \, dx$$
$$= \quad |Q|^{-1} \|b_0\|_2^2 = |Q|^{-1} \int_Q |b|^2 \, dx = |Q|^{-1} \int_Q |b - b_Q|^2 \, dx \ll \|b\|_{\mathrm{BMO}}^2$$

が成り立つ． 次に，$x \in Q$ ，$l(Q) \leq 2^{-k}$ を固定して，$|\Delta_k(b_\infty)(x)|$ を評価する． x を含む $Q' \in \boldsymbol{F}_k$ ， $Q'' \in \mathcal{F}_{k+1}$ となる二進キューブが一意的に存在し，これらが Q の部分集合となることに注意する． Q 上で $b_\infty \equiv 0$ が成立することから

$$\Delta_k b_\infty(x) = |Q''|^{-1} \int_{Q''} b_\infty \, dx - |Q'|^{-1} \int_{Q'} b_\infty dx = 0$$

となり，証明が得られる． ∎

補題 15.10 の証明　まず

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_k |\boldsymbol{E}_k f(x)|^p \omega_k(x) \, dx = p \int_0^{+\infty} \sum_k \omega_k(\{x; |\boldsymbol{E}_k f(x)| > \lambda\}) \lambda^{p-1} d\lambda \tag{15.8}$$

である．任意の固定した λ に対して，次式を満たすように，二進キューブ Q の中から互いに素な二進キューブの集合の最大のもの $\{Q_j\}$ を選び出す．

$$\left| |Q|^{-1} \int_Q f \, dx \right| > \lambda$$

もし $Mf(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\boldsymbol{E}_k f(x)|$ とすると，明らかに $|\{x; |Mf(x)| > \lambda\}| = \sum_j |Q_j|$ である．更にある $Q \in \boldsymbol{F}_k$ に対して $||Q|^{-1} \int_Q f \, dx| > \lambda$ とすると， Q_j の最大性により， Q は Q_j のうちのちょうど一つに含まれる．結果として，

$$\sum_k \omega_k(\{x; |\boldsymbol{E}_k f(x)| > \lambda\}) \quad \ll \quad \sum_j \sum_{\{k; 2^{-k} \leq l(Q_j)\}} \omega_k(Q_j) \ll \|\omega\|_C \sum_j |Q_j|$$
$$\ll \quad \|\omega\|_C |\{x; |Mf(x)| > \lambda\}|$$

となる，これを（15.8）に代入すると，最大値定理より

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_k |\boldsymbol{E}_k f(x)|^p \omega_k(x)\,dx \ll \|\omega\|$$

となる. ∎

15.5 Schur の補題

固定した $\delta > 0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ に対して作用素 T_δ^L と T_δ^R をそれぞれ以下のように定義する.

$$T_\delta^L f(x) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) N(y) \frac{\overline{z(y) - z(x) + \delta e_0}}{|z(y) - z(x) + \delta e_0|^{n+1}}\,dy$$

かつ

$$T_\delta^R f(x) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{z(y) - z(x) + \delta e_0}}{|z(y) - z(x) + \delta e_0|^{n+1}} N(y) f(y)\,dy$$

明らかに T_δ^L と T_δ^R は L^2 から L^∞への, 有界な作用素である.

CSIO の L^2-有界性の証明の主要な部分が以下の定理に含まれている.

定理 15.11 任意の $\epsilon > 0$ を固定し $w(Q) := |Q|^{1/2-\epsilon}$ とする. ここで Q は $\mathbb{R}^n$における全ての二進キューブの集合を動くとする. このとき $1/n > \epsilon > 0$ に対して

$$\sup_{Q,i} w(Q)^{-1} \sum_{Q'} \sum_{j=1}^{2^n-1} w(Q') |\langle T_\delta^L \beta_{(Q,i)}^L, \beta_{Q',j}^R \rangle| \le C < +\infty \tag{15.9}$$

$$\sup_{Q',j} w(Q')^{-1} \sum_{Q} \sum_{i=1}^{2^n-1} w(Q) |\langle T_\delta^L \beta_{(Q,i)}^L, \beta_{Q',j}^R \rangle| \le C < +\infty \tag{15.10}$$

が成り立つ. Cは δには依存しない. 同様の不等式が T_δ^R に対しても成立する.

ここでこの定理の証明はしばらくあとまわしにして, 定理から得られる結論を導く. Schur のテストを応用することによりただちに以下の系が得られる:

系 15.12 作用素 T_δ^L および T_δ^R は $L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ で有界でありかつ上界はδに依存しない.

作用素 T_δ^L 及び T_δ^R は CSIO である $\mathbb{C}_{(n)}$に深く関連している．$\delta > 0$ を固定したとき $\mathbb{C}_\delta^L$ と $\mathbb{C}_\delta^R$ を以下のような（右および左）CSIO の積分範囲を限定した演算とする．

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_\delta^L f(X) &:= \frac{2}{\sigma_n}\int_{\substack{|X-Y|\geq\delta \\ Y\in\Sigma}} f(Y)n(Y)\frac{\overline{Y-X}}{|Y-X|^{n+1}}\,dS(Y), \quad X\in\Sigma \\
\mathbb{C}_\delta^R f(X) &:= \frac{2}{\sigma_n}\int_{\substack{|X-Y|\geq\delta \\ Y\in\Sigma}} \frac{\overline{Y-X}}{|Y-X|^{n+1}}n(Y)f(Y)\,dS(Y), \quad X\in\Sigma
\end{aligned}$$

Cauchy 核 $\bar{X}|X|^{-n-1}$ を含んだ単純な直接計算により

$$|T_\delta^L f(x) - \mathbb{C}_\delta^L(f\circ z^{-1})(z(x))| \ll \mathcal{M}f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n$$

が δについて一様に成立することが示される．　ここで $\mathcal{M}$ は Hardy-Littlewood の最大値関数 である．同様に T_δ^R と $\mathbb{C}_\delta^R$ の差に関しても $\mathcal{M}$ によって上から押さえれる．特に，$\{\mathbb{C}_\delta^L\}_\delta$ と $\{\mathbb{C}_\delta^R\}_\delta$ は $L^2(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ 上有界でありかつ 上界はδに依存しない．結果として，Cauchy 核は Calderon-Zygmund 核である（文献 [CoMMe] の付録を見よ）．

上記の考察と Calderón–Zygmund 作用素 の理論に関する一般的な考察により，例えば文献 [Me] に示されているように次の定理を得る：

定理 15.13　全ての $f\in L^p(\Sigma,dS)_{(n)} := L^p(\Sigma,dS)\otimes\mathbb{C}_{(n)}$ 及び（ほとんど全ての） $X\in\Sigma$ に対して

$$\mathbb{C}^L f(X) := \lim_{\delta\to+0}\mathbb{C}_\delta^L f(X) \text{ かつ } \mathbb{C}^R f(X) := \lim_{\delta\to+0}\mathbb{C}_\delta^R f(X)$$

で定義された Cauchy の特異積分作用素 $\mathbb{C}_{(n)}^L$ 及び $\mathbb{C}_{(n)}^R$ は任意の $1<p<\infty$ に関して定義可能であり $L^p(\Sigma,dS)_{(n)}$ 有界である．

（特異）二重層ポテンシャル作用素がこれらの CSIO のスカラー部分であることから以下の系が得られる．

系 15.14　Σ 上の（特異）二重層ポテンシャル作用素 $\mathcal{D}$ は $L^p(\Sigma,dS)$ 上有界 $1<p<\infty$である．

例えば文献 [LMS] にあるような作用素 T_δ および $\mathbb{C}_\delta$に関する古典的な考察に基づき次の定理が得られる．

定理 15.15　$f\in L^p(\mathbb{R}^n)_{(n)}$, $1<p<+\infty$ 及び（ほとんど全ての） $x\in\mathbb{R}^n$ に対して，次式を得る：

$$\lim_{\delta\to\pm 0}\frac{1}{\sigma_n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)N(y)\frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}\,dy \quad=\quad \frac{1}{2}\big(F(X)\pm\mathbb{C}^L_{(n)}F(X)\big)$$

かつ

$$\lim_{\delta\to\pm 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}N(y)f(y)\,dy \quad=\quad \frac{1}{2}\big(F(X)\pm\mathbb{C}^R_{(n)}F(X)\big)$$

ただし，$F:=f\circ z^{-1}$, $X=z(x)$, $Y=z(y)$.

Muckenhoupt のクラス A_p に属する重み ω による重みつき測度を用いる一般的状況で考えることはそれほど困難ではないことに注意する．このことから定理 15.13，定理 15.15 及び系 15.14 は $L^p(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ を $L^p(\mathbb{R}^n,\omega\,dx)_{(n)}$に置き換えても成立することがわかる（[Me] 及び [Mi2] を参照）．

以下この節の残りでは，定理 15.11 を証明する．まず最初はいくつかの基礎的な評価を行なう．ここで関係するすべての定数は δに依存しない．

補題 15.16　任意の二進キューブ Q 及び $i=1,2,\ldots,2^n-1$ に対して

$$|T^L_\delta\beta^L_{(Q,i)}(x)|\ll l(Q)|Q|^{1/2}|x-x_Q|^{-(n+1)},\quad x\notin 2Q \tag{15.11}$$

及び

$$|T^L_\delta\beta^L_{(Q,i)}(x)|\ll |Q|^{-1/2}\log\frac{c_n l(Q)}{\mathrm{dist}(x,\partial_0 Q)},\quad x\in 2Q \tag{15.12}$$

が成り立つ． ここで $\partial_0 Q:=\bigcup_{j=1}^{2^n}\partial Q^j$であり， $\{Q^j\}_j$は Q の「子供」集合である． また x_Q は Q の「最左端」である．すなわち， $Q=Q_{k,v}$に対して $x_Q:=2^{-k}v$が成立する．ここで c_n は n のみに依存する定数である． $T^R_\delta\beta^R_{(Q,i)}$ に関しても同様の類推が成り立つ．

証明　不等式 (15.11) はβ'が消失した「モーメント」を持つことの結果であり，従って，

$$|T^L_\delta\beta^L_{(Q,i)}(x)| \approx\left|\int_{\mathbb{R}^n}\beta^L_{(Q,i)}(y)N(y)\left(\frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}-\frac{\overline{z(x_Q)-z(x)-\delta e_0}}{|z(x_Q)-z(x)-\delta e_0|^{n+1}}\right)dy\right|$$

したがって平均値の定理を上式の最も内側のカッコ内の内容を評価するのに使用し，$x\notin 2Q$ に対して $|x-x_Q|\ll \mathrm{dist}(x,Q)$ であることを用いると，(15. 11) の不等式が得られる．

次に，式 (15.12) に関しては， $x \in 2Q$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|T_\delta^L \beta_{(Q,i)}^L(x)| &\approx \left| \int_{\mathbb{R}^n} \beta_{(Q,i)}^L(y) N(y) \frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}\, dy \right| \\
&\ll |Q|^{-1/2} \sum_{j=1}^{2^n} \left| \int_{Q^j} N(y) \frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}\, dy \right|
\end{aligned}
$$

である．任意の jに対して $d := \mathrm{dist}(x, \partial_0 Q) \leq \mathrm{dist}(x, \partial Q^j)$ とする．$x \in 2Q \setminus Q$ に対して，上式右辺のそれぞれの項の積分を，

$$
\int_{d<|x-y|\leq d+\mathrm{diam}(Q)} |x-y|^{-n}\, dy \ll \log(2n^{1/2} l(Q)/d)
$$

によって右辺のオーダーに押さえれる．

ここである jに関して $x \in Q^j$ となると仮定すると，積分を以下のような形に分割することができる：

$$
\int_{Q^j} = \int_{|X-Y|>d} + \int_{|X-Y|<d} =: I + II
$$

ここで， $X := z(x), Y := z(y)$ である． $|x-y| \sim |X-Y|$ であるため， I は前と同様に正しい大きさを持っている．

IIに関しては Ω_- が曲面 Σの下の $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の領域であれば Cauchy 核の一元性（命題 15.2 をみよ）から次式のようになる．

$$
II = -\int_{\substack{\int_{|X-Y|=d} \\ Y\in\Omega_-}} \frac{Y-X}{|Y-X|} \frac{\overline{Y-X-\delta e_0}}{|Y-X-\delta e_0|^{n+1}} d\sigma_d(Y)
$$

ここで $d\sigma_d$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ に原点をおく半径 d の球面上の測度である．従って，

$$
|II| \ll \int_{\substack{\int_{|X-Y|=d} \\ Y\in\mathbb{R}^{n+1}}} \frac{1}{|X-Y|^n}\, d\sigma_d(Y) = \sigma_n
$$

となる．以上で証明は終わりである．∎

補題 15.17　$f \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ に対して $\langle T_\delta^L f, 1\rangle_\Sigma = 0$ かつ $\langle 1, T_\delta^R f\rangle_\Sigma = 0$ である．

証明　これらはいずれも Cauchy の定理（命題 15.2 参照）を曲面 Σのそれぞれ上側，下側にある領域 Ω_-, Ω_+ 及び関数 $T_\delta^L f$及び $T_\delta^R f$ に適用することにより簡単に導かれる．ここで関数 $T_\delta^L f$及び $T_\delta^R f$ はそれぞれ Ω_- の近傍で右方単成的，Ω_+の近傍で左方単成的な関数である．これらの関数は無限遠 ∞ でゼロに近づくことから補題 15.17 の成立が保証される． ∎

補題 15.18　関数 $f, f' \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)_{(n)}$ に対して $\langle T_\delta^L f, f'\rangle = -\langle f, T_\delta^R f'\rangle$ である．特に $\langle T_\delta^L \beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{Q',j}\rangle_\Sigma = -\langle \beta^L_{(Q,i)}, T_\delta^R \beta^R_{Q',j}\rangle_\Sigma$ が成立する．

証明

これは，二重積分

$$\frac{1}{\sigma_n}\iint f(y)N(y)\frac{\overline{z(y)-z(x)+\delta e_0}}{|z(y)-z(x)+\delta e_0|^{n+1}}N(x)g(x)\,dxdy$$

が絶対収束するため，Fubini の定理が使用できて証明は終了する． ∎

続いて，$Q_{k,v}$ を二進キューブであるとする．線形な変換関数 Φ によって $Q_{k,v}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の単位キューブに変換する．すなわち

$$\Phi(y) := w := 2^k y - v$$

である．

任意の二進キューブ Q に対して $Q^* := \Phi(Q)$ とする．Q^* は $l(Q) \le 2^{-k}$ であればそれ自身二進キューブである．さらに $w \in \mathbb{R}^n$ に対して $z^*(w) := 2^k z(2^{-k}(w+v))$ とすると，z^*は双 Lipschitz でその定数ははじめの z の Lipschitz 定数と比較可能である．

Σ^* を z^*のグラフとする．一般に，添え字 $*$ はΣに関んして構成する類似のものをラベルづけするのに使用する．　計算結果より以下のようになる．

$$\beta^{L*}_{Q^*,i}(w) = 2^{-kn/2}\beta^L_{(Q,i)}(y), \qquad T_\delta^{L^*}\beta^{L*}_{Q^*,i}(w) = 2^{-kn/2}T^L_{2^{-k}\delta}\beta^L_{(Q,i)}(y)$$

かつ

$$\langle T^{L*}_{2^k\delta}\beta^{L*}_{Q^*,i}, \beta^{R*}_{Q'^*,j}\rangle_{\Sigma^*} = \langle T_\delta^L \beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{Q',j}\rangle_\Sigma$$

さらに，$w^*(Q^*) = 2^{nk(1/2-\epsilon)}w(Q)$，したがって

$$w^*(Q'^*)^{-1}\sum_{\{Q\in F; l(Q^*)\le l(Q'^*)\}}\sum_{i=1}^{2^n-1} w^*(Q^*)|\langle T_\delta^{L^*}\beta^{L*}_{Q^*,i}, \beta^{R*}_{Q'^*,j}\rangle_{\Sigma^*}|$$

$$= w(Q')^{-1} \sum_{\{Q\in F; l(Q)\le l(Q')\}} \sum_{i=1}^{2^n-1} w(Q)|\langle T^L_{l(Q')\delta}\beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{Q',j}\rangle_\Sigma|$$

が $Q' \in \boldsymbol{F}$ かつ $j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ に対して成立する．

これによって 15.9 の証明を完了させるためには，以下の式を証明すれば充分である．

$$\text{すべての } j \text{に対し，} \quad \sum_{\{Q\in F; 1\le l(Q)\}} \sum_{i=1}^{2^n-1} w(Q)|\langle T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{[0,1]^n,j}\rangle_\Sigma| \le C < +\infty$$

かつ

$$\text{すべての } i \text{ に対し，} \quad \sum_{\{Q\in F; l(Q)\le 1\}} \sum_{j=1}^{2^n-1} w(Q)|\langle \beta^L_{[0,1]^n,i}, T^R_\delta \beta^R_{(Q,i)}\rangle_\Sigma| \le C < +\infty$$

ただし C は $\|\nabla g\|_\infty$ に依存している場合もあるがδとは独立である．これらの評価を 15.10 の証明の完了に必要な評価と結合させると，以下の式を証明する必要があることが明らかとなる．

$$\text{すべての } i,j \text{に対し，} \sum_{Q\in F} w(Q)|\langle T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{[0,1]^n,j}\rangle_\Sigma| \le C < +\infty \tag{15.13}$$

かつ

$$\text{すべての } i,j \text{に対し，} \sum_{Q\in F} w(Q)|\langle \beta^L_{[0,1]^n,i}, T^R_\delta \beta^R_{(Q,i)}\rangle_\Sigma| \le C < +\infty \tag{15.14}$$

ただし C は $\|\nabla g\|_\infty$に依存する可能性があるがδとは独立である．

15.13 と 15.14 の証明は実質的には同じであるのでここでは 15.13 のみの証明を行なうものとする．

(15.13) 式の証明　いくつかの場合について考察する必要がある．

ケース **I**　$l(Q)$ が “大きい場合” そして Q が “明らかに” 単位キューブと共有部分をもたない場合．すなわち $l(Q) \ge 1$ かつ $2Q \cap [0,1]^n = \emptyset$ である．

15.11 および $|x_Q| \ll |x - x_Q|$ であることから次式が得られる：

$$w(Q)|^L_\delta \beta^L_{Q,i}, \beta^R_{[0,1]^n,j}\rangle_\Sigma| \ll |Q|^{1/2-\epsilon} l(Q)|Q|^{1/2}|x_Q|^{-(n+1)} \tag{15.15}$$

ここで $Q = Q_{k,v}$であれば，仮定から $v \ne 0$ によって$\epsilon > 0$ に対し 15.15 の右辺は次式によって上から押えられる．

$$\sum_{k=0}^{-\infty} \sum_{v\ne 0, v\in\mathbb{Z}^n} 2^{-kn(1/2-\epsilon)} 2^{-k} 2^{-kn/2} 2^{k(n+1)} |v|^{-(n+1)}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{-\infty} 2^{kn\epsilon}\right) \left(\sum_{v\ne 0, v\in\mathbb{Z}^n} |v|^{-(n+1)}\right) < +\infty$$

これによって 15.13 の対応する部分は正しい評価であることがわかる.

ケース **II** $l(Q)$ が "大きい場合" すなわち $l(Q) \geq 1$, しかし $[0,1]^n \cap 2Q \neq \emptyset$ である場合 $[0,1]^n \cap 2Q \neq \emptyset$ より任意の kに対して負でない整数 M_0 (3^n であればよい) が存在し, この場合にはどのような kに対しても$\boldsymbol{F}_k$は多くとも M_0個の二進キューブにしか寄与しない。ところで補題 15.18, 15.11 および 15.12 により,

$$\begin{aligned}
&w(Q)|\langle T_\delta^L\{\beta_{Q,i}^R\}_{Q,i}, \beta_{[0,1]^n,j}^R\rangle_\Sigma \\
&\quad = w(Q)|\langle \beta_{(Q,i)}^L, T_\delta^R \beta_{[0,1]^n,j}^R\rangle_\Sigma| \\
&\quad \ll |Q|^{1/2-\epsilon}|Q|^{-1/2}\left(\int_{Q\cap 2[0,1]^n} |T_\delta^R \beta_{[0,1]^n,j}^R(x)|\,dx + \int_{Q\setminus 2[0,1]^n} |T_\delta^R \beta_{[0,1]^n,j}^R(x)|\,dx\right) \\
&\quad \ll |Q|^{-\epsilon}\left(\int_{2[0,1]^n} \log\frac{c_n}{\operatorname{dist}(x,\partial_0[0,1]^n)}\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \setminus 2[0,1]^n |x|^{-(n+1)}\,dx\right) \\
&\quad \sim |Q|^{-\epsilon}
\end{aligned}$$

となり, それゆえ

$$w(Q)|_\delta^L \beta_{Q,i}^L, \beta_{[0,1]^n,j}^R\rangle_\Sigma| \ll |Q|^{-\epsilon} \tag{15.16}$$

である.

これによって, 15.13 の本ケースに対応した部分は, 望んでいたように以下のように評価される.

$$\sum_{k=0}^{-\infty} 2^{kn\epsilon} \sum_{v\in \text{有限集合}} 1 \sim \sum_{k=0}^{-\infty} 2^{kn\epsilon} < +\infty$$

ケース **III** $l(Q)$ が "小さい場合" かつ Q が単位キューブから "明らかに分離している" すなわち $l(Q) < 1$ かつ $2Q \cap [0,1]^n = \emptyset$ の場合である.

本ケースにおいては再び 15.11 を使用することにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
w(Q)|_\delta^L \beta_{Q,i}^L, \beta_{[0,1]^n,j}^R\rangle_\Sigma| &\ll |Q|^{1/2-\epsilon}\int_{[0,1]^n} |T_\delta^L \beta_{(Q,i)}^L(x)|\,dx \\
&\ll l(Q)|Q|^{1-\epsilon}|x_Q|^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

ここで $Q = Q_{k,v}$と仮定する. $2Q \cap [0,1]^n = \emptyset$であることから $2^k \ll |v|$でなければばらない. 式 15.13 中の和の相当する部分は次式のように上から押えられる.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}2^{-kn(1-\epsilon)}2^{k(n+1)} \sum_{2^k \ll |v|} |v|^{-(n+1)} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(n\epsilon-1)} < +\infty$$

ただし $0 < \epsilon < 1/n$ とする.

ケース **IV** 残るのは $l(Q) < 1$ and $Q \subset [-3,3]^n$の場合である.

まず，$Q \subset [-3,0] \times [-3,3]^{n-1}$の場合を解析する．

$|\langle T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}, \beta^R_{[0,1]^n,j}\rangle_\Sigma|$ を評価するためには，$\beta^R_{[0,1]^n,j}$が単位キューブの “子供” の特性関数の線形結合であることを考慮すると，以下の式

$$|\langle T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}, \chi_{Q'}\rangle| \ll \int_{Q'} |T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}(x)|\,dx \tag{15.17}$$

を区間 $[0,1]^n$における任意の固定した “子供” Q'に関して制御すれば充分である．

第一の可能性は Q の境界が超平面 $\{x^1 = 0\}$ と共有点を持たない場合である．そこで $x \in [0,1]^n$ に対して $|x^1_Q| \ll |x - x_Q|$ という事実と 15.11 を用いて 15.17 の積分を次式の定数倍で置き換えられる．

$$l(Q)|Q|^{1/2} \int_{|x^1_Q|}^{+\infty} r^{-(n+1)} r^{n-1}\,dr = l(Q)|Q|^{1/2}|x^1_Q|^{-1}$$

したがってこの部分からの 15.13 における和に関する寄与は $1/n > \epsilon > 0$ なる n に対して以下のような上限を持つ．

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-kn(1/2-\epsilon)} 2^{-k} 2^{-kn/2} 2^k \int \sum_{\substack{i=2,\dots,n \\ -3\cdot 2^k \le v_i \le 3\cdot 2^k - 1}} \sum_{v_1=1}^{-2^{k+1}} |v_1|^{-1} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} k 2^{-k(1-n\epsilon)} < +\infty$$

第二の可能性は Q が超平面 $\{x^1 = 0\}$ に接していることである．$Q'_1 = 2Q \cap Q'$および $Q'_2 = Q' \setminus Q'_1$とおいて $Q' = Q'_1 \cup Q'_2$と書くことにする．Q'_2の部分に関しては被積分関数を上から押えるるのにさらに (15.11) を使用する．これと $|x - x_Q| \ge l(Q)$ であることにより次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\int_{Q'_2} |T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}(x)|\,dx &\ll l(Q)|Q|^{1/2} \int_{Q'_2} |x - x_Q|^{-(n+1)}\,dx \\ &\ll l(Q)|Q|^{1/2} \int_{l(Q)}^{+\infty} r^{-n-1} r^{n-1}\,dr \sim |Q|^{1/2}\end{aligned}$$

それぞれの固定した $k \ge 0$ に関して $\mathcal{O}(2^{k(n-1)})$ 個のこのケースに適した二進キューブが存在し，

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-kn(1/2-\epsilon)} 2^{-kn/2} 2^{k(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k(1-n\epsilon)} < +\infty$$

が $1/n > \epsilon > 0$ に関して成立する．従って，15.13 の和におけるこの部分は同様に正しい評価を満たしていると結論できる．

15.17 の Q'_1の部分に関しては，15.12 および $\mathrm{dist}(x, \partial o Q) \ge x^1 \ge 0$ より次式が導かれる：

$$\int_{Q'_1} |T^L_\delta \beta^L_{(Q,i)}(x)|\,dx \ll |Q|^{-1/2} \int_{Q'_1} \log \frac{c_n}{\mathrm{dist}(x, \partial_0 Q)}\,dx$$

$$\begin{aligned}&\ll& |Q|^{-1/2}\int_{Q_1'}\log\frac{c_n}{x^1}\,dx \ll |Q|^{-1/2}l(Q)^{n-1}\int_0^{l(Q)}\log\frac{c_n}{x^1}\,dx^1\\ &=& |Q|^{-1/2}\mathcal{O}(l(Q)^{n-1+\alpha})\end{aligned}$$

なぜなら，すべての$\alpha\in(0,1)$ に関して $|t(\log(1/t)+1)|\ll t^\alpha$が $t\in(0,1)$ に関して一様に成立するからである．ここで $n\epsilon<\alpha<1$ を満たすαを選択する．すると，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-kn(1/2-\epsilon)}2^{kn/2}2^{-k(n-1+\alpha)}2^{k(n-1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k(\alpha-n\epsilon)}<+\infty$$

これによって $Q\subset[-3,0]\times[-3,3]^{n-1}$なる場合の証明を終了する．続いて

$$\sum_Q w(Q)|\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{Q'}\rangle_\Sigma|$$

の有界性が，平行移動，座標変換および座標軸に関する対称変換によって有界性の不変であることを使用する．これによって Q と Q'とが内共有点を持たない場合は常に既に証明した問題に帰着することができる．実際，ケース IV においてチェックする必要のあるあと唯一の可能性は $Q\subseteq Q'=[0,1/2]^n$の場合である．ここで，

$$\begin{aligned}|\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma| &=& |\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma|\\ &\ll& |\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma|\\ &+& |\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{2[0,1/2]^n\setminus[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma|\end{aligned}\tag{15.18}$$

である．

最後の項は $2[0,1/2]^n\setminus[0,1/2]^n$と互いに素なキューブの有限和に分解することにより評価するが，これについては前の段落での論法を適用することが可能である．第一項を評価するために，B_Rを $\mathbb{R}^n$の原点に中心のある半径 Rの球とすると以下のことがわかる．

$$\begin{aligned}|\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma| &=& \lim_{R\to+\infty}|\langle T_\delta^L\beta_{(Q,i)}^L,\chi_{B_R\setminus 2[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma|\\ &=& \lim_{R\to+\infty}|\langle\beta_{(Q,i)}^L,T_\delta^R\chi_{B_R\setminus 2[0,1/2]^n}\rangle_\Sigma|\\ &=& \lim_{R\to+\infty}|\langle\beta_{(Q,i)}^L,T_\delta^R\chi_{B_R\setminus 2[0,1/2]^n}-T_\delta^R\chi_{B_R\setminus 2[0,1/2]^n}(x_Q)\rangle_\Sigma|\end{aligned}$$

ここで $x\in[0,1/2]^n$，$j=1,2,\ldots,n$ に対し $|(\partial/\partial x_j)T_\delta^R\chi_{B_R\setminus 2[0,1/2]^n}(x)|\ll 1$ が Rに関して一様に成立することから，極限を $|Q|^{1/2}l(Q)$ で押えることができる．それぞれの$\boldsymbol{F}_k$は $\mathcal{O}(2^{kn})$ 個の二進キューブを $[0,1/2]^n$の内部に含み，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-kn(1/2-\epsilon)}2^{-kn/2}2^{-k}2^{kn}=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k(1-n\epsilon)}<+\infty$$

が $1/n>\epsilon>0$ に関して成立する． したがって， ケース IV は証明され 15.13 および定理 15.11 の証明は完了した． ∎

最後に，ここで得られた手法によって Clifford 値関数についての $T(b)$ 定理の新しい証明が得られることを特記しておく（例えば [DJoS]，[MMe] を見よ）.

より特異な問題として，b が Clifford 代数値をとり，$\mathbb{R}^n$ 上の不規則増大関数であるとする．このような場合以下のような "双一次" 形式を使用する.

$$\langle f_1, f_2\rangle_b := \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)b(x)f_2(x)\,dx$$

もとの $N(x)$ 増大性の替わりに G. David の方法を使用して，σ加法族列を条件付き平均値作用素の定義に従って変形するべきである (詳細は [CoJS] を見よ).

次に $T(b) =^t T(b) = 0$ と仮定すると補題 15.16 の $|T(\beta)(x)|$ よりはむしろ $|\langle T\beta, \beta\rangle_b|$ を評価し，Schur のテストを使用する必要がある．一般のケースは不規則生成的な作用素を取り除いたものに帰着される．実際これらの作用素は標準的な核を持たないが，対数的な発散によって充分制御される.

参考文献

[AT] P. Auscher and Ph. Tchamitchian. 1989. "Bases d'ondelettes sur les courbes corde-arc, noyau de Cauchy et espaces de Hardy associes," *Rev. Mat. Iberoamericana* **5**: 139–170.

[BDeSo] F. Bracks, R. Delanghe, and F. Sommen. 1982. *Clifford Analysis*, *Res. Notes Math.* **76**, Pitman Advanced Publishing Program.

[C] A.P. Calderón. 1977. "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators," *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **74**.

[Ch] M. Christ. 1990. *Lecture on Singular Integral Operators*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **77**.

[CoJS] R.R. Coifman, P. Jones, and S. Semmes. 1989. "Two elementary proofs of the L^2 boundedness of the Cauchy integrals on Lipschitz curves," *J. Amer. Math. Soc.* **2**: 553–564.

[CoMMe] R.R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer. 1982. "L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes," *Ann. Math.* **116**: 361–387.

[DJoS] G. David, J.-L. Journé, and S. Semmes. 1985. "Operateurs de Calderón–Zygmund, fonctions para-accretives et interpolation," *Rev. Mat. Iberoam.* **1**: 1–56.

[GMu] J.E. Gilbert and M.A.M. Murray. 1991. *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, *Cambridge Studies Adv. Math.* **26**, Cambridge: Cambridge University Press.

[I] V. Iftimie. 1965. "Fonctions hypercomplexes," *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. Soc. Roum.* **4**: 279–332.

[LMS] C. Li, A. McIntosh, and S. Semmes. 1992. "Convolution singular integrals on Lipschitz surfaces," *J. Amer. Math. Soc.* **5**: 455–481.

[M] A. McIntosh. 1989. "Clifford algebras and the higher dimensional Cauchy integral," in *Approximation Theory and Function Spaces*, Banach Center Publications **22**, Warsaw:

Polish Scientific Publishers, pp. 253–267.

[MMe] A. McIntosh and Y. Meyer. 1985. "Algebres d'operateurs definis par des integrales singuliers," *C. R. Acad. Sci., Ser. 1* **301**: 395–397.

[Me] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Operateurs*, Paris: Hermann.

[Mi1] M. Mitrea. 1991. Ph.D. Thesis, University of South Carolina.

[Mi2] M. Mitrea. 1991. "Weighted Hardy spaces and Clifford algebras." Preprint.

[Mu] M.A.M. Murray. 1985. "The Cauchy integral, Calderón commutators and conjugations of singular integrals in $\mathbb{R}^m$," *Trans. Amer. Math. Soc.* **289**: 497–518.

[N] J. Nečas. 1967. *Les Methodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Prague: Academia.

[T] Ph. Tchamitchian. 1989. "Ondelettes et integrale de Cauchy sur les courbes Lipschitziennes," *Ann. Math.* **129**: 641–649.

[V] G.C. Verchota. 1984. "Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equations in Lipschitz domains," *J. Funct. Anal.* **59**: 572–611.

第 16 章 作用素の研究における分解定理使用法

Richard Rochberg

【概要】 ポテンシャル作用素と掛け算作用素の混在型の作用素を研究する際に，ウェーブレット分解とそれに関連した手法がいかに使われるかをいくつか示す．

16.1 導入と概要

ウェーブレットを用いた関数の表現と，その他の関連した表現は個々の関数の研究と古典的関数空間の研究における強力な道具となる．また，この同じ道具を関数空間の間の作用素の研究に対しても使うことができ，このことが，ここで議論したいことである．もちろんこれは新しい考えではない．この論文で比較的新しい点は，この一般的な技術の一部と特別な細部の一部である，ある種の道具に焦点を当てたということであろう．

作用素を研究するのに分解定理を用いる方法は数多くある．これらのいくつかを述べるが，主な関心は私が従事している特別な手法である．特別な例を通して考え方の一般的な特質を紹介し，その詳細のいくつかを示そうと思う．ここでは概略を述べるに止め，詳細な証明はいずれ別の場所で述べることにしたい．我々は掛け算作用素と微分作用素の混合型である作用素に焦点を絞ろう．それはまさにウェーブレットとそれに関連したアイデアが役に立つことが期待される場合なのである．基本的なテーマは，上述の 2 種類の作用素は同時対角化はできないものの，分解定理を使うことでほとんどそれと同じことができるということである．

関数空間 X の元 f に作用する作用素 T を研究するのにウェーブレット分解 あるいは他の分解を用いる一つの方法は，分解定理を用いて f を断片に分解し，その各断片に T がいかに作用するかを研究し，そして Tf の全てについて知るのに T の作用によって出てきた各項をいかに結び付けるかという問題に目を向けることである．16.3.2 節で例を通してそのことを詳細に見よう．そのアプローチをさらに押し進めることができる． $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の基底とし，$\{\tilde{\psi}_\beta\}_{\beta\in B}$ を双対空間の基底とせよ．行列 $\{\langle T\psi_\alpha, \tilde{\psi}_\beta\rangle\}$ を見ることで作用素 T を研究することができよう．

ウェーブレットや他のもっと一般的な関数の集合を用いるこのアプローチは，Calderón–

Zygmund 作用素 やその他の関連した作用素の研究には非常に有効である．これについて詳しく述べることはやめて本や論文 [Me1],[Me2], [Da], [FrJa], [FrJaWe], [P], [JL] そして [H] に譲ろう．我々が注目したい作用素は，Calderón–Zygmund 理論や今述べた文献においてしばしば考えられる作用素よりもいくらか粗っぽいものである．特に我々の作用素の行列表示は [Me1], [Me2], そして [FrJa] による「殆ど対角型」という基準を満たさないものである．

作用素 T を研究するのに分解定理を用いる別の方法は，作用素 T そのものを断片に分解することである．もし作用素 T が表象 b に線型に依存するならば，表象 b を分解することで作用素 T を分解することができるだろう．例えば，[RSe1] を見よ．もっと一般に，T が積分核 $k(x,y)$ によって与えられる積分作用素ならば，多種多様の分解定理を用いて $k(x,y)$ を比較的単純な作用素を生み出す単純な断片に分解することができる．この種の仕事は [BCoRo], [P], [RSe2] そして [H] に見られる通りである．16.3 節で，この種の解析を行う．

関数のウェーブレット表示は，Calderón の再生公式 の離散版と見なすことができる．Calderón の再生公式は，恒等作用素を一次元の射影の連続和として表すものととらえることができる．つまり，$I=\int P_\zeta d\mu(\zeta)$ ．恒等作用素のこの表示は，作用素を研究する際に色々な使い道がある．一つの方法は，フーリエ・マルチプライアーの定義で使われるやり方を見習うことである．すなわち，再構成する前に，積分の中へ暗に掛け算作用素を挿入することである．形式的にはマルチプライアー $b(\zeta)$ に対して，作用素 $T_b=\int b(\zeta)P_\zeta d\mu(\zeta)$ と定義する．

この種の構成は，作用素の「コヒーレント状態表現」として物理学ではなじみ深いものである． [KlSk], [D] を見よ．この理論は，フーリエ・マルチプライアーの理論よりいくらか複雑である．というのは，P_ζ は可換な射影の族ではなく従って可換な作用素の族を得ることができないからである．このクラスの作用素，後で説明する理由から Calderón–Toeplitz 作用素 と呼ばれている，は Calderón–Zygmund 作用素と密接に関連している．16.3.3 節で，この構成を通して現われる作用素を見ていこう．

かくして 16.3.1 節と 16.3.2 節で，分解定理を用いて自然に生ずる作用素を研究する．16.3.3 節では，関心のある作用素の単純なモデルを組み立てるために分解の考えを使ったとき，何が起こるかを見てみよう．

16.2 節では記号を説明し，いくつかの背景となる結果を集め，そして我々の研究したい作用素を導入する．16.3 節を三つの部分にわけて，作用素の有界性定理，固有値，そして特異値評価を得るための分解定理を使った三つの異なったケースの詳細を扱う．16.4 節では，より洗練された作用素解析において 16.3 節の考えがいかに使われるかを簡単に議論しよう．特に Lipman–Schwinger 方程式 に対する擬粒子の構成と固有ベクトルに対する大きさの評価を議論する．最終節ではいくつかの考察を行う．

16.2　背景

16.2.1　作用素

我々の調べる作用素の一つは $L^2(\mathbb{R}^3)$ に作用する Schrödinger 作用素 である．つまり，Δ を Laplacian とし，V を非負ポテンシャル関数 $v(x)$ による掛け算作用素としよう．我々は $S=-\Delta-V$ なる作用素に注目する．ある場合には，S は（たとえあっても）0 以外の集積点を持たない負の固有値の集合を持ち得る．v の性質と固有値分布が最大の関心事である．正の数 λ に対して，$N(\lambda)=N(\lambda,V)$ を $-\lambda$ より小さい S の固有値の数としよう．$N(\lambda)$ を研究するための素晴しい導入となるものが，[F] で与えられている．この論文には $N(\lambda)$ を評価することとポテンシャル作用素に対する重みつきノルム評価の間の基本的な関係が見られる．

ここでは Birman と Schwinger に従い，非有界作用素 S の考察から，それに付随した正のコンパクト作用素の考察へと移ろう．任意に固定した正の数 λ に対して，f を S の固有値 $-\lambda$ に対する固有ベクトルとしよう．つまり $Sf=-\lambda f$．よって

$$(-\Delta-V)f=-\lambda f$$

この方程式を代数的に処理し，新しい関数 $g=v^{1/2}f$ を導入することにより，

$$V^{1/2}(\lambda-\Delta)^{-1}V^{1/2}g=g$$

よって少なくとも形式的には固有値 λ に対する S の固有ベクトルは，関連する作用素

$$T=T_\lambda=V^{1/2}(\lambda-\Delta)^{-1}V^{1/2}$$

の固有値 1 に対する固有ベクトルと関係している．実際は次のことが言える．$M(\lambda)=M(\lambda,V)$ を T_λ の 1 以上の固有値の個数とする．

命題 16.0(Birman, Schwinger)

$$N(\lambda)\leq M(\lambda)$$

証明　[Si] の p87 あるいは [S1] の定理 5.3 を見よ．∎

16.3.1 節では，作用素 T_λ をその積分核を分解することにより調べよう．

T_λ は，三つの作用素の積である．一番目と三番目は掛け算作用素であり，真ん中は $D=(-\Delta)^{1/2}$ の（関数解析的計算を経た）関数である．そのような組み合わせはしばしば象徴的に $f(X)g(D)h(X)$ と書かれる．ここで $f(X)$ は $f(x)$ による掛け算作用素で，$h(X)$ も同様である．$g(D)$ は関数解析的計算によって定義される Δ の関数である．より簡単な作用素 $f(X)g(D)$，

より複雑な作用素 $f(X)g(-i\nabla)$ と同様，そのような作用素は多くの所で出てくる．それらは体系的に [Si] の第 4 章で，そして [BiKaSo] の概説で議論されている．この分野での基本的な結果の一つは Cwikel の定理 で，それは $f(X)g(D)$ とそれに関連した作用素が弱 Schatten イデアルに属するための f ， g に関するはっきりした条件を与えることである．16.3.2 節では，ウェーブレットを用いて Cwikel の定理をとらえ直すとどうなるかを調べる．16.3.3 節では， $f(X)g(D)$ に対する単純化されたモデルである Calderón–Toeplitz 作用素に対する Cwikel の結果の類似を見てみよう．

16.2.2 特異値

作用素の有界性の基準を見ることに加えてその固有値，もっと一般に，特異値を見よう．その定義を思い起こしておこう． Hilbert 空間に作用する有界作用素 T と $n = 0, 1, \ldots$ に対して $\{s_n(T)\}$ を T の n 番目の特異値と呼び，次のように定義する．

$$s_n(T) = \inf\{\|T - R_n\| : R_n \text{ は高々ランク } n \text{ の作用素 }\}$$

もし T がコンパクトならば， $\{s_n(T)\}$ は $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値を減少する順番に並べたものである．特に T が正のコンパクト作用素ならば $\{s_n(T)\}$ は T の固有値を減少する順番に並べたものである．Schatten–von Neumann イデアル S_p は，列 $\{s_n(T)\}$ が Lebesgue–Lorentz 空間 $l^{p,q}$ に属するようなコンパクト作用素から成っている．特に $S_{p,\infty}$ は $\{s_n(T)\}$ が弱いタイプの空間 $l^{p,\infty}$ に属する作用素から成っている．

16.2.3 ウェーブレット

$\mathcal{Q}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 進キューブの集合とせよ． $Q \in \mathcal{Q}$ に対して ζ_Q を Q の最も下の左側の頂点とし， η_Q を Q の辺長， $|Q|$ を Q の測度とせよ． ψ をマザーウェーブレットとせよ．すると，関数 $\psi_Q(x) = |Q|^{-1/2}\psi((\cdot - \zeta_Q)\eta_Q^{-1})$, $Q \in \mathcal{Q}$ の集合は，正規直交基底である．(ここではもちろん $n > 1$ の場合に限定している．) すると，次の再構成公式が得られる．

$$f = \sum \langle f, \psi_Q \rangle \psi_Q \tag{16.1}$$

16.2.4 Calderón の再生公式

Calderón の再生公式は (16.1) の連続版である． G を平行移動と伸張からなる群とし， $G = \{\zeta = (v, t) : v \in \mathbb{R}^n, t > 0\} = \mathbb{R}_+^{n+1}$ と書く． G には測度 $d \quad \mu = t^{-n-1}dvdt$ (= G 上の左不

変 Haar 測度 $= \mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の双曲型測度）が入る．ψ を平均 0 で無限遠方での減衰度の良い滑らかな関数とせよ．$\zeta \in G$ に対して $\psi_\zeta(x)$ を $\psi_\zeta(x) = t^{-n/2}\psi((x-v)/t)$ と定義する．もし ψ が適当な正規化条件

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\lambda)|^2 t^{-1} dt = 1$$

を任意の単位ベクトル λ に対して満たせば (16.1) の連続版が得られる．

$$f = \int \langle f, \psi_\zeta \rangle \psi_\zeta d\mu(\zeta) \tag{16.2}$$

16.2.5　NWO 数列，重み

関数列 $\{e_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ が，ほとんど弱い意味で正規直交である (NWO) とは，$f(x)$ を

$$f^*(x) = \sup_{|\zeta_Q - x| \langle \eta_Q} \{|Q|^{-1/2} |\langle f, e_Q \rangle|\}$$

に移す maximal 関数が $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界なことと定義する．ここでそのような関数列の基本的な例を挙げよう．また実際そのような関数列しか我々は用いない．K を固定された大きな数とせよ．$\mathcal{Q}$ の元 Q に対して KQ を Q と中心は同じで辺長が K 倍のキューブとせよ．$\mathrm{supp}(e_Q) \subset KQ$ であって，$2 < r \leq \infty$ なる r と $c > 0$ が存在して任意のキューブ Q に対して

$$\|e_Q\|_r \leq c|Q|^{1/r - 1/2} \tag{16.3}$$

を満たすような関数列 $\{e_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ が与えられているとしよう．[RSe2] の 7 章より

命題 16.1　(16.3) が成り立つならば，$\{e_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ は NWO である．

数列 $\{a_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ が与えられた時，新たな数列 $\{a_Q^*\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ を

$$a_Q^* = \sum_{\substack{R\in\mathcal{Q} \\ R\subset Q}} \frac{|R|}{|Q|} |a_R|$$

によって定義する．もし $\{a_Q^*\}$ が有界ならば

$$\|\{a_Q\}\|_{CM_d} = \sup\{a_Q^*\}$$

と書く．(添字は「離散カールソン測度」の略)

我々は次のように書かれる L^2 上の作用素に興味がある．

$$T = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} a_Q \, e_Q \otimes f_Q$$

ここで $\{e_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ ， $\{f_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ は NWO である．この記号は

$$Tf = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} a_Q \langle f, f_Q\rangle e_Q$$

ということを意味する． [RSe2] より次を得る．

命題 16.2

$$\|T\| \le c\|\{a_Q\}\|_{CM_d}$$

もし $\{a_Q^*\}$ が 0 に収束するならば T はコンパクトで，T の近似に関する情報がランク有限の作用素によって得られる．もし $\{a_Q^*\}$ が 0 に収束するならば，その非増大再配列 を $\{a^*(n)\}$ と書こう． N を正整数とし， $a_{Q_j}^* = a^*(j), j = 1, 2, \ldots, N$ としよう． $F_N = \sum_{j=1}^N \alpha_{Q_j} e_{Q_j} \otimes f_{Q_j}$ とおく． F_N はランク N の T の良い近似である．

命題 16.3

$$\|T - F_N\|_{op} \le ca^*(N+1)$$

従って，

$$s_N(T) \le ca^*(N+1), \quad N = 0, 1, \ldots.$$

これを使って，次を示せる．

命題 16.4 $1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty$ ならば $\{a_Q\} \in l^{p,q}$ より $\{a_Q^*\} \in l^{p,q}$ が従い，よって $T \in S_{p,q}$ がいえる．

重みとは $\mathbb{R}^n$ 上の非負値関数のことである．我々は Muckenhoupt クラス A_∞ に属する重みに関心がある．ここで A_∞ は，ある関数 C と δ が存在して，任意のキューブ Q と任意の可側集合 $E \subset Q$ に対して

$$\frac{\int_E w}{\int_Q w} \le C \left[\frac{|E|}{|Q|}\right]^\delta \tag{16.4}$$

が成り立つ重み w からなる．この重みに関するいくつかの事実を必要とする．証明は [GFra] にある．

補題 16.5 **(a)** Q を $\mathbb{R}^d$ 内のキューブ， Q' を同じ大きさで共通面を持つキューブ， Q'' を Q の部分キューブで，辺長が Q の半分のキューブとせよ． A_∞ に属する w に対して $m = \int_Q w, m' = \int_{Q'} w$ そして $m'' = \int_{Q''} w$ とおく．比 m/m' 及び m/m'' は上と下から定数で押さえられ，その定数は (16.4) に現われる定数のみによるように選べる．

(b) (逆 Hölder 不等式) w を A_∞ の元とせよ．(16.4) の定数のみによるようにとれる定数 C と δ が存在して，$\mathbb{R}^d$ 内の任意のキューブ Q に対して

$$\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1+\delta}dt\right]^{1/(1+\delta)} \leq C\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)dt\right]$$

が成り立つようにできる．

重み A_∞ と関数列 NWO の関係の一つは

補題 16.6　w^2 が A_∞ の元とせよ．$Q \in \mathcal{Q}$ に対して

$$e_Q(x) = \|w\chi_Q\|_2^{-1} w\chi_Q(x)$$

とせよ．すると $\{e_Q\}$ は NWO である．

証明　(16.3) を確かめさえすればよい．(16.3) は先程の補題の逆 Hölder 不等式 より従う．∎

16.3　作用素の解析

16.3.1　NWO 数列と Schrödinger 作用素に対する固有値評価

作用素の解析の一例を与えよう．この場合は積分核の分解に基づいた，Schrödinger 方程式に付随した Birman–Schwinger 作用素の解析である．これによりランク1の作用素の和としての作用素（の少し単純化されたモデル）の表現が導かれる．かくして

$$Af = \sum c_\alpha \langle f, h_\alpha\rangle k_\alpha$$

なる形をした作用素を見てゆこう．もし $\{h_\alpha\}$ と $\{k_\alpha\}$ が正規直交ならば，A の L^2 上の有界性は数列 $\{c_\alpha\}$ の有界性に従う．実際もし $\{h_\alpha\}$ と $\{k_\alpha\}$ が有界な写像による正規直交列の集合の像ならばそのことは正しい．例えば [FrJa] の分解定理で使われた関数などである．ウェーブレットを用いた分解定理の場合には，我々の数列は二進キューブによって番号づけられ $\{h_\alpha\}$ や $\{k_\alpha\}$ は粗っぽく言えば，その番号づけられたキューブに局在化している．しかしながら，我々の関数にはウェーブレットや [FrJa] で使われた関数に典型的な，滑らかさと相殺性がない．したがってカールソン測度 の条件 (すなわち補題 16.2) は $\{c_\alpha\}$ の有界性よりは少しは強い条件だが，作用素 A の有界性を保証する必要がある．このアプローチは [RSe1], [RSe2] において展開され [R1] でその概略が述べられたものである．我々がここで提示する結果は [R5] の成果の一部を要約するものである．我々の得る結果，特に定理 16.10 の固有値評価は，すでに知られている．ここでの我々の主な貢献は，いったん積分作用素の核に対して分解法を適用すること

にすれば比較的たちどころにこの種の結果が導かれることを示すことにある．

今や我々の目的は，固有値の漸近分布をポテンシャル関数の性質に関連づけることである．前にも注意したように，ポテンシャル関数の代わりにコンパクト作用素 $T = T_\lambda = -V^{1/2}(\lambda - \Delta)^{-1}V^{1/2}$ に目を向ければよい．記号の簡便のため $v = w^2$ と書こう．まず $\lambda = 0$ の場合を考える．その時 $(\lambda - \Delta)^{-1}$ は Riesz ポテンシャル 作用素で $|x|^{-1}$ の定数倍との畳み込みで与えられる．従って（定数倍を除いて）積分核 $K(x,y)$ の作用素，つまり

$$K(x,y) = \frac{w(x)w(y)}{|x-y|}$$

をもつ作用素 $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ に目を向ければよい．

T を解析するために核をいくつかの項に分解する． $\{Q_i \times Q_i'\}$ を二進キューブによる $\{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{diag}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x \neq y\}$ のホイットニー被覆 とせよ（ [St] の p169 参照）．各キューブの直径はそれらのキューブの対角線への距離と比較可能である．従って各 $Q_i \times Q_i'$ に対して

$$|x-y|^{-1} \sim (\, Q_i\text{の辺長}\,)^{-1} = \eta_{Q_i}^{-1}$$

となる．今の我々の目的は Tそのものを研究することではなく T を，より簡単なモデルとなる作用素に置き換えることである．まず第一のステップは先程の評価に基づくものである．そのことに注意しておいて $Q_i \times Q_i'$ 上に $|x-y|^{-1}$ を $\eta_{Q_i}^{-1}$ に置き換えることにより K を修正する．

$$\sum\nolimits_i \chi_{Q_i \times Q_i'}(x,y) = 1 \quad \text{a.e.} \quad dxdy \tag{16.5}$$

に注意し，$\chi_{Q_i \times Q_i'}(x,y) = \chi_{Q_i}(x)\chi_{Q_i'}(y)$ ということを使えば，修正された積分核

$$\sum w(x)w(y)\eta_{Q_i}^{-1}\chi_{Q_i}(x)\chi_{Q_i'}(y) \tag{16.6}$$

を得る．ホイットニー被覆の幾何的性質により Q_i と Q_i' の違いを $Q_i = Q_i'$ と (16.6) で置き換えることにしよう．さらに，作用素をより大きくする．すなわち $\mathcal{Q}$ に属するすべての Q についての和をとる．かくしてこれから我々が考える作用素は，積分核

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} w(x)w(y)\eta_Q^{-1}\chi_Q(x)\chi_Q(y)$$

をもつ作用素である．

$$e_Q(y) = \|w\chi_Q\|^{-1}w(y)\chi_Q(y)$$

そして

$$f_Q(x) = \|w\chi_Q\|^{-1}w(x)\chi_Q(x)$$

と置く．すると積分核

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \eta_Q^{-1}\|w\chi_Q\|^2 f_Q(x)e_Q(y)$$

をもつ作用素 R ，つまり

$$R=\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \eta_Q^{-1}\|w\chi_Q\|^2 f_Q\otimes e_Q \tag{16.7}$$

なる作用素を考えることになる．ここで補題 16.6 を使いたい．そのため A_∞で

$$v=w^2 \tag{16.8}$$

を仮定する必要がある．

定理 16.7 (16.8) が成立するとせよ． R そして T が L^2 -有界であるためには (16.7) の各係数が有界であればよい．もっとはっきり言うと $w^2=v$ を思い起こして

$$A=\sup_{Q\in\mathcal{Q}} \eta_Q^{-1}\left[\int_Q v(x)dx\right]<\infty$$

であればよい．このとき， $\|R\|\le cA, \|T\|\le cA$ となる．

証明 まず R に注目せよ．(16.8) より 補題 16.6 が使えて $\{e_Q\}$ 及び $\{f_Q\}$ は NWO である．従って， 補題 16.2 が使える．

$$a_Q=\eta_Q^{-1}\left[\int_Q w(x)^2dx\right]$$

であり，また

$$a_Q^*=\int\sum_{\substack{R\in\mathcal{Q}\\ R\subset Q}}\frac{|R|}{|Q|}|a_R|=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\eta_R=\eta_Q/2^n}2^{-3n}|a_R|$$

である．任意に固定した n についてまずはじめの和は

$$2^{-3n}2^n\eta_Q^{-1}\sum_{\eta_R=\eta_Q/2^n}\left[\int_R w^2\right]$$

である．しかしこれら小さなキューブ R は Q の分割である．従ってこの和は

$$2^{-2n}\eta_Q^{-1}\left[\int_Q w^2\right]=2^{-2n}a_Q$$

に等しい．従って $n\ge 0$ について和を取ることで $a_Q^*\le ca_Q$ が得られる．補題 16.2 より R に対する証明はこれで終わった．

T の積分核は，今まさに R に対して施したのと同じ解析が適用できる積分核の和なので， T

に対する証明もこれで終わった．そのような議論（すなわち，モデルとなる作用素 T への移行）は少しばかり技術的である．そのことは [RSe2] で行われており，R のような作用素ではあるが，平行移動したキューブ上の特性関数を使って作られる作用素により T を上から押さえることでできる． ∎

従って 16.2.1 節の Birman や Schwinger の定理により，定理 16.7 の関数 A が十分小さければ，負の固有値の数は 1 より小さくならなければならず，従って 0 でなければならない．そのような結論を導くためには，A のような定数に対する正確な評価を与えることが大きな興味となる．しかしながらそのような「正確な評価』はこれらの方法から得られそうもない．

さて一般的な場合 $\lambda \neq 0$ に戻ろう．解析方法は同じである．ただ異なる所は作用素の積分核の評価である．$(\lambda - \Delta)^{-1}$ は Bessel ポテンシャル 作用素で，その積分核 $G(x,y)$ は $\mu = \lambda^{1/2}$ と置くと

$$G(x,y) \sim \begin{cases} c_1|x-y|^{-1} & \mu|x-y| \leq 1 \quad \text{の時} \\ c_2|x-y|^{-1}\exp(-\mu|x-y|) & \mu|x-y| \geq 1 \quad \text{の時} \end{cases}$$

という評価を持つ．ここで定数 c_1 ，c_2 は μ に無関係な定数である．(例えば [St] の p.131 の公式 (v) を見よ) 斉次性がないので，よりデリケートな解析が必要である．

μ を固定せよ．前と同じようにモデルとなる作用素に還元させよう．次の作用素 S

$$S = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} b_Q \|w\chi_Q\|^2 f_Q \otimes e_Q$$

ここで

$$b_Q = \begin{cases} \eta_Q^{-1} & \mu\eta_Q \leq 1 \quad \text{の時} \\ \eta_Q^{-1}\exp(-\mu\eta_Q) & \mu\eta_Q > 1 \quad \text{の時} \end{cases}$$

なる作用素の有界性を考えなければならない．

定理 16.8 (16.8) が成立するとせよ．そのとき

$$\|S\| \leq c \int \sup_{\substack{Q \in \mathcal{Q} \\ \mu\eta_Q \leq 1}} \eta_Q^{-1} \left[\int_Q v\right] \tag{16.9}$$

となる．$T = T_\lambda$ に対しても同じ評価が得られる．

証明 $I_Q = [\int_Q w^2]$ とせよ．先の証明と同じようにして $\|S\| \leq c\sup\{(b_Q I_Q)^*\}$ となり $(\boldsymbol{q}I_Q)^*$ を考察する必要がある．先と同じように $(\boldsymbol{q}I_Q)^*$ c を定義する和はキューブの大きさによって統制され同じ大きさのキューブを含む部分和はきちんと計算できる．$\mu\eta_Q \leq 1$ なる小さなキュー

ブに対する必要な評価は得られる．大きなキューブに対しては，評価

$$(qI_Q)^* \leq \left[\sum_{\mu\eta_Q\leq 2^n} 2^{-3n}(2^{-n}\eta_Q)^{-1} + \sum_{\mu\eta_Q>2^n} 2^{-3n}(2^{-n}\eta_Q)^{-1}\exp(-\mu 2^{-n}\eta_Q)\right] I_Q$$

が得られる (どちらも和は n について取る)．最初の和は $c\mu^{-2}\eta_Q^{-3}$ で押さえられる幾何級数であり，二番目の和を評価するには 次の補題が必要である．

補題 16.9　$A \geq 1$ とし β を正の数とせよ．β には依存するが A には依存しない正数 C が存在して

$$\sum_{A>2^n} e^{-A2^{-n}} 2^{-n\beta} \leq CA^{-\beta}$$

となる．

$\beta = 2$ の場合を適用して二番目の和は $c\mu^{-2}\eta_Q^{-3}$ ，よって補題 16.2 より

$$\|S\| \leq c \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \min(\mu^{-1}, \eta_Q)^2 \eta_Q^{-3} \int_Q w^2$$

となる．上限をとる時に大きなキューブを無視できる理由を示す必要がある．$\mu\eta_Q > 1$ なるキューブ Q を含む項は，Q に含まれる辺長が大体 μ^{-1} のキューブを含む項の平均である．(直接的な計算は省略する．) 従って大きなキューブが上限を与えることはない．こうして R に対する証明の概略が終わった．再び T に対するような操作は機械的だが技術的なので省略する．[RSe2] を文献として挙げておく．　∎

少しわき道へそれた．有界性の評価が欲しいのではなく， 1 より大きな固有値の数の評価が欲しいのである．

λ をはじめに述べた Schrödinger 方程式の小さいほうから n 番目の固有値とせよ．このときすでに注意したように $s_n(T_\lambda) \geq 1$ である．従って補題 16.3 よりある定数 c が存在して $a_Q^* \geq c$ を満たす少なくとも n 個のキューブ Q からなる集合 K が存在する．前の証明で

$$a_Q^* \leq c\min(\mu^{-1}, \eta_Q)^2 \eta_Q^{-3} \left[\int_Q w^2\right]$$

なる評価を得ていた．従って K の n 個のキューブ上，

$$c \leq \min(\mu^{-1}, \eta_Q)^2 \eta_Q^{-3} \left[\int_Q w^2\right]$$

となる．二進キューブの集合の幾何的性質を使って， K の中の大きな部分集合 K' で， K' の要素 Q に含まれる辺長が半分の部分キューブが，他の要素に含まれるそのような部分キューブと互いに交わらないようなものが取れる． K から K' を構成したように， K' から K'' を構

成する．補題 16.6 より

$$c' \leq \min(\mu^{-1}, \eta_Q)^2 \eta_Q^{-3} \left[\int_Q w^2 \right]$$

がそのような部分キューブに対して成り立つ．最後に先の定理の証明で注意したように，この不等式が成立する辺長が μ^{-1} 以上のキューブがあれば，やはりこの不等式が成立する辺長 μ^{-1} の部分キューブが存在する．

以上のことを全て考慮して，$n, \lambda, v,$ に依存しない定数 d_1 が存在して

$$N'(\lambda) = \sup \sharp \left\{ Q \in \mathcal{Q} : \eta_Q \leq \lambda^{-1/2}, \eta_Q^{-1} \int_Q v > d_1,\ \text{各 } Q \text{ は互いに交わらない} \right\}$$

とおけば次の定理が成立するようにできる．

定理 16.10　$v \in A_\infty$ とせよ．ある定数 c が存在して $N(\lambda) \leq cN'(\lambda)$ となる．

ここでもモデルとなる作用素に対してのみ概略を述べたが，作用素 T へも結果は拡張できる．詳細は [R5] を見よ．この種の結果に対する最近の興味の多くは [F] にある C.Fefferman と Phong による結果から由来している．そこでの結果は定理 16.10 と同じ形をしているが，p が 1 より少し大きいとして p 乗平均に対する結果を含んでいる．しかしながら，我々は v が A_∞ に属すると仮定したので我々の結果は（ [F] の結果より少し強いように見えるが）実は同等なのである．[F] にある結果の拡張あるいはその言い換えは [ChWiWo], [KeS], [S2] に見られる．

A_∞ に属さない v に対して我々のテクニックを用いたければ，ポテンシャルを A_∞ majorant で置き換えてから先へ進まなければならない.(実際このことは [F] で少しばかり行われている.)

逆の評価も知られている．我々が用いてきた方法がやはり逆の評価にも使えるが（いくつかの例が [RSe2] にある），我々の文脈での証明は [F] などにある以前の証明と全く同じようなものとなる．しかし，我々の直接的な証明は他の証明とニュアンスがやや異なる．

最後に我々の解析は $\mathbb{R}^3$ における作用素 $-\Delta - V$ に対するものだったことを注意しておこう．しかしながら，n 次元に拡張し $-\Delta$ の替わりに異なった Hamiltonian H に対しても同じことができる．必要なのは $(H + \lambda)^{-1}$ の積分核に対する良い評価だけである．例えば [CMaSi] にある相対論的 Schrödinger 作用素に対する同様の結果を発展させることも興味深いだろう．相対論的 Hamiltonian に付随したリゾルベント核に対する適当な評価が得られれば，同じパターンの解析が使えるのである．

16.3.2　ウェーブレットと $f(X)g(i\nabla)$ に対する Cwikel の評価

我々は [Si] によって $T = f(X)g(-i\nabla)$ と表記される $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素に興味がある．前と同じように $f(X)$ は $f(x)$ を掛けるという作用素で $g(-i\nabla)$ は作用素 $g(-i\nabla)h = (g\hat{h})^\vee$ の

ことである．従ってもし $g(\xi)=g(|\xi|)$ ならば $g(-i\nabla)$ は先に議論した作用素 $g(D)$ のことである．我々が注目したいのは次の Cwikel による基本的な結果である．

定理 16.11　$2<p<\infty$ とせよ．もし fが L^p に属し，g が $L^{p,\infty}$ に属しているならば，$T=f(X)g(-i\nabla)$ は $S_{p,\infty}$ に属し

$$\|T\|_{p,\infty}\leq c\|f\|_p\|g\|_{p,\infty}$$

なる評価が得られる．

背景及び動機は [Si] の第 4 章と [BiSo] を参照せよ．

この結果は f が $L^{p,\infty}$ に属しても T がコンパクトであるということすら保証しない点で良い結果である．

ウェーブレットを使ってこの定理をじかに証明しようとすればどうなるか見てゆこう．部分的な結果は得られるが，完全ではない．簡単のため $n=1$ とし $g(\xi)$ は $|\xi|$ のみに依るとしよう．この簡略化は g の滑らかさの欠如を扱う実際の問題の助けにはならない．一般性を失うことなく f は正としてよい．というのは $f(X)$ と $|f|(X)$ のちがいはユニタリ作用素だけだからである．従って $|f|$ を使って作られる作用素の $S_{p,\infty}$ ノルムを評価するだけで十分である．事実，$F(X)\geq f(x)$ a.e. の時の $F(X)g(D)$ に対して定理を証明するだけで十分である．この点については後でも触れる．最後に左からユニタリ行列を施すことで $g\geq 0$ と仮定してよい．

まずウェーブレット分解 (16.1) からはじめよう．L^2 の元 h に対して

$$h=\sum\langle h,\psi_Q\rangle\psi_Q$$

従って

$$Th=\sum\langle h,\psi_Q\rangle f(X)g(D)\psi_Q \tag{16.10}$$

$\hat{\psi}_Q$ は $\{\xi:|\xi|\sim l_Q^{-1}\}$ あたりに集中していると考えられる（l_Q は Q の辺長である）．従ってもし g が滑らかならば，形式的には

$$g(D)\psi_Q=g(l_Q^{-1})\psi_Q \tag{16.11}$$

これが正しいとして次の作用素を考える．

$$Rh=\sum g(l_Q^{-1})\langle h,\psi_Q\rangle f\psi_Q \tag{16.12}$$

今のところまだどんなウェーブレットを用いているかは問題にしていない．しかしそれを連続かつコンパクト台を持つものとし，さらに

$$f^2 \in A_\infty \tag{16.13}$$

と仮定すれば，補題 16.6（の簡単な拡張）から

$$\varphi_Q = \|f\psi_Q\|_2^{-1} f\psi_Q, \quad Q \in \mathcal{Q}$$

なる列は NWO となる．$f_Q = \|f\psi_Q\|_2$ とおく．

$$R = \sum g(l_Q^{-1}) f_Q\, \psi_Q \otimes \varphi_Q$$

なる作用素に注目しよう．

補題 16.12　$f \in L^p$, $g \in L^{p,\infty}$ に加えて g が次の意味で滑らかであるとしよう．すなわち与えられた $\lambda > 0$ に対して $\Lambda = \{n : g(2^{-n}) > \lambda\}$ とおいた時，

$$|\{x : g(x) > \lambda\}| \sim \sum_{n\in\Lambda} 2^{-n} \tag{16.14}$$

ということである．この場合，数列 $\{g(l_Q^{-1})f_Q\}$ は $l^{p,\infty}$ の元である．

いったんこれが得られれば，次の定理が得られる．

定理 16.13　f が L^p に属し (16.13) を満たすとする．g は $L^{p,\infty}$ に属し，$|\zeta|$ だけに依存し，先の補題の意味で滑らかであるとする．このとき R は自然なノルム評価によって $S_{p,\infty}$ に属する．

証明　補題 16.6 により $\{\psi_Q\}$ は NWO である．$\{\psi_Q\}$ は正規直交列であるから NWO である．先の補題により係数列 は $l^{p,\infty}$ に属する．従って 補題 16.4 によりこの定理が得られる．▌

まず補題を証明し，次に Cwikel の定理 にいかに近づいたかを論じよう．

証明　まず (16.14) の右辺と（ $N = \min\Lambda$ と置いたとき）2^{-N} と比較可能であることに注意せよ．g が $L^{p,\infty}$に属していることにより左辺は $C\lambda^{-p}$ で押さえられる．よって $\lambda^{-p} \geq c2^{-\min\Lambda}$．従ってもし $g(2^{-n}) > \lambda$ ならば $2^{-n} < 2^{-N} < c\lambda^{-p}$ となる．つまり $s = 2^{-n}$ に対して $g(s) \leq cs^{-1/p}$ ということ．我々が示したいことは数列 $\{g(l_Q^{-1})f_Q\}$ が $l^{p,\infty}$ に属することである．すなわち $\{g(l_Q^{-1})^p f_Q^p\}$ が $l^{1,\infty}$ に属することである．従って $\{l_Q f_Q^p\}$ が $l^{1,\infty}$に属すること

を示せばよい．さてある大きな数 K に対して

$$f_Q^p = \|f\psi_Q\|_2^p \le c\left(\frac{1}{|Q|}\int_{KQ} f^2\right)^{p/2} \le c(m_{KQ}(f^2)^{1/2})^p$$

であることに注意せよ．ここで m_{KQ} は KQ 上平均をとる作用素である． f は L^p に属しているので f^2 は $L^{p/2}$ に属する． $p/2>1$ なので

$$f^+(x) = \sup_{x\in Q} m_{KQ}(f^2)$$

は (Hardy–Littlewood の定理 より) $L^{p/2}$ に属する．ここで $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上で定義された関数で集合 $\hat{Q} = Q\times[l_Q/2, l_Q]$ 上，値 $l_Q f_Q^p$ をとる $H(x,t)$ を考えよう． $\{l_Q f_Q^p\}$ が $l^{1,\infty}$ に属することを示すことと H が $L^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^2, t^{-2}dxdt)$ に属することを示すこととは同値である．従って

$$\iint_{H(x,t)>\lambda} t^{-2}dxdt$$

を評価すればよい．積分範囲を $\{(x,t); tf^+(x)^{p/2}>\lambda\}$ に置きかえてもよい．すると

$$\int\left(\int_{tf^{+p/2}>\lambda} t^{-2}dt\right)dx = \int\frac{1}{\lambda}f^{+p/2}dx = \frac{1}{\lambda}\int(f^+)^{p/2}dx$$

となる． f^+ は $L^{p/2}$ に属するので`補題の証明は終わった． ∎

我々はどれだけ Cwikel の定理の証明に近づいたであろうか？ 形式的にはすでに終わっているが，いまだやるべきことがある． (16.13) の制約は問題ではない． Hardy–Littlewood の maximal 作用素 を M で表すと，関数 $F = M(f^{p/2})^{2/p}$ は各点で f よりも大きい．しかも A_∞ に属する ([CoR] 参照)． $n=1$ ， g が $|\xi|$ だけ依存するという制約は単なる簡便のためである． g の滑らかさの仮定が少々やっかいである． g が滑らかだとしても (16.11) が正しいとはいえない．しかしながら g が滑らかであれば (16.11) を指針として我々の作用素に対する有効な近似を作ろうとすることができる．しかしながら，例えば gがあらゆる区間上非有界ならばどんな解析をはじめればよいか明瞭でない．ウェーブレットと数列 NWO の言葉にぴったりとあてはまる Cwikel の定理の証明を見つけようとすることは興味深い問題と思われる．

16.3.3　$f(X)g(D)$ に対する Calderón–Toeplitz モデル

Calderón–Toeplitz 作用素 とは (16.2) にマルチプライアーを入れることで作られる $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用のことである．すなわち上半平面 $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$上定義された関数 $b(x,t)$ に対して

それに付随した Calderón–Toeplitz 作用素とは次に定義する T_b のことである．

$$T_b f = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} b(\zeta)\langle f, \psi_\zeta\rangle \psi_\zeta \, d\mu(\zeta) \tag{16.15}$$

作用素を構成するためにこの再生公式を使う考えは [KlSk] に見られ，[Da] の第 2 章で議論されている．その名前は Bergman 空間上の Toeplitz 作用素に形式的には大変良く似ていることから来ている．最大の相違は Bergman の再生公式の代わりに Calderón の再生公式 を使う点である．調和解析の文脈でこの作用素を研究する方向としては [No1], [No2], [R1], [R2], [R3] がある．この節では前節で議論した作用素 $f(X)g(D)$ に対するモデルとなる作用素 T_b を構成することにしよう．ここでの話の大半は [No1] に依っている．

前節のように一般の $f(X)g(-i\nabla)$ を考えるよりも f，g はともに非負とし，$g(\xi)$ は $|\xi|$ だけに依存しているとして $L^2(\mathbb{R})$ で考えることにしよう．

今まで分解するという考えを用いて関心の対象の作用素をより簡単なものに分解してきた．ここでは簡単な作用素から始めて興味の対象の作用素モデルを構成することにする．従って，使う道具は似ているものの観点は異なっていることに注意する．

$b(x,t) = d(t)$ の時の (16.15) に注目せよ．粗っぽく言えば，おおよそスケール t (従って周波数 $1/t$) の情報を含む変換部分に $d(t)$ を掛けることに対応している．T_b は平行移動と可換なのでマルチプライアーである．すなわち，

$$T_b f = (m\hat{f})^\vee$$

ここで

$$m(\xi) = \int_0^\infty d(s)|\hat{\psi}(s\xi)|^2 \frac{ds}{s}$$

この議論はインフォーマルな解析である．ψ の正規化により $|\hat{\psi}(s\xi)|^2$ が測度 $s^{-1}ds$ に関する確率密度であることが保証される．またもし，よくやるように ψ を $\hat{\psi}$ が単位球面に集中しているように取れば $|\hat{\psi}(s\xi)|^2$ は半径 s^{-1} の球面に集中しているといえる．

次に $b(x,t) = h(x)$ の時の T_b を見よう．粗っぽく言えば T_b は h を掛ける作用素 M_h に似ている．例えば $\|T_b\| \sim \|h\|_\infty$ であってそのような T_b は決してコンパクトではない．またもし b が滑らかで遠方で減少するならば $T_b - M_h$ はコンパクトであって b の滑らかさに応じて種々の Schatten イデアルに属する．しかしながら T_b と M_h の間柄は良いとはいえ優れているとはいえない (実際は $T_b = M_h +$ h とのパラプロダクト)．しかし T_b を一般化された掛け算作用素の一種とみなすことは興味深いことである．

先に行く前に，一般の b に対して作用素 T_b をより詳しく知っておこう．$\mathbb{R}^2_+$ を $\cup_{Q\in\mathcal{Q}}\hat{Q}$ と

分解しよう．すると

$$T_b = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \int_{\hat{Q}} (\cdots) d\mu$$

となる． $\hat{Q}$ はすべて $(d\mu)$ に関して同じ大きさをもつ． $\hat{Q}$ 上では ψ_Q はほとんど変わらない．従って ψ_Q が $\hat{Q}$ の中心 ζ_Q における値で代表されると考えてもよいだろう． b の $\hat{Q}$上の平均を $m_{\hat{Q}}(b)$ で表せば，

$$T_b \sim \sum m_{\hat{Q}}(b)\, \psi_{\zeta_Q} \otimes \psi_{\zeta_Q} \tag{16.16}$$

関数 $\{\psi_{\zeta_Q}\}$ はウェーブレットではない，というのは正規直交とは限らないから．しかしながら様々な技術的な意味でそれらはほとんど直交している．例えば作用素 $\psi_{\zeta_Q} \otimes \psi_{\zeta_Q}$ はランク 1 の射影であるが， Cotlar-Stein の補題 の仮定を満たしている．従って (16.16) より数 $m_{\hat{Q}}(b)$ の大きさにより T_b の有界性や特異値に光明が与えられると期待できる．

今まで述べたことを基にして $T_{g(1/t)}$ を $g(D)$ のモデル， $T_{f(x)}$ を $f(X)$ に密接に関連していると考えることができる．従って Calderón–Toeplitz 作用素 が一般には完全な表象計算を持たない，すなわち $T_a T_b \neq T_{ab}$ であるとしても， $T_{f(x)g(1/t)}$ を $f(X)g(D)$ と比較することは興味深いことである．

f , g は正値とし， f は L^p に， g は $L^{p,\infty}$ に属するとして $b(x,t) = f(x)g(1/t)$ としよう．当座は g は滑らかであるとしよう．その場合，前節のように $g(s) \leq cs^{-1/p}$ となる． g を $s^{-1/p}$ で置き換えることで我々の作用素を大きくしよう．従って (16.16) の $m_{\hat{Q}}(b)$ は，次のような評価を持つ．

$$m_{\hat{Q}}(b) \leq c l_Q^{1/p} m_Q(f)$$

ここで $m_Q(f)$ は Q 上の f の平均値である． Cauchy–Schwartz の不等式より $m_Q(f) \leq m_Q(f^2)^{1/2}$ である．従って

$$m_{\hat{Q}}(b) \leq c l_Q^{1/p} m_Q(f^2)^{1/2}$$

となる．これは前節で得た評価である．ある $p > 2$ に対して f が L^p に属することにより，この評価から $\{m_{\hat{Q}}(b)\} \in l^{p,\infty}$ が得られる． (16.15) にこの事実が使える．

この先を詳細に続けるよりも，証明に戻ってゆくために [No1], [No2] の Nowak の結果を要約しよう．

$b(x,t) \geq 0$ とせよ． $\eta > 0$ を固定する． $\zeta = (x,t)$ に対して $m_\zeta(b)$ を $\mathbb{R}^2_+$ 内の中心 ζ の双曲的球体上の b の積分とせよ． ψ が良い関数なら (Cotlar–Stein の補題を用いるには少しの滑らかさが必要であるが) その時

定理 16.14　$1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ に対して $T_b \in S_p$ であるための必要十分条件は $m_\zeta(b) \in L^p(\mathbb{R}^2_+, t^{-2}dxdt)$ である．

系 16.15　もし $b(x,t) = f(x)g(1/t)$ なら

$$\|T_b\|_{p,\infty} \leq c\|f(x)g(1/t)\|_{p,\infty} \leq c\|f\|_p\|g\|_{p,\infty}$$

である．

この系で g の平均が入っていることにより前節では必要であった g に対する滑らかさの仮定が取り除かれる．

この定理がどれだけ $f(X)g(D)$ についての情報を与えるかは明らかではない．同じようにある文脈で $f(X)g(D)$ の代わりに T_b を用いることができるのかどうかも明らかではない．この方向での進歩もいくらかは期待できる．例えば [D] の Schrödinger 作用素の議論を見よ．

16.4　サイズの評価を越えて

前節では作用素の大きさの様々な研究について見てきたが，ここでは具体例に注目し，それをさらに詳しく見ていこう．考え方は [R4],[R5] によっている．きわめて粗っぽい議論なので，くわしくはそれらの論文を見ていただきたい．

再び $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の Schrödinger 作用素 $S = -\Delta - V$ に注目する．

ある場合には S は一般化された固有ベクトルを持つ．すなわち，正の数 k に対して L^2 ではないが $S\psi = k^2\psi$ を満たすような関数 ψ が存在するかもしれない．そのような ψ を研究する一つの方法は， $V = 0$ の時の固有ベクトルである $\exp(ikx)$ の摂動と見なすことである．これにより ψ に対する，修正された Lipman–Schwinger 方程式が導かれる．(背景は [Si] の 5 章参照) 作用素 $R = R_k$ を積分核

$$K(x,y) = v^{1/2}(x)v^{1/2}(y)\exp(ik|x-y|)|x-y|^{-1}$$

を持つ作用素とする．形式的に $\psi = (I+R)^{-1}(v^{1/2}\exp(ikx))$ となることは簡単である．好条件の下では $\|R\| < 1$ であり,「Born 級数」と呼ばれる級数展開 $(I+R)^{-1} = \sum(-R)^n$ は収束し，解析をさらに行うために使われる．別のよくある条件は， R のノルムは大きいがコンパクトである場合である．そのときランク有限の作用素 F，ノルムが小さい作用素 M，つまり $\|M\| < 1$ を使って $R = F + M$ と分解できる．そのとき $(I+R)^{-1} = (I+M)^{-1}[I + F(I+M)^{-1}]^{-1}$ ．第 2 成分は恒等写像のランク有限の摂動であり，代数的に研究される． R の分解を得る最も容易な方法は， R の固有ベクトルを用いることである．しかしながら固有ベクトルが分からなければ，どんな分解 $R = F + M$ でもよい． F を構成している有限個のランク 1 の作用素は物

理学で「擬粒子」と呼ばれることがある．[W] と [N] 参照．

さて $W^2 = V$ とおく．再び (16.8) を仮定する．(16.6) を導いたように

$$K(x,y) \sim \sum\nolimits_Q \eta_Q^{-1} e^{ik|x-y|} w(x)w(y)\chi_Q(x)\chi_Q(y)$$

ここで「 $\sim$ 」は右側の核が左側の核のモデルであることを示す．$\widetilde{M}$ を右側の核を積分核とする作用素とせよ．小さな数 ϵ を選び $W = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ を$\eta_Q^{-1} \int_Q v > \epsilon$なる Q の元 Q 集合とする．(もし S の固有値が 0 に収束するならば，定理 16.10 の逆の評価により W は有限集合であることが保証される．) これにより $\widetilde{M}$は次のように分解される．

$$\widetilde{M} = M_1 + M_2$$

ここで M_1 で Wを Q 上足し合わして得られる積分核を持つ．M_2 が小さいことに注意しよう．$\exp(ik|x-y|)$ なる項のために 16.2.5 節で記述した方法は使えない．しかし，M_2^+ を積分核

$$\sum_{Q \notin R} \eta_Q^{-1} w(x)w(y)\chi_Q(x)\chi_Q(y)$$

をもつ作用素とすると，L^2の元 f, gに対して

$$|\langle M_2 f, g\rangle| \leq |\langle M_2^+ |f|, |g|\rangle 1$$

となる．16.2.5 の方法が M_2^+に使えて，M_2に対する求めるべき評価を与える．

今や M_1 を少し研究する必要がある．W の元 Q_i に対して滑らかな φ_i （ $10Q_i$ に台をもち，Q_i 上恒等的に 1 ）をえらぶ．そして $\varphi_i e^{ik|x-y|}$ を多重 Fourier 級数として $10Q_i$ 上展開する．これにより，その核の項に対応する作用素 $M_{1,i}$ を，急減少する係数をもつランク 1 の作用素の無限和として表すことができる．この無限和はランク有限の作用素 F_iと小さな剰余項の和として表せる．これを各 i に対して行う．各 iに対するランク 1 の作用素の有限和を集め，小さな剰余項を M_2 とあつめて，最終的に

$$\widetilde{M} = F + M$$

と書ける．ここで F はランク 1 の作用素の有限和，M は小さなノルムをもつ．

[RSe2] の考えを用いなかったのは，ここの状況と全くちがうからである．なぜなら，$e^{ik|x-y|}$ は大きな k に対し，あるいは k を固定し大きな $|x-y|$ に対してはげしく振動するからである．$\varphi_i e^{ik|x-y|}$ を Fourier 級数に展開した時，$10Q$ 上 $\varphi e^{ik|x-y|}$ の微分を含む評価が得られる．これは $k|x-y|$ なる項を含む．この項が解析の邪魔にならない理由は W 内に有限和の Q しかないからである．従って $|x-y|$ を押さえることが出来る．

同じ解析が固有ベクトルを研究するのに使われる．もし $(-\Delta - V)f = \lambda f$ なら，$g = v^{1/2} f$

は

$$V^{1/2}(\lambda-\Delta)^{-1}V^{1/2}g=g$$

(略して $Tg=g$ と書く) を満たすことを思い出そう.

モデルのレベルでは, T の核は,

$$\sum \exp(-\sqrt{\lambda}\eta_Q)\eta_Q^{-1}w(x)w(y)\chi_Q(x)\chi_Q(y)$$

と書ける. 以前

$$R=F+M$$

と書いた. ここで, F は剰余項が小さくなるように, この和の有限個を選んで得られるものである.

$$g=Fg+Mg$$

となるので

$$g=(I-M)^{-1}Fg=\sum M^nFg=Fg+MFg+\cdots \tag{16.17}$$

$\|M\|$ が小さいことによりこの収束性は保証される. ここでのポイントは $(I-M)^{-1}$ が $w\chi_Q$ の形をした関数から生成される有限次元空間の元 Fg に作用できることである. 上の形から一歩進むことができる. 固定した Q_0 に対して $Fg=w\chi_{Q_0}$ の特別な場合を考えよう. M を $w\chi_{Q_0}$ に施すと三つのタイプの項が生まれる. 一つめは $Q\subseteq Q_0$ を含む項である. それらを $\sum_1$ と書く. 二つめは $Q\supset Q_0$ を含む項である. それらを $\sum_2$と書く. 残りの項は何の寄与もしない. よって

$$\begin{aligned}M(w\chi_{Q_0}) &= \sum\nolimits_1 \exp(-\sqrt{\lambda}\eta_Q)\eta_Q^{-1}\left(\int_Q w^2\right)w\chi_Q\\ &\quad+\sum\nolimits_2 \exp(-\sqrt{\lambda}\eta_Q)\eta_Q^{-1}\left(\int_{Q_0} w^2\right)w\chi_Q\end{aligned}$$

w^{-1} をかけてもとの固有ベクトル f に戻ると

$$\begin{aligned}w^{-1}(Mw\chi_{Q_0}) &= \sum\nolimits_1 \exp(-\sqrt{\lambda}\eta_Q)\eta_Q^{-1}\left(\int_Q w^2\right)\chi_Q\\ &\quad+\sum\nolimits_2 \exp(-\sqrt{\lambda}\eta_Q)\eta_Q^{-1}\left(\int_{Q_0} w^2\right)\chi_Q\end{aligned}$$

よって二つの項が得られる. $\sum_1$は比較的複雑でポテンシャルの大きな平均値に付随した相空

間上のキューブ Q_0 に台をもつ．$\sum_2$ は Q_0 上一定で比較的おとなしく，∞ へ行くと指数減少する．このことをもう少しはっきりさせよう．$\eta_{Q_0}=\lambda=1$ の時を考えよ．$\sum_1$ の項に関しては指数項を落とす．Q_0 内の x に対しては $\eta_Q^{-1}\int_Q w^2$ を x を含む Q_0 に含まれる Q 上に和をとる．その和は上からポテンシャル作用素 $(-\Delta)^{-1}=I_2$ を $w^2\chi_{Q_0}$に施したもので押さえられる．$\sum_2$ を評価するためには Q_0から離れた x に対しては殆どの項が小さい．結局，

$$w^{-1}(Mw\chi_{Q_0})(x)\le cI_2(w^2\chi_Q)(x)+c\left(\int_{Q_0}w^2\right)\exp(-c\,\mathrm{dist}(x,Q_0))$$

この種の解析を最後までやることも可能であろう．結論として n 番目の固有関数は $O(n)$ で評価され，$I_2(v)$ と遠方に行けば指数減少するグローバルな評価に支配されるということである．この解析は複雑だが，[RSe2] でもう少し簡単な作用素に対するこの種の解析を行うことが可能である．

16.5　反省と考察

16.5.1　他の作用素

ウェーブレットとそれに関連した分解は，Calderón–Zygmund 作用素 とそれに類した特異積分作用素の解析で有用であることが知られている．この考えが使われていないが有用でありそうな他の作用素もある．特にこの考えは合成作用素を研究する際に有用である．典型的な問題は次のとおり．X と Y を $\mathbb{R}$ 上の関数空間でウェーブレットが無条件基底を与えるものとせよ．φ を $\mathbb{R}$ の位相同型とせよ．C_φ を $C_\varphi(f)(x)=f(\varphi(x))$ で定義される合成作用素とせよ．

問題 16.16　いかなる φ に対して C_φ は X を Yへ写すか?(あるいはもっと一般に，$C_\varphi^\alpha(f)=f(\varphi(x))\varphi'(x)^\alpha$は X から Yへの有界作用素か？)

ウェーブレットへの関連は次の不正確な記述に示唆される．$\{\psi_Q\}$ を X に対するウェーブレット基底とせよ．すると $C_\varphi(\psi_Q)\sim\psi_{\varphi^{-1}(Q)}$ となる．ここで $\varphi^{-1}(Q)$ は集合 $\varphi^{-1}(Q)$ によって近似される二進キューブを表すものとする．

これは正しくないが，それの言うところは行列 $\langle C_\varphi(\psi_Q),\psi_R\rangle$ が近似的に各行各列に，小さくない要素はわずかしかないということである.(関連した事実として，再生核をもつ Hilbert 空間に作用する合成作用素は，その共役が核関数と可換であるという性質をもつことである．ウェーブレットと再生核の類似は体系的に [R1] で論ぜられている.) ここにもっとはっきりしていておそらくは容易な問題がある．位相同型 φ は二進キューブ全体 $\mathcal{Q}$ 上の写像 $\tilde{\varphi}$ を誘導する．すると $\mathcal{Q}$ 上で定義された空間列を他のそれへ写す写像 $\tilde{C}_\varphi$ あるいは $\tilde{C}_\varphi^{(\alpha)}$ を構成できる．問題はいつ $\tilde{C}_\varphi^{(\alpha)}$ が X の関数のウェーブレット係数からなる空間 $\tilde{X}$ を，同じようにして作ら

れる空間 $\tilde{Y}$ へ写すかということである．

16.5.2 固有ベクトル

特異積分作用素の固有ベクトルについて何が言えるだろうか？ $L^2(\mathbb{R})$ に作用するヒルベルト変換は特異積分作用素であり，ある定義によれば恒等写像もそうである．従ってこの問題は一般的すぎるであろう．

しかし Hardy 空間 $H^2(\mathbb{R})$ に作用する次の作用素を考えよう． H^2 の元 f は $\mathbb{R}^2_+$ 上の解析関数 $f(z)$ とみなせる． $b(z)$ を $\mathbb{R}^2_+$ の正則関数で境界値が $BMOA(\mathbb{R})$ に入っているとせよ．$\prod(b,\cdot)$ を

$$\prod(b,f)(z) = \int_{i\infty}^{z} b'(\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

と定義せよ．これはパラプロダクトの例であり，特異積分作用素の一種である（このフォーミュレーションでは分かりにくいが）． $\prod(b,\cdot)$ は b が $BMOA$ の元であれば有界であり，b が対角型 Besov 空間 B_p の元であればコンパクトであり Schatten イデアル S_p に属する．この例で目覚ましいことは，固有方程式が解けるということである．もし，

$$\prod(b,f) = \lambda f$$

なら

$$f = \exp(b/\lambda)$$

となる．これは H^2 の元ではない．なぜなら ∞ で $b(x) \to 0$ となるから．しかしこの例は次の性質を持つ S_p の作用素を表している．すなわち，一般化された固有ベクトルの特異性が原点で

$$O\left(\exp\left(\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{1/p'}\right)\right) \tag{16.18}$$

より悪くはないという性質である.(ここで $1/p + 1/p' = 1$)

著者はこの例は一つのパターンであると思っている．ある特異積分作用素 T がコンパクトであり S_p に属するといった事実は T のランク有限の作用素による近似率についての記述である．もしその近似が分解定理の文脈で行われるのなら，前節で述べた Schrödinger 作用素に対する解析がおそらく固有ベクトルの大きさを評価するのにも使えるだろうということである．[R4] で

$$Tf = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \lambda_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f\right)\chi_Q$$

ここで $\{\lambda_Q\} \in l^p$，によって与えられる $L^2(\mathbb{R})$ 上の特に単純な作用素に対して，そのような解析が実行された．結果は，固有ベクトルは (16.18) のような評価を持つということであった．

参考文献

[BCoRo] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. 1992. "Wavelets in numerical analysis: compression of operators," in *Wavelets and Their Application*, M. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, and L. Raphael, eds., Boston: Jones and Bartlett, pp. 181–210.

[BiSo] M. Birman and M. Solomyak. 1991. "Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations," *Adv. Sov. Math.* **7**: 1–55.

[BiKaSo] M. Birman, G. Karadzhov, and M. Solomyak. 1991. "Boundedness Conditions and Spectrum Estimates for the operators $b(X)a(D)$ and their Analogs," *Adv. Sov. Math.* **7**: 85–106.

[CMaSi] R. Carmona, W.C. Masters, and B. Simon. 1990. "Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of the eigenfunctions," *J. Funct. Anal.* **91**: 117–142.

[ChWiWo] S.Y.A. Chang, J.M. Wilson, and T.H. Wolff. 1985. "Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operator," *Commun. Math. Helv.* **60**: 217–246.

[CoR] R. Coifman and R. Rochberg. 1980. "Another characterization of BMO," *Proc. Amer. Math. Soc.* **79**: 249–254.

[D] I. Daubechies. 1992. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **61**, Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math,

[Da] G. David. 1991. *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces*, *Lect. Notes Math.* **1465**, Berlin: Springer-Verlag.

[F] C. Fefferman. 1983. "The uncertainty principle," *Bull. Amer. Math Soc.* **9**: 129–206.

[FrJa] M. Frazier and B. Jawerth. 1990. "A discrete transform and decompositions of distribution spaces," *J. Funct. Anal.* **93**: 34–170.

[FrJaWe] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss. 1991. *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS Conf. Lect. Notes **79**, Providence: Amer. Math. Soc.

[GFra] J. Garcia-Cuerva and J.L. Rubio de Francia. 1985. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, *North-Holland Math. Studies* **116**, Amsterdam: North-Holland.

[H] Y.S. Han. 1992. "Calderón type reproducing formula and the Tb theorem," preprint.

[He] L.I. Hedberg. 1972. "On certain convolution inequalities," *Proc. Amer. Math. Soc.* **36**: 505–510.

[JL] S. Jaffard and Ph. Laurençot. 1992. "Orthonormal wavelets, analysis of operators and applications to numerical analysis," in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, **2**, C.K. Chui, ed., Boston: Academic Press, pp. 543–601.

[KeS] R. Kerman and E. Sawyer. 1986. "The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators," *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **36**: 207–228.

[KlSk] J. Klauder and B.-S. Skagerstam. 1985. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, Singapore: World Scientific.

[Me1] Y. Meyer. 1989. "Wavelets and operators," in *Analysis at Urbana*, E. Berkson et al., eds., London Math. Soc. Lect. Note **137**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 256–364.

[Me2] Y. Meyer. 1990. *Ondelettes et Operateurs*, 3 vols., Paris: Hermann.

[N] R. Newton. 1966. *Scattering Theory of Waves and Particles*, New York: McGraw-Hill.

[No1] K. Nowak. 1991. "Toeplitz operators and commutators based on the Calderón reproducing formula," Ph.D. Thesis, Washington University, St. Louis.

[No2] K. Nowak. 1992. "On Calderón–Toeplitz operators," *Monat. fur Math.*, to appear.

[P] L. Peng. 1993. "Wavelets and paracommutators," to appear.

[Pe] C. Perez. 1990. "Two weighted norm inequalities for Riesz potentials and uniform L^p-weighted Sobolev inequalities," *Ind. Univ. Math. J.* **39**: 31–44.

[R1] R. Rochberg. 1990. "Toeplitz and Hankel operators, wavelets, NWO sequences, and almost diagonalization of operators," *Proc. Symp. Pure ath.* **51**(I): 425–444.

[R2] R. Rochberg. 1992. "A correspondence principle for Toeplitz and Calderón–Toeplitz operators," in *Interpolation Spaces and Related Topics*, Isr. Math Conf. Proc., **5**, M. Cwikel, M. Milman, and R. Rochberg, eds., Providence: Amer. Math. Soc., pp. 229–243.

[R3] R. Rochberg. 1992. "Eigenvalue estimates for Calderón–Toeplitz operators, function spaces," *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **136**, K. Jarosz, ed., New York: Marcel Dekker, pp. 345–357.

[R4] R. Rochberg. 1992. "Size estimates for eigenvectors of singular integral operators," preprint.

[R5] R. Rochberg. 1993. "NWO sequences, weighted potential operators, and Schrödinger eigenvalues," *Duke Math. J.*, to appear.

[RSe1] R. Rochberg and S. Semmes. 1986. "A decomposition theorem for functions in BMO and applications," *J. Funct. Anal.* **67**: 228–263.

[RSe2] R. Rochberg and S. Semmes. 1989. "Nearly weakly orthonormal sequences, singular value estimates, and Calderón–Zygmund operators," *J. Funct. Anal.* **86**: 237–306.

[S1] M. Schechter. 1986. *Spectra of Partial Differential Operators*, 2nd ed., Amsterdam: North-Holland.

[S2] M. Schechter. 1989. "The spectrum of the Schrödinger operator," *Trans. Amer. Math. Soc.* **312**: 115–128.

[Si] B. Simon. 1979. *Trace Ideals and Their Applications*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[St] E. Stein. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton: Princeton Univ. Press.

[V] I.E. Verbitsky. 1992. "Weighted norm inequalities for maximal operators and Pisier's theorem on factorization through $L^{p\infty}$," *Integr. Equat. Oper. Theory* **15**: 124–152.

[W] S. Weinberg. 1963. "Quasiparticles and Born series," *Phys. Rev.* **131**: 440–460.

索　引

訳者あとがき

ウェーブレットは理論にせよ応用にせよ新しい分野であり，国内の専門書の種類は現在のところ極めて限られている．しかしながら，我が国におけるこの分野の発展にとって，日本語で書かれた専門書の存在が非常に望まれると考える．このような背景の下で我々訳者グループは発足した．はじめに，現状で出版されている多数の海外専門書を取り寄せ内容の検討を行った．その中から基礎理論及び応用双方の観点から最も内容の充実したものとして本書が選ばれた．本書は J.J.Benedetto と M.W. Frazier の編纂書 “WAVELETS: Mathematics and Applications” の日本語訳である．原書は昨年に出版されたばかりであるが，ウェーブレットの専門書として世界の研究者間で高い評価を得ている．

本書の特色は，ウェーブレットの基礎理論から応用まで幅広い，しかも非常に高いレベルの多数の論文を 1 冊の本としてまとめた点にある．このような形式の専門書には，一般に内容が雑多で論文集的なものが多い．しかしながら，本書では確固とした視点設定の下に，適切な論文が全体の流れの下で相互の整合性を保ちつつ整理されており，まとまった 1 つの文献として十分に読みごたえのあるものである．

本書で扱われている内容は主に 3 つである．1 つはウェーブレットの基礎理論であり，他の 2 つは応用分野，特に信号処理と偏微分方程式に関連したウェーブレット理論である．後 2 者は理論的背景から実際的応用例に至るまで詳細に解説されている．本書を理解するためには多少の数学的背景に関する知識を必要とするが，ウェーブレット理論とその利用を志す理学系の学生にとって優れた専門書と言えよう．

翻訳にあたってわかりづらい点も多くあった．適切な訳語が見つからずに一部意訳せざるを得なかったところも少なくない．読者諸氏から気のつかれた点，読みづらい点を種々指摘していただければ幸いである．

終わりに本訳書を出版するにあたり，翻訳の遅れや原稿の通読，修正などで多大のご迷惑をおかけしたシュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフの皆さんに深くお礼を申し上げる．

訳者一同

【訳者一覧】

池田　和正	（第 3 章）	日本学術振興会特別研究員
服部　裕司	（第 6 章，第 11 章）	東北大学流体科学研究所助手
森藤　紳哉	（第 4 章，第 16 章）	奈良女子大学数学科助手

◇三菱総合研究所　先端科学研究所　ウェーブレット研究会

新井　伸夫	（第 7 章）
澤部　直太	（第 8 章）
荘島　二郎	（総括）
高橋　茂	（第 12 章，第 13 章，第 14 章）
高橋　美和（旧姓江頭）	（序章，第 1 章，第 5 章）
中島　研吾	（第 15 章）
比屋根　一雄	（第 8 章）
松永　祐一	（第 2 章）
鷲尾　隆	（第 9 章，第 10 章）

編　者

J. J. ベネデット
John J. Benedetto
Department of Mathematics
University of Maryland at College Park
College Park, Maryland, U. S. A.

M. W. フレージャー
Michael W. Frazier
Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing, Michigan, U. S. A.

監訳者

山口　昌哉（やまぐち　まさや）
龍谷大学理工学部教授

山田　道夫（やまだ　みちお）
東京大学大学院数理科学研究科教授

ウェーブレット　理論と応用　　**定価**（本体6,602円＋税）

発　行　1995年12月12日（初　版）
　　　　1997年 6 月29日（初版 2刷）
編　者　J. J. ベネデット/M. W. フレージャー
監訳者　山口　昌哉/山田　道夫
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
　　　　〒113 東京都文京区本郷 3 丁目 3 番13号
　　　　TEL (03)3812-0757(営業直通)
印刷所　横山印刷株式会社

ISBN4-431-70681-X　C3041

シュプリンガー・フェアラーク社は，
1842年創立の国際総合科学出版社です．

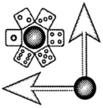
Springer-Verlag Tokyo Berlin Heidelberg New York
London Paris Hong Kong Barcelona Budapest

G.ブロム／L.ホルスト／D.サンデル 著　森 真 訳

確率問題ゼミ コイン投げからランダム・ウォークまで

A5　286頁　本体価格3,107円　ISBN4-431-70674-7

パスカルの時代から現代に至るまでの，離散確率論の問題を集めたユニークな問題集である．125の問題のそれぞれに親切な解説を付し，ほとんど予備知識を持たない読者にも確率の世界への親しみやすい入門書となるであろう．［主要内容］基本的確率論／初期の話題から／ポアソン近似／ランダム・ウォーク／マルコフ連鎖／埋め込み過程　他

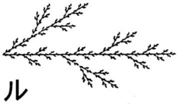


P.ブレモー 著　釜江 哲朗 監修　向井 久 訳

モデルで学ぶ確率入門

A5　253頁　本体価格4,854円　ISBN4-431-70626-7

本書は，物理学，電気工学，オペレーション・リサーチなどを学ぶ人のために，確率論の抽象的枠組みから具体的なモデルまでを提供している．確率論・統計的処理を必要とするすべての理工系の学生にとって最適の入門書である．［主要内容］メンデルの法則／投票問題と鏡像問題／Bertrand のパラドックス／人口理論／情報理論／ベイジアン／信号理論　他



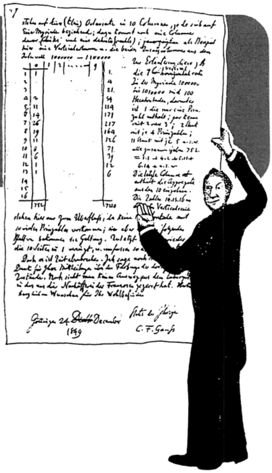
釜江 哲朗／高橋 智著

エルゴート理論とフラクタル

A5上製　243頁　本体価格5,728円　ISBN4-431-70645-3

フラクタルを力学系またはエルゴート理論の立場からとらえることを目的とした書．前半では，学部2年生程度の予備知識だけでフラクタルを基礎から解説しており，必ずしも数学を専門としていない関連分野の人にもわかりやすい構成となっている．［主要内容］エルゴート理論とフラクタルをめぐる対話／様々なフラクタル集合／特異スペクトル，次元スペクトルとハウスドルフ次元／力学系と自己アファインコサイクル　他

Springer



シュプリンガー数学クラブ

ある数学者の生涯と弁明
G.H. ハーディ／C.P. スノー 著　柳生 孝昭 訳　本体1,262円

ガウスが切り開いた道
S.G. ギンディキン 著　三浦 伸夫 訳　本体1,340円

ガリレイの17世紀
ガリレイ，ホイヘンス，パスカルの物語
S.G. ギンディキン 著　三浦 伸夫 訳　本体1,534円

数学100の勝利（全3冊）
H. デリー 著　根上 生也 訳
vol.1　数と関数の問題　本体1,631円
vol.2　平面図形の問題　本体1,631円
vol.3　空間と星の問題　本体1,534円

数学問題シリーズ

数論における未解決問題集
R. ガイ 著　一松 信 監訳　本体3,398円

幾何学における未解決問題集
H.T. クロフト／K.J. ファルコナー／R.K. ガイ 著　秋山 仁 訳　本体2,718円

数学問題ゼミナール
D.J. ニューマン 著　一松 信 訳　本体2,000円

数学発想ゼミナール 1,2
L.C. ラーソン 著　秋山 仁／飯田 博和 訳　本体各2,500円

幾何問題ゼミ 1,2
M. ベルジェ 他著　山崎 直美 訳　本体各2,700円

数論問題ゼミ 1,2
D.P. パラン 著　村田 玲音 訳　本体各2,700円

集合論問題ゼミ
J.M. ヘンレ 著　一松 信 訳　本体2,700円

解析問題ゼミ
B.R. ゲルバウム 著　藤本 佳久 訳　本体2,913円

確率問題ゼミ
コイン投げからランダム・ウォークまで
G. ブロム 他著　森 真 訳　本体3,107円



シュプリンガー数学クラシックス

代数幾何学入門
B.L. ファン・デル・ヴェルデン 著　前田 博信 訳　本体7,961円

楕円関数論
A. フルヴィッツ／R. クーラント著　足立 恒雄／小松 啓一 訳　本体4,078円

2次形式と直交群
M. アイヒラー 著　平松 豊一／味村 良雄 訳　本体8,252円

数学の基礎
D. ヒルベルト／P. ベルナイス 著　吉田 夏彦／渕野 昌 訳　本体5,631円

正20面体と5次方程式
F. クライン 著　関口 次郎 訳　本体4,600円

好評既刊書

アンドレ・ヴェイユ自伝
ある数学者の修業時代
A. ヴェイユ 著　稲葉 延子 訳　本体1,942円

数学者ザリスキーの生涯
C. パリク 著　広中 平祐 監訳　矢野 環／正木 玲子 訳　本体2,893円

ライプニッツ　その思想と生涯
R. フィンスター 他著　沢田 允茂 監訳　向井 久 他訳　本体2,893円

数　上・下
H.-D. エビングハウス 他著　成木 勇夫 訳　<上>本体2,621円 <下>本体2,816円

数論的古典解析　歴史を訪ねて
M. ケッヒャー 著　長岡 昇勇 訳　本体3,398円

トポロジーの絵本
G.K. フランシス 著　笠原 晧司 監訳　宮崎興二 訳　本体4,660円

幾何学と群
V.V. ニクリン／I.R. シャファレヴィッチ 著　根上 生也 訳　本体2,815円

数学マルチカルチャー
多文化的数学教育のすすめ
D. ネルソン 他著　根上 生也／池田 敏和 訳　本体1,748円

シュプリンガー・フェアラーク東京（株）　〒113 東京都文京区本郷3-3-13　TEL(03)3812-0757 / FAX (03)3812-0719